ПРЕДИСЛОВИЕ

Простое умозаключение о том, что «три яблока, три мандарина – это **одинаково**», может сделать даже трехлетний ребенок, однако это совсем не так просто, как может показаться на первый взгляд: ведь яблоки и мандарины – это совсем не **одинаковые** предметы. В действительности то, что «три яблока» и «три мандарина» представляются нам **одинаково**, является особенным.

Сосредоточив свое внимание только на числе «три», говорить об одинаковости – это называется «абстрактным мышлением». Хотя способностью к абстрактному мышлению обладают все, в математике оно используется в такой огромной мере, что, даже заглянув в ее сложные разделы, неподготовленный человек просто не сможет понять, о чем там идет речь.

В таких случаях всегда важно уметь строить в голове конкретные образы. Учебники, сборники задач по математике переполнены абстрактными описаниями, и это можно сравнить с тем, что даже веселая мелодия на бумаге будет выглядеть как унылая последовательность нот, и, подобно тому, как невозможно написать мелодию, не представляя у себя в голове, как она будет звучать, невозможно понять также и математику, глядя лишь на то, как преобразуются выражения.

Для понимания математики важно также иметь конкретный образ того, что вы делаете, и эта книга поможет вам конкретно представить то, что делают в дифференциальном и интегральном исчислениях.

Содержание данной книги, наверное, будет недостаточно для тех, кто, например, готовится к вступительным экзаменам в университет или собирается использовать дифференциальное и интегральное исчисления в программировании, однако ее будет вполне достаточно для того, чтобы прикоснуться к замечательным идеям, лежащим в основе дифференцирования и интегрирования. В дифференциальном исчислении «анализируют, разделив на мелкие части», а в интегральном – «складывают, разделив на мелкие части». Хотя идея очень проста, диапазон ее применения невероятно широк, и тот, кто поймет ее, сможет по-другому взглянуть даже на, казалось бы, привычные вещи. И вы, уважаемые читатели, обязательно приобретете этот «особый взгляд».

Дифференциальному и интегральному исчислениям посвящено множество вводных курсов, и, так как тематика у них всех одна, их содержание, наверное, очень похоже. Однако никто не может заранее знать, когда его навестит «бог понимания». Очень часто бывает и так, что объяснение, которое большинству кажется трудным для понимания, кому-то, наоборот, помогает понять суть. Нет необходимости понимать все объяснение – достаточно понять «что-то». Люди, знающие математику, – это вовсе необязательно какие-то гении, которые понимают все, однако это те, кто, сталкиваясь с чем-то непонятным, меняли методы изучения, подходы, книги и преподавателей. Я буду очень рад, если эта книга тоже поможет вам понять какой-либо, хотя бы один, важный момент.

В заключение хочу поблагодарить здесь господина Мацуда из Art-Supply Co. Ltd., который очень терпеливо относился ко всем моим многочисленным корректурам.

апрель 2018 года

Огами Такэхико

Дифференциалы и интегралы

СОДЕРЖАНИЕ

3 Что можно узнать с помощью интегрального исчисления? 77

1

ИСТОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ

Схватываем образ дифференциалов и интегралов

$f(x) = 2x + 2$ $\quad \pi \quad \int_3^2 \quad x^2 \quad a \; b \quad \frac{dy}{dx}$

01

Передовая наука эпохи астрономических наблюдений

ЗАРОЖДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ

Все началось с наблюдения за звездами

Дифференциальное и интегральное исчисления начались с наблюдений за звездами. Это в настоящее время развития науки и техники стали возможны, например, космические полеты или исследование Марса, однако в эпоху до того, как научились вычислять дифференциалы и интегралы, движение звезд было загадкой, и получение знаний о том, как они двигаются, в эпоху до изобретения дифференциального и интегрального исчислений было очень сложной задачей. Орбиты выводились тогда на основе огромного количества собранных данных наблюдений. Расчет орбит являлся в ту эпоху самой передовой областью науки и представлял огромную сложность. Однако **Исаак Ньютон** (1642 – 1727) и **Готфрид Лейбниц** (1646 – 1716) изобрели дифференциальное и интегральное исчисления, используя которое, в настоящее время знания о движении звезд можно получить с помощью вычислений такого уровня сложности, которым владеют даже студенты университетов.

Впоследствии дифференциальное и интегральное исчисления постепенно стали использоваться для того, чтобы понять подробности явлений в физике и других разнообразных областях.

Если понять дифференциальное и интегральное исчисления

Мы узнали, что триста лет назад дифференциалы и интегралы были передовой областью математики. Степень прогресса можно понять, если подумать о том, что в настоящее время их начинают изучать уже в старшей школе. Диапазон областей применения дифференциалов и интегралов очень широк: это не только естественные науки, но также и, например, экономика.

Однако дифференциалы и интегралы являются в то же время «чертовыми воротами» математики, и, наверное, они являются причиной того, что у многих возникает неприязнь к математике. Однако причина этого заключается в том, что либо преподаватели объясняют плохо, либо ученики не обладают достаточным уровнем подготовки. И вы, уважаемые читатели, поймите идею дифференциалов и интегралов и освободите себя от комплекса неполноценности по отношению к математике.

Зарождение дифференциального и интегрального исчислений

Начало дифференциального и интегрального исчислений

До изобретения дифференциального и интегрального исчислений узнать о том, как движутся звезды, можно было только путем наблюдения в телескоп

Эпоха астрономических наблюдений
Используя телескопы, получали знание о движении звезд

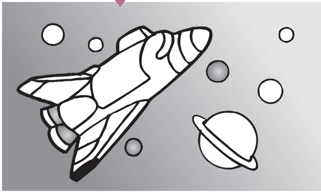
На сцену выходят Ньютон и Лейбниц

Изобретение дифференциального и интегрального исчислений
Стало возможно находить движение звезд путем вычислений

Шло время…

Современная эпоха
О движении звезд узнают с помощью компьютеров

В нашу эпоху используют также для космических полетов



Практическое использование в самых разнообразных областях

02 Почему многие спотыкаются в начале изучения дифференциального и интегрального исчислений?

ПОЧЕМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ СЧИТАЮТ ТРУДНОЙ ТЕМОЙ?

В старшей школе изучают основы дифференциального и интегрального исчислений

Интересно, как много людей скажут, что изучали дифференциальное и интегральное исчисления в старшей школе? В этой книге объяснение будет проводиться в основном в границах того, что изучают старшеклассники. Дифференциальное и интегральное исчисления и сейчас используются в самых разнообразных областях, и это само по себе свидетельствует о том, что они «являются основой основ». Например, если сравнивать овощечистку и кухонный нож, то область применения кухонного ножа более широка, так как он является «более основным» инструментом, чем овощечистка.

Почему бывает сложно?

Но почему так много людей продолжают спотыкаться о дифференциальное и интегральное исчисления, которые являются «основой основ»? Причина, наверное, заключается в том, что формулы постепенно начинают казаться совершенно непонятными последовательностями знаков и выражений. Формулы тоже при определенном взгляде на них могут быть красноречивыми. Например, если мы подумали о том, сколько нужно денег, чтобы купить четыре товара по 50 иен каждый, то подсчитаем это как $50 \times 4 = 200$, и, так как мы получим результат 200, мы сделаем вывод, что потребуется 200 иен. В самом начале и в самом конце наших рассуждений присутствует смысл, однако промежуточная формула сама по себе никакого смысла не несет. Я хочу сказать не то, что в ней не содержится смысла, а то, что «смысл в ней не записан». В действительности, увидев выражение $50 \times 4 = 200$, мы, исходя из ситуации, должно быть, подумаем: «Ага, такая формула получается потому, что есть 4 товара по 50 иен каждый». Однако по мере того, как мы поступаем в старшую школу, потом – в университет, рассмотрение промежуточных формул становится все длиннее, поэтому легко забыть саму по себе «первоначальную ситуацию», породившую все эти формулы. И если это происходит, то формулы действительно начинают казаться просто какими-то последовательностями цифр и знаков.

На самом деле не забывать первоначально поставленной задачи – это важнее, чем внимательно следить за ходом преобразований формул.

Диапазон знаний, преподаваемых в старшей школе

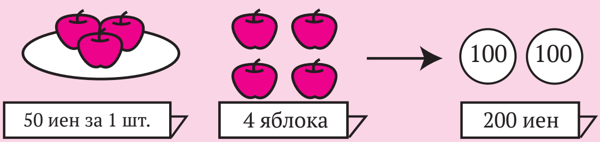
Дифференциальное и интегральное исчисления, изучаемые в старшей школе

Дифференциальное и интегральное исчисления являются одними из самых сложных дисциплин, изучаемыми в старшей школе

Почему становится сложно?

До старшей школы...

Смысл выражения 50 × 4 = 200...



Так как есть 4 яблока по 50 иен каждое, итого получается 200 иен

После поступления в университет...

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Все превращается в подобные последовательности знаков

Важный момент

Не забывать первоначально поставленной задачи, даже если вам стало сложно

03

Гений, родивший из яблока самые разнообразные вещи

ЗНАКОМИМСЯ С ИЗОБРЕТАТЕЛЯМИ ①

Отправным пунктом стало яблоко

Ньютон является одним из ученых, внесших значительный вклад в дифференциальное и интегральное исчисления, и он настолько знаменит, что его именем в физике даже названа единица измерения. Наверное, все слышали историю про то, как он, глядя на падающее с дерева яблоко, открыл закон всемирного тяготения.

Считается, что дифференциальное и интегральное исчисления Ньютон открыл, когда был чуть старше 20 лет, к той же поре относится и история с яблоком.

Первая научная статья Ньютона о свете не была принята, ввиду чего он стал слишком опасливо относиться к публикации своих работ. По этой причине разработанные им методы дифференциального и интегрального исчислений начали публиковаться только тогда, когда ему было уже больше 25 лет, а некоторые работы – когда он был уже старше 40 лет. Введенное Ньютоном понятие дифференциалов называлось «флюксией», и обозначения немного отличались от тех, которые используются в настоящее время, например, в старших школах. В наше время используются обозначения Лейбница или **Жозефа Луи Лагранжа** – в зависимости от ситуации, но и обозначения, предложенные Ньютоном, хотя у нас в Японии не очень распространены, в Германии, говорят, считаются общепринятыми.

В подходе Ньютона к дифференциальному и интегральному исчислениям чувствуется сильное влияние того, что он использовал законы движения.

Опередивший свою эпоху на 100 лет

Дифференциальное и интегральное исчисления, разработанные в эпоху Ньютона, обычными современниками поняты не были, и только спустя 100 лет трудами **Леонарда Эйлера** (1707 – 1783), Лагранжа и других они были сведены к дифференцированию и интегрированию, которые мы теперь используем.

Внесшие весомый вклад ①

Ньютон

Исаак Ньютон
(Isaac Newton)

Биография
Годы жизни: 1642–1727. Родился в Англии. Физик, математик и философ. Основал фундамент современной науки, открыв спектральный анализ света, закон всемирного тяготения, методы дифференциального и интегрального исчислений. Кроме того, внес вклад также в развитие астрономии, изобретя телескоп-рефлектор системы Ньютона.

Подход Ньютона

Использовал такие обозначения, как $\dot{x}$, $\ddot{x}$, которые называются флюксиями

Хотя существует история о том, что он «открыл закон всемирного тяготения, увидев падающее яблоко», в действительности, как считается, это является вымыслом, и открытие было совершено в процессе обычных научных изысканий.

04

Гений, сделавший ставку на изобретение обозначений

ЗНАКОМИМСЯ С ИЗОБРЕТАТЕЛЯМИ ②

Обозначения важнее, чем даже сами дифференциальное и интегральное исчисления

Лейбниц – это ученый, изобревший дифференциальное и интегральное исчисления примерно в одно время с Ньютоном. Хотя Лейбниц закончил писать научную статью о дифференциальном и интегральном исчислениях на целых 10 лет позже открытия этого исчисления Ньютоном, поскольку Ньютон на протяжении целых 20 лет свои работы не публиковал, получилось так, что научная статья Лейбница увидела свет на 10 лет раньше, чем работа Ньютона. Это стало причиной последующего конфликта.

В отличие от Ньютона, подход Лейбница к дифференциальному и интегральному исчислениям основывался на пространстве.

Лейбниц проявлял интерес к «изобретению обозначений». Понятные обозначения обладают такой огромной силой, что способны сами по себе вызвать значительный прогресс в соответствующих областях. Так, например, считается, что причина бурного развития европейской музыки заключалась в системе обозначений, отличающейся высокой воспроизводимостью (например, в нотах), и в математике, естественно, могли происходить подобные явления.

Отец обозначений

В настоящее время используются главным образом обозначения дифференциалов и интегралов, предложенные Лейбницем. В качестве примера можно привести **знак интеграла** $\int$ (**интеграл**). В то время, когда получили развитие дифференциальное и интегральное исчисления, Ньютон находился в Англии, а Лейбниц активно работал в континентальной Европе, где его открытие послужило толчком к тому, что многие ученые стали работать над развитием этого исчисления. Благодаря этому в настоящее время эта область знаний стала доступна для изучения даже старшеклассникам.

Внесшие весомый вклад ②

Лейбниц

Готфрид Лейбниц
(Gottfried Wilhelm Leibniz)

Биография
Годы жизни: 1646–1716. Родился в Германии. Известен не только как философ, математик и ученый, но и как политик и дипломат.
Вклад в математику заключался в том, что он предложил методы и обозначения дифференциального и интегрального исчислений, отличающиеся от разработанных Ньютоном, положил начало логическим вычислениям, основал Берлинскую академию наук и т.д.

Заслуги Лейбница

Дифференцирование $\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{dx}{dt}$ и др.

$\dfrac{dy}{dx}$ означает дифференцирование y по x, а $\dfrac{dy}{dx}$ – дифференцирование x по t.

Интегрирование $\int$ и др.

Если перед функцией (стр. 34) поставить $\int$, то это будет означать, что мы интегрируем эту функцию.

В качестве обозначений для дифференциального и интегрального исчислений распространение получили в основном созданные Лейбницем, поэтому именно они используются в старших школах в настоящее время.

05

Кто первый изобрел дифференциальное и интегральное исчисления?

БОРЬБА ИЗОБРЕТАТЕЛЕЙ

Как кошка с собакой

Итак, я познакомил вас с Ньютоном и Лейбницем, но нужно также сказать, что эти двое между собой сильно не ладили. Причиной их взаимной неприязни послужил спор о том, кто первый открыл дифференциальное и интегральное исчисления. Похоже, что в действительности первооткрывателем был Ньютон, но он опоздал с публикацией результатов своих трудов, в результате чего был оставлен позади Лейбницем.

Хотя изобретателем принято считать того, кто первый опубликовал свою работу, однако в обществе возникла такая критика: «Дифференциальным и интегральным исчислениями Лейбниц обязан Ньютону». По поводу этой критики Лейбниц выражает протест в адрес Лондонского королевского общества. Причина возникновения подобной критики заключалась в работе Лейбница, который изобрел механический калькулятор (арифмометр), в связи с чем получил приглашение от Лондонского королевского общества – во время своей работы в качестве дипломата. Так как при этом он стал членом этого общества, существует вероятность того, что работы Ньютона попадались ему на глаза.

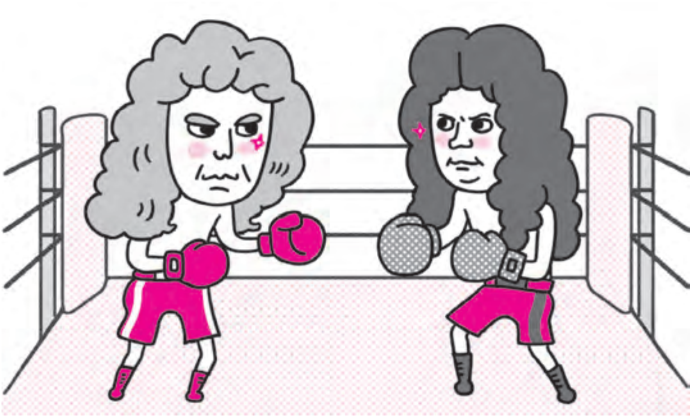
Небеспристрастная экспертиза

В проведении экспертизы участвовал Ньютон, являвшийся президентом Лондонского королевского общества, и она оказалась не беспристрастной. Этот спор ученых продолжался до самой смерти Лейбница.

Однако впоследствии, по причине того, что подходы этих двух ученых к дифференциальному и интегральному исчислениям отличались друг от друга, Лейбниц тоже был признан как ученый, который изобрел дифференциальное и интегральное исчисления отличным от Ньютона способом.

Двое ученых, не ладивших между собой

Ньютон vs Лейбниц



Результаты поединка

Ньютон VS **Лейбниц**

Ньютон

- Открытие закона всемирного тяготения
- Спектральный анализ света
- Изобретение дифференциального и интегрального исчислений
- Президент Лондонского королевского общества
- Изобретение телескопа-рефлектора системы Ньютона
- Начала Ньютона

Лейбниц

- Изобретение дифференциального и интегрального исчислений
- Изобретение арифмометра
- Первый председатель Берлинской академии наук
- Основы универсальной науки
- Монадология

Ничья в продленное время

Результаты проверки нельзя было назвать беспристрастными, так как в экспертизе принимал участие сам Ньютон. По этой причине в наши дни считается, что дифференциальное и интегральное исчисления изобрели они оба независимо друг от друга.

06

Дифференциалы и интегралы, которые трудятся незаметно для всех

ЧТО ТРЕБУЕТСЯ ДЛЯ ПОНИМАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ?

Где находятся дифференциалы и интегралы?

В настоящее время дифференциальное и интегральное исчисления используются в самых разнообразных областях – **физике**, **химии**, **биологии**, **экономике** и т. д.

Хотя это не означает, что без знания дифференциального и интегрального исчислений невозможно, например, сесть в самолет или на скоростной поезд, без этого знания невозможно было бы создание скоростных поездов, а полеты на самолетах были бы очень опасными. Причина заключается в том, что принципы полета самолетов основаны на дифференциальном и интегральном исчислениях. Другими словами, дифференциалы и интегралы, как беззаветные труженики, интенсивно работают в нашей жизни, оставаясь незаметными для всех.

Математика – это язык

Для общения с иностранцем нужно знать язык, например английский. Если общение ограничивается вопросом «как пройти?» или простым приветствием, то можно, наверное, обойтись и жестами, однако приятная беседа в таком случае не сможет состояться. Кроме того, при переводе с японского на английский некоторые слова легко переводятся, а другие – наоборот, очень сложно. Если же встречаются иностранные слова, которые трудно перевести на японский… Мы вводим в японский язык новые слова, не так ли?

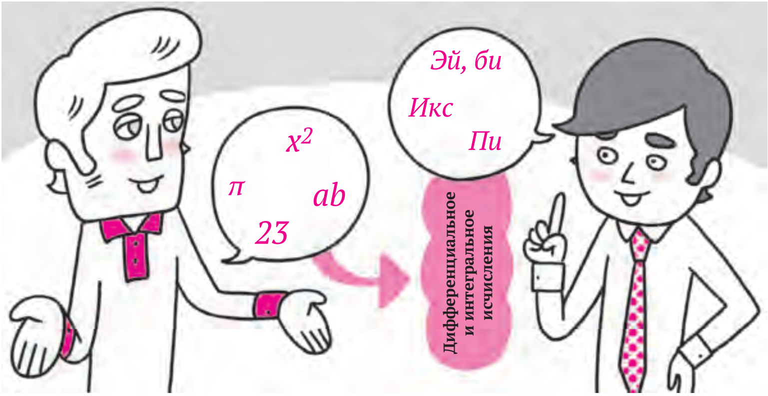
Точно так же обстоит дело и в математике. Если перевести на математический язык такое утверждение, как «чтобы купить три товара ценой в 100 иен каждый, нужно заплатить 300 иен», то получится $100 \times 3 = 300$. Правда, сложные (запутанные) фразы на японском языке трудно записать на математическом языке. Добавление дифференциального и интегрального исчисления к математике означает «**расширение области японского языка, которую можно записать математическим языком**». Знающие люди ассоциируют с формулами, которые выглядят так сухо и скучно, «изначальный смысл» этих формул и представляют себе смысл результатов вычислений.

Современные позиции

Области применения дифференциального и интегрального исчислений

Для всего этого используются дифференциальное и интегральное исчисления

Математика – это язык



Благодаря изучению дифференциального и интегрального исчислений расширилась область обычного языка, которую можно перевести на математический язык.

07

Дифференцирование и интегрирование – что появилось на свет раньше?

ПОРЯДОК ЗАРОЖДЕНИЯ И ПОРЯДОК ИЗУЧЕНИЯ

В истории было наоборот

Наверное, практически во всех учебных программах старшей школы сначала изучают дифференцирование, а затем – интегрирование. В таком же порядке они объясняются и в данной книге, однако исторически первым было интегрирование. Как я расскажу вам в главе, посвященной интегрированию, данная идея родилась в эпоху Древнего Египта в связи с тем, что тогда для справедливого дележа земель использовался подход, который впоследствии был положен в основу интегрирования.

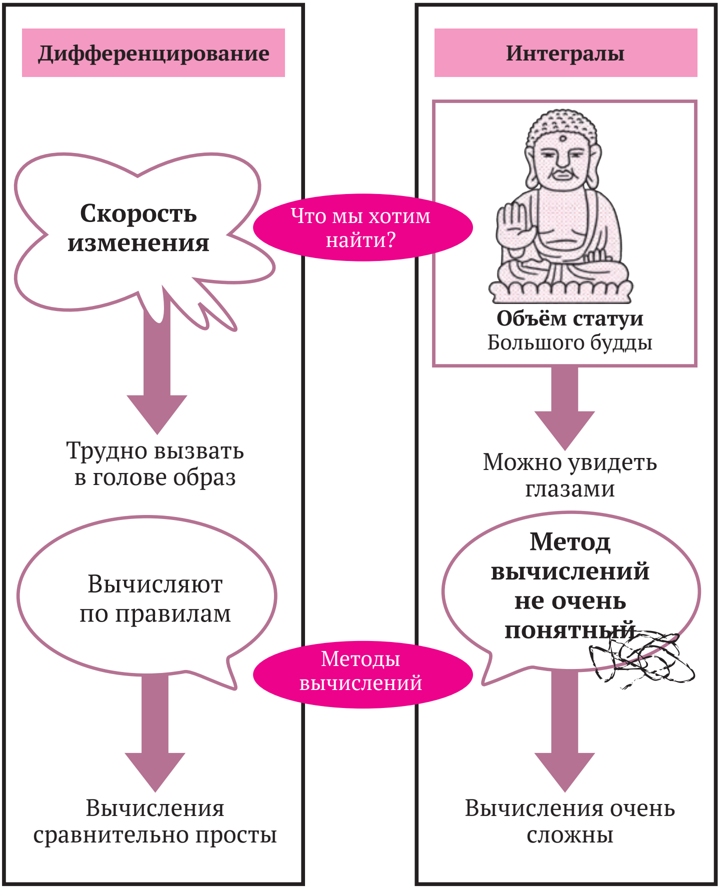
Если вкратце описать идею дифференцирования, можно сказать, что это метод нахождения скорости изменения всего и вся, поэтому вызвать в голове соответствующий образ будет сложнее. Хотя в настоящее время для измерения, например, скорости движения используется такой удобный прибор, как спидометр, но «скорость» саму по себе невозможно увидеть глазами. В противоположность этому, так как интегралы появились с целью нахождения площади, соответствующий образ в голове возникает легко.

Сначала преподавали дифференцирование, так как вычисления в нем проще

Однако почему же тогда в старшей школе нам сначала преподавали дифференцирование? Ответ прост: пусть идея дифференцирования более трудна для понимания и его труднее представить себе наглядно, но зато вычисления проще, чем интегрирование. Кроме того, если использовать методы дифференцирования, то и интегрирование можно будет выполнить относительно просто, что тоже является причиной того, что в старшей школе первым изучается дифференцирование. Таких интегралов, которые можно легко вычислить, не прибегая к методам дифференцирования, существует не так уж много. Однако достойно сожаления то, что у многих людей возникает неприязнь к математике, например, из-за того, что на уроках в старшей школе изучают в основном методы вычислений, и такие уроки становятся им скучны.

Что возникло раньше?

Что легче понять – дифференцирование или интегрирование?



Check! В старшей школе сначала преподают дифференцирование, так как методы вычисления в нем просты по сравнению с интегрированием.

08

Попробуем изучать, разделив на мелкие части

ОБРАЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Дифференцирование – это разделение на мелкие части

До этого момента мы изучали историю возникновения дифференциального и интегрального исчислений, а теперь, в завершение этой главы, давайте представим себе, как выглядят дифференцирование и интегрирование сами по себе. Прежде всего дифференцировать – это значит изучать, разделив на мелкие части. Но что же мы будем делить на мелкие части?

Например, время, например, расстояние. В повседневной жизни мы часто смотрим на экраны, например телевизора, смартфона или компьютера, но каким бы красивым не был этот экран, при большом увеличении он превратился бы в простое скопление светящихся точек.

Обычно точки, расположенные вплотную к какой-либо точке на экране, имеют с этой точкой сходные цвета, и, наверное, точки, расположенные с ними по соседству, тоже имеют сходные цвета. Подобную технологию для уменьшения размеров файла изображения, основанную на использовании того факта, что «во многих случаях сходные цвета соседствуют друг с другом», называют «сжатием изображений».

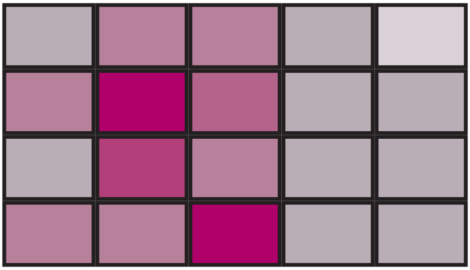
Если соседствующие цвета сильно отличаются, то это – контур

Хотя во многих изображениях «соседствующие точки во многих случаях имеют сходные цвета», если, наоборот, выбирать такие места, в которых «цвета соседствующих точек совершенно отличаются друг от друга», то мы получим технологию под названием «выделение контура». Мы вычисляем разность цветовых значений двух соседних точек и в том случае, если она большая, делаем вывод о том, что «цвет сильно изменился», другими словами, что «здесь находится контур».

Конечно, мы не дифференцировали в строгом смысле этого слова (ведь для того, чтобы продифференцировать в строгом смысле этого слова, необходимо разделить объект на бесконечно малые части), но сама по себе идея дифференцирования заключается в том, чтобы «поделить на мелкие части, проанализировать свойства, а затем осуществить какую-либо обработку».

Разделив на мелкие части, изучаем «различия»

Сжатие с ограничением длины в случае черно-белого изображения



Цветовые коды 12534676
12534677
.
.
.

Если цвета похожи, то их цветовые коды тоже будут похожи.

Если, не запоминая все цветовые коды,
запоминать только «разности» с соседствующими ячейками,
то это даст нам возможность сильного сжатия в объеме.

	+1	+1	±0	—1
+1	+4	+2		
±0	+3			
+1				

09

Рассматриваем, мелко поделив, а затем – собрав воедино

ОБРАЗ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Проинтегрировать – это значит «сначала мелко поделить, а потом собрать воедино»

С другой стороны, про интегрирование мы впоследствии сможем сказать, что «это операция, обратная дифференцированию», а так как дифференцирование – это «деление на мелкие части», обратная этому операция вычисления интеграла будет подразумевать «собрать воедино». Правда, не просто «собрать» – в интегрировании используют также и дифференцирование. Попытайтесь представить это себе на основе нижеприведенного примера.

Например, площадь таких геометрических фигур, как квадрат или круг, можно рассчитать по формулам, которые изучают даже в курсе арифметики, но как нам измерить, например, площадь большой картины, нарисованной на школьном дворе?

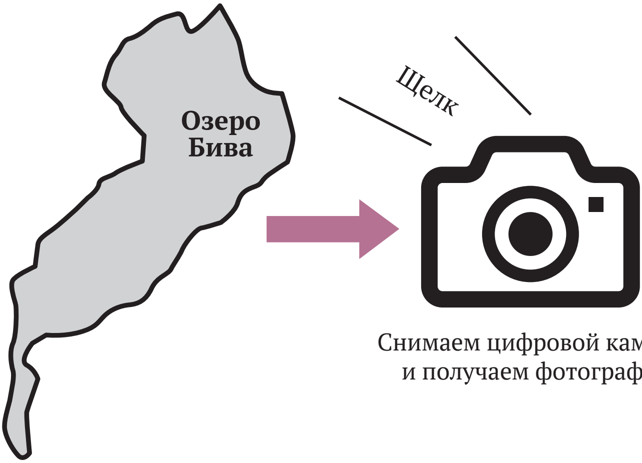
Площадь фигуры, для которой нет формулы

А что, если для измерения площади фигуры, которая не является простой с точки зрения геометрии, использовать, например, цифровую фотографию? Вместе с этой фигурой мы фотографируем также «предмет известных размеров» (например, бумажный квадрат с длиной стороны 10 см). Как и в случае дифференцирования, сначала мы увеличим эту фотографию до таких размеров, чтобы можно было увидеть каждую светящуюся точку. При увеличении до подобных размеров мы сможем определить, находится ли определенная точка фотографии внутри картины или снаружи от нее, не так ли?

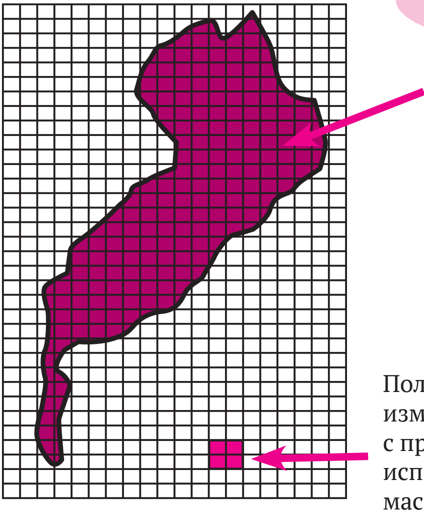
Затем мы подсчитаем количество точек, находящихся внутри картины, и, взяв за основу количество точек предмета известных размеров, который мы сфотографировали вместе с картиной, пересчитаем «количество точек» в «площадь» и таким образом сможем найти площадь неправильной фигуры, не так ли? Можно интуитивно понять также и то, что чем на более мелкие точки поделено изображение, тем выше будет точность нашего измерения. Интегрирование заключается в этой операции «суммирования (подсчета) точек». Смотрите, ведь здесь мы сначала делим на мелкие части, а потом собираем, не так ли?

Сначала делим на мелкие части, а потом «собираем их»

За основу берем предмет известных нам размеров



Снимаем цифровой камерой и получаем фотографию



Создаем измерительную сетку!

Подсчитав «количество точек», можно приближенно вычислить площадь

Важный момент

Чем меньше размер одной ячейки, тем выше точность

Полезно будет сфотографировать измеряемый объект вместе с предметом, который будет использоваться в качестве масштаба.

Column

Что делят на мелкие части при вычислении дифферециалов?

«Путевые карточки» в аниме «Дораэмон» (прим.перев.: сам не смотрел, поэтому за адекватность перевода.) – эта были такие стикеры с указанием направления, с помощью которых можно было заставить игрушку, которая есть у вас под рукой, двигаться в направлениях, соответствующих наклеенным на нее стикерам. В той серии герой (?) доставил сообщение для Сидзу-тян, наклеив на игрушечный грузовик стикеры: «двигаться вперед», «повернуть направо», «двигаться вперед»... Я подумал: «Какой замечательный инструмент!» На самом деле деление «пути к дому Сидзу-тян» на мелкие части: «движение вперед», «поворот направо» и т. д. – соответствует дифференцированию. Как я упоминал, дифференцирование – это деление чего-либо на мелкие части, а в этом аниме на мелкие части делят «путь», заменяя его на «изменения положения в каждый момент времени». И наоборот, сложив в стопку наклейки со стрелками, превратить «изменения положения каждый момент времени» в «путь к дому Сидзу-тян» – это операция, соответствующая интегрированию.

Итак, хотя в настоящее время пока не существует такого волшебного инструмента, с помощью которого можно было бы, «только наклеивая стикеры», заставить двигаться плюшевую игрушку, которая есть у вас под рукой, но с помощью современных технологий вполне возможно, например, прикрепить датчики к человеку и записывать «изменения в каждый момент времени» (изменения скорости и направления его движения) или запрограммировать робота так, чтобы он двигался по определенному пути. Теперь подумаем о том, можно ли добраться до дома Сидзу-тян, используя только эти «изменения в каждый момент времени». Нет, мы не сможем добраться туда, если у нас не будет информации о том, «где находится отправной пункт и каково начальное направление движения». Ответ на этот вопрос – «как обстоят дела в самом начале?» – называется «начальными условиями». Другими словами, с точки зрения количества информации, «начальные условия + изменения в каждый момент времени» будет тождественно «пути», не так ли? В этом случае даже при незначительном нарушении начальных условий произойдет накопление ошибки, и мы, наверное, уже не сможем добраться до дома Сидзу-тян. Таким образом, доставить сообщение для Сидзу-тян с помощью стикеров со стрелками в реальности было бы не таким уж простым занятием.