УДК 512
ББК 22.141я729+22.141я721.6
К58

Кожухов С. Ф.

К58 Алгебраические задачи повышенной сложности для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам / С. Ф. Кожухов, П. И. Совертков. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 256 с. : ил.

ISBN 978-5-00101-281-8

Книга предназначена для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам по математике и иллюстрирует различные методы решения алгебраических задач повышенной сложности.

Каждый раздел пособия содержит необходимый справочный материал и подробно разобранные примеры. Кроме того, в пособие включены задачи для самостоятельной работы учащихся. Ко всем задачам даны ответы и ко многим — решения.

Для учащихся старших классов.

УДК 512
ББК 22.141я729+22.141я721.6

Учебное издание

Кожухов Сергей Федорович
Совертков Петр Игнатьевич

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ И ОЛИМПИАДАМ

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*. Корректор *И. Н. Панкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано в печать 25.02.20. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 20,80. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-00101-281-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для решения олимпиадных задач по математике и задач второй части ЕГЭ требуется как математическая культура (знание определений, формул, признаков, алгоритмов), так и умение решать нестандартные задачи. Это выражается в умении рассмотреть объекты под другим углом зрения, выбрать наиболее рациональный путь решения, выстроить в предложенной задаче с новым сюжетом аналогию с известным методом и предложить свое решение.

Домашняя подготовка к олимпиаде не ограничена во времени, а решение задач на олимпиаде или на ЕГЭ требует быстрого апробирования различных подходов к решению задач, поэтому актуально формирование различных методов решения задачи. В пособии приведены различные методы решения некоторых задач. Набор методов решения можно расширить для многих задач (метод математической индукции, четность и нечетность, использование делимости на некоторое специально подобранное число, арифметика остатков при делении), но во многих задачах этот набор методов специально ограничен. Читателю настоятельно рекомендуется после решения предложенной задачи задуматься о возможности решения этой задачи другим методом.

В пособии алгебраические задачи распределены по темам, хотя это распределение является относительным, так как большинство задач решаются различными методами, а значит, они могли быть распределены другим способом.

Некоторые задачи проще решаются при геометрическом истолковании условия задачи, поэтому иногда используется геометрическая интерпретация и далее задачи решаются методами алгебры и геометрии.

В каждой теме вначале кратко рассмотрены теоретические сведения, потом разобраны несколько примеров и затем приведены задачи для самостоятельного решения. В конце темы приведены дополнительные сведения об использовании алгебры в других разделах математики, физики и техники, а также занимательные задачи, направленные на формирование интереса к математике.

Нумерация задач в пособии двойная. Первое число указывает номер раздела, а второе — номер задачи в разделе.

Критические замечания и пожелания по наиболее рациональному решению предложенных в пособии задач можно направлять авторам по e-mail: psovertkov@mail.ru

Глава 1. **ВОКРУГ ДЕЛИМОСТИ**

1. Использование четности и нечетности чисел

Теоретический материал

Если целое число делится на 2, то оно называется *четным*, а если не делится на 2, то называется *нечетным*. Четное число n имеет вид $n = 2k$, а нечетное число — $n = 2k + 1$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Два целых числа называются *числами одинаковой четности*, если они оба четные или оба нечетные. Два целых числа называются *числами разной четности*, если одно из них четное, а другое нечетное.

Свойства четности и нечетности чисел:

1. Сумма любого количества четных чисел — число четное.
2. Сумма четного и нечетного чисел — число нечетное.
3. Сумма нечетных чисел — число четное, если количество слагаемых четно, и нечетное число, если количество слагаемых нечетно.
4. Сумма и разность любых целых чисел имеют одинаковую четность.
5. Для любых целых чисел a и b числа a и $a + 2b$ имеют одинаковую четность.
6. Для любых целых чисел a и b числа a и $a + 2b + 1$ имеют разную четность.
7. Произведение нескольких целых чисел четно, если хотя бы один из множителей четен.
8. Среди двух последовательных натуральных чисел одно обязательно четно, а другое нечетно.
9. Произведение двух последовательных целых чисел — число четное.
10. Произведение целых чисел нечетно, если все множители нечетны.
11. Числа a и a^n, где $a \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, имеют одинаковую четность.
12. Если a и b — числа одинаковой четности, b и c — числа одинаковой четности, то a и c — числа одинаковой четности.

13. Наибольший общий делитель нечетных чисел является нечетным числом.
14. Наименьшее общее кратное нечетных чисел является нечетным числом.

Решение в целых числах уравнения $ax + by = c$ с целыми коэффициентами $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Если $(x_0;\ y_0)$ — некоторое решение этого уравнения в целых числах, то все решения имеют вид $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$, где $t \in \mathbb{Z}$. В дальнейшем будет предъявлен метод нахождения частного решения $(x_0; y_0)$, а пока оно будет находиться для простейших уравнений простым подбором.

Примеры решения задач

1.1. В ряд выписаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Между ними произвольно расставляют знаки «$+$» и «$-$» и находят сумму. Какие значения может принимать сумма?

Решение. Сумма $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ пяти нечетных чисел является нечетным числом. При замене произвольного знака «$+$» на знак «$-$» четность суммы не изменяется, поэтому, расставляя произвольным образом знаки около пяти нечетных чисел, получим в каждом случае нечетное число.

Расставляя произвольным образом знаки около пяти остальных четных чисел, получим в каждом случае четное число.

Итак, сумма всех чисел при любой расстановке знаков является нечетным числом.

Изменив все расставленные знаки в сумме на противоположные, получим число, противоположное первоначальной сумме, поэтому достаточно изучить только положительные суммы.

Наибольшее значение суммы

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55.$$

Заменив только одно слагаемое в этой сумме на противоположное число с помощью одной смены знака, можно уменьшить сумму 55 последовательно на 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, а значит, получить новые суммы, равные следующим числам: 53, 51, 49, 47, 45, 43, 41, 39, 37, 35.

Если в сумме $1+2+3+4+5+6+7+8+9-10 = 35$ изменить только один раз знак в первых восьми слагаемых, то сумма 35 будет уменьшаться последовательно на числа 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 и примет значения 33, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19.

Если в сумме $1+2+3+4+5+6+7-8+9-10 = 19$ изменить только один раз знак в первых шести слагаемых, то сумма 19 будет уменьшаться последовательно на числа 2, 4, 6, 8, 10, 12 и примет значения 17, 15, 13, 11, 9, 7.

Если в сумме $1+2+3+4+5-6+7-8+9-10=7$ изменить только один раз знак в первых трех слагаемых, то сумма примет значения 5, 3, 1.

Ответ. Все нечетные числа от -55 до 55. □

1.2. Перед каждым из чисел 5, 6, 7, ..., 13 и 16, 17, 18, 19, 20 произвольным образом расставили знаки «плюс» или «минус», после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора добавили каждое из образовавшихся чисел второго набора, а потом все 45 полученных результатов сложили. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить?

Решение. Если взять все числа с плюсами, то максимальная сумма равна

$$5(5+6+\ldots+13)+9(16+17+\ldots+20)=$$
$$=5\left(\frac{(5+13)}{2}\cdot 9\right)+9\left(\frac{(16+20)}{2}\cdot 5\right)=45\cdot 27=1215.$$

При такой расстановке знаков сумма всех чисел нечетна. Число нечетных слагаемых в ней также нечетно, поэтому сумма всех результатов останется нечетной при любой расстановке знаков.

Модуль суммы не может быть равен 0.

Покажем, что сумма всех результатов при некоторой расстановке знаков может оказаться равной 1.

Положим $x=\pm 5\pm 6\pm\ldots\pm 13$ и $y=\pm 16\pm 17\pm\ldots\pm 20$, где в каждой алгебраической сумме подразумевается некоторая фиксированная расстановка знаков.

Тогда нужно решить прежде всего уравнение $5x+9y=1$ в целых числах. Одно решение очевидно: $x=2$, $y=-1$. Все решения этого линейного уравнения имеют вид $x=2-9t$, $y=-1+5t$, $t\in\mathbb{Z}$. Учитывая диапазон сумм $\pm 5\pm 6\pm\ldots\pm 13$ и $\pm 16\pm 17\pm\ldots\pm 20$, выберем решение $x=-25$, $y=14$. Теперь в каждой алгебраической сумме нужно расставить знаки следующим образом:

$$-5-6-7+8+9-10+11-12-13=-25.$$

Поясним способ получения нужной комбинации знаков. Если перед каждым числом поставить «минус», то сумма равна $-5-6-\ldots-13=-81$. Если только перед одним слагаемым изменить знак, то сумма изменится на выражение в два раза большее числа, перед которым меняли знак. Итак, решая уравнение $-81+2z=-25$, получаем $z=28$. Теперь осталось только из некоторых чисел набора составить сумму, равную 28, и поменять перед ними знаки. Например, $28=8+9+11$ и нужная комбинация знаков получена. А можно было выбрать $28=5+11+12$, тогда $5-6-7-8-9-10+11+12-13=-25$.

Для второго набора аналогично получаем

$$16 + 17 - 18 + 19 - 20 = 14.$$

Итак, сумма примет значение 1 при следующей расстановке знаков:

$$5(-5 - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 + 11 - 12 - 13) + 9(16 + 17 - 18 + 19 - 20) = \\ = 5 \cdot (-25) + 9 \cdot 14 = 1.$$

Наименьшая по модулю сумма равна 1. □

1.3. Может ли разность двух чисел вида $n^2 + 2n$, где n — целое число, равняться 2018?

Р е ш е н и е. Для любых чисел такого вида получаем

$$n^2 + 2n - (m^2 + 2m) = 2018 \iff n^2 - m^2 + 2(n - m) = 2018 \iff \\ \iff (n - m)(n + m + 2) = 2 \cdot 1009.$$

Для любых натуральных чисел n и m числа $n - m$ и $n + m$ имеют одинаковую четность, числа $n + m$ и $n + m + 2$ имеют одинаковую четность, следовательно, числа $n - m$ и $n + m + 2$ также имеют одинаковую четность.

Если число $n - m$ четное, то и число $n + m + 2$ четное, а следовательно, левая часть последнего уравнения должна делится на 4, в то время как число $2 \cdot 1009$ не делится на 4.

Если число $n - m$ нечетное, то и число $n + m + 2$ нечетное, а следовательно, левая часть последнего уравнения является нечетным числом, в то время как число $2 \cdot 1009$ — четное число.

Полученные противоречия показывают, что число 2018 нельзя представить в таком виде. □

1.4. Решить уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$ в целых числах.

Р е ш е н и е. Если y — четное число, то левая часть данного уравнения является четным числом, а правая часть — нечетное число. Полученное противоречие показывает, что y — нечетное число.

Пусть $y = 2n + 1$, где $n \in \mathbb{Z}$, тогда $2x^2 - 5(4n^2 + 4n + 1) = 7$, или $x^2 - 10n^2 - 10n = 6$. Из уравнения следует, что x — четное число.

Пусть $x = 2m$, где $m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$4m^2 - 10n^2 - 10n = 6 \iff 2m^2 - 5n^2 - 5n = 3 \iff 2m^2 - 5n(n+1) = 3.$$

Произведение двух последовательных чисел $n(n + 1)$ является четным числом. Следовательно, левая часть последнего уравнения — четное число, а правая часть уравнения — нечетное число. Полученное противоречие показывает, что данное уравнение не имеет решений в целых числах. □

1.5. Решить уравнение $4x^3 - 6y^3 - z^3 = 0$ в целых числах.

Р е ш е н и е. Число $4x^3 - 6y^3$ делится на два, следовательно, и число z^3 должно делиться на 2, т. е. число z должно быть четным.

Пусть $z = 2z_1$, где z_1 — целое число. Тогда $4x^3 - 6y^3 - 8z_1^3 = 0$, или $2x^3 - 3y^3 - 4z_1^3 = 0$.

Из последнего уравнения следует, что y должно быть четным.

Пусть $y = 2y_1$, где y_1 — целое число. Тогда $2x^3 - 24y_1^3 - 4z_1^3 = 0$, или $x^3 - 12y_1^3 - 2z_1^3 = 0$. Отсюда следует, что x должно быть четным.

Пусть $x = 2x_1$, где x_1 — целое число, тогда $8x_1^3 - 12y_1^3 - 2z_1^3 = 0$, или $4x_1^3 - 6y_1^3 - z_1^3 = 0$.

Коэффициенты при неизвестных в последнем уравнении оказались равными коэффициентам при соответствующих переменных в исходном уравнении, т. е. последнее уравнение совпадает с исходным уравнением с точностью до обозначения переменных.

Ход вышеприведенных рассуждений показывает, что числа x, y, z, удовлетворяющие данному уравнению, должны быть четными.

Числа $x_1 = \frac{x}{2}$, $y_1 = \frac{y}{2}$, $z_1 = \frac{z}{2}$ также удовлетворяют этому уравнению, а значит, должны быть четными.

Числа $x_2 = \frac{x_1}{2}$, $y_2 = \frac{y_1}{2}$, $z_2 = \frac{z_1}{2}$ удовлетворяют данному уравнению и должны быть четными и т. д.

Но существуют единственные числа $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, которые удовлетворяют этому условию. $\square$

Задачи

1.6. Можно ли представить число 101 030 в виде разности квадратов двух целых чисел?

1.7. Докажите, что уравнение $x^2 - y^2 = 6$ не имеет решений в целых числах.

1.8. Решите уравнение $4x^3 - y^3 - 2z^2 = 0$ в целых числах.

1.9. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ имеет в целых числах единственное решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

1.10. Перед каждым из чисел 7, 8, ..., 15 и 13, 14, ..., 18 произвольным образом расставили знаки «плюс» или «минус», после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора добавили каждое из образовавшихся чисел второго набора, а потом все 45 полученных результатов сложили. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить?

1.11. Докажите, что число N^5 оканчивается на ту же цифру, что и число N.

Дружественные и совершенные числа

Два натуральных числа называются *дружественными*, если сумма делителей (не считая самого числа) одного из них равна второму числу, и наоборот.

В Греции была известна одна пара дружественных чисел:

$$220 = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \text{ и } 284 = 1 \cdot 2^2 \cdot 71.$$

Суммы делителей этих чисел:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284,$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Пьер Ферма нашел пару $17\,296 = 2^4 \cdot 23 \cdot 47$ и $18\,416 = 2^4 \cdot 1151$.

Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей (не считая самого числа).

Примеры совершенных чисел:

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Если p — простое число, то $2^{p-1}(2^p - 1)$ — совершенное число.

Числа Мерсенна

Числа вида $M_n = 2^n - 1$, где n — натуральное число, называются *числами Мерсенна*. $\{M_n\} = 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, \ldots$.

Теорема. *Если n — составное число, то и число Мерсенна M_n составное.*

Действительно, пусть $n = km$, где k и m — натуральные числа, тогда $M_n = 2^n - 1 = 2^{km} - 1 = (2^k - 1)(2^{k(m-1)} + 2^{k(m-2)} + \ldots + 1)$ — составное число.

Следствие. *Если число Мерсенна M_n простое, то число n также простое (если предположить, что n составное, то по теореме получаем противоречие с тем, что M_n простое).*

Но существуют простые числа n, для которых M_n составное. Например, $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$.

Простое число Мерсенна — это число Мерсенна, являющееся простым. Например, простыми числами являются числа Мерсенна для $n = 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521$.

Числа Ферма

Числа вида $f_n = 2^{2^n} + 1$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, называются *числами Ферма*.

При $n = 0, 1, 2, 3, 4$ получаем *простые числа Ферма*:

$$f_0 = 2^{2^0} + 1 = 3, \quad f_1 = 2^{2^1} + 1 = 5, \quad f_2 = 2^{2^2} + 1 = 17,$$

$$f_3 = 2^{2^3} + 1 = 257, \quad f_4 = 2^{2^4} + 1 = 65\,537.$$

Число Ферма $f_5 = 2^{2^5} + 1$ не является простым.

Рассмотрим применение чисел Ферма в геометрии.

Теорема. *Построение правильного n-угольника линейкой и циркулем возможно тогда и только тогда, когда n имеет разложение на множители вида $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_s$, где m — целое неотрицательное число, а $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа Ферма. Например,*

$$3 = 2^0 \cdot 3; \qquad 2^m = 2^m \cdot 1; \qquad 5 = 2^0 \cdot 5;$$
$$10 = 2^1 \cdot 5; \qquad 17 = 2^0 \cdot 17; \qquad 1028 = 2^2 \cdot 257.$$

Следовательно, правильные многоугольники с числом сторон 3, 2^m ($m \geqslant 2$), 5, 10, 17, 1028 можно построить линейкой и циркулем.

Число 7 простое, но не является простым числом Ферма, поэтому линейкой и циркулем нельзя построить правильный семиугольник.

В разложении $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ простой множитель Ферма 3 входит дважды, поэтому нельзя циркулем и линейкой разделить окружность на 360 равных частей, а значит, нельзя циркулем и линейкой построить угол в 1°.

2. Средние величины чисел

Теоретический материал

Для действительных чисел a и b определены следующие величины:

- $\dfrac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое;
- $\sqrt{ab}$ — среднее геометрическое для положительных чисел;
- $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое;
- $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ — среднее квадратичное;
- $\sqrt[m]{\dfrac{a^m+b^m}{2}}$ — среднее степенное, $m \in \mathbb{N}$.

Для средних величин положительных чисел имеют место неравенства

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b},$$

причем неравенства превращаются в равенства только тогда, когда $a = b$.

Среднее геометрическое иногда называют средним пропорциональным, так как оно является решением пропорции $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$.

Очевидное тождество $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b}}$ означает интересное свойство. Среднее геометрическое двух величин a и b равно среднему пропорциональному между средним арифметическим и средним гармоническим этих же величин.

Среднее арифметическое значение чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно

$$a_{\text{ар}} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Свойства среднего арифметического:

- если все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ изменяются на одно и то же число, то и среднее арифметическое изменится на это число;
- если все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ умножить на одно и то же число, то и среднее арифметическое умножится на это число;
- $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, причем равенства достигаются тогда, когда все числа a_1, $a_2, \ldots, a_n$ равны между собой;
- $a_{\text{ар}} \cdot n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Примеры решения задач

2.1. Доказать, что для неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причем неравенство превращается в равенство только тогда, когда $a = b$.

Решение. Для любых неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$, которое превращается в равенство при $a = b$.

Применим равносильные преобразования:

$$a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

✓ ***Замечание.*** В дальнейшем будет использоваться важное следствие этого утверждения. А именно, если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = 1$. □

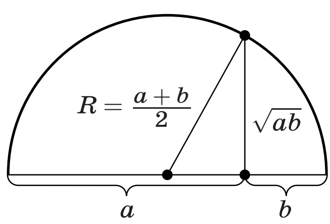

Рис. 1

2.2. Приведем рисунки, демонстрирующие геометрические доказательства неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического значений.

Пусть a и b — длины двух смежных отрезков на прямой, вместе образующих диаметр окружности (рис. 1).

Тогда радиус окружности равен среднему арифметическому отрезков a и b, а перпендикуляр к диаметру из общей точки этих отрезков равен их среднему геометрическому. Если $a \neq b$, то катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы. Если $a = b$, оба этих отрезка совпадают.

Пусть равнобедренные прямоугольные треугольники OAD и OBC с соответствующими катетами $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ ($a \geqslant b$) приложены по гипотенузам (рис. 2). Пусть прямая BC пересекает прямую AD в точке K, тогда площадь прямоугольника $OAKB$ меньше либо равна сумме площадей треугольников OAD и OBC, т. е. $S_{OAKB} \leqslant S_{OAD} + S_{OBC}$ или

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \qquad \square$$

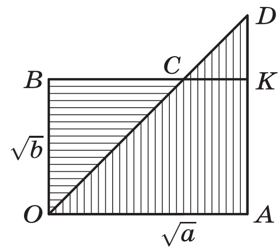

Рис. 2

2.3. Доказать, что среднее арифметическое любых трех неотрицательных чисел a, b и c не меньше их среднего геометрического, т. е. $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$, причем равенство достигается только для случая $a = b = c$.

Решение. Пусть $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, тогда требуется доказать равносильное неравенство $x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz$. Имеет место тождество

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Множитель $x+y+z$ — неотрицательный. Покажем, что и второй множитель неотрицательный.

Для очевидных неравенств $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, $y^2 + z^2 \geqslant 2yz$, $x^2 + z^2 \geqslant 2xz$ найдем их сумму $2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 2(xy + yz + xz)$. Тогда $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geqslant 0$ и требуемое неравенство доказано.

✓ ***Замечание.*** Для неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_n, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, выполняется неравенство Коши

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. $\square$

2.4. Доказать, что если произведение двух положительных чисел есть постоянное число, то их сумма будет наименьшей, если эти числа равны.

Решение. Для любых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$, причем неравенство превращается в равенство только тогда, когда $x = y$. Произведение положительных чисел представим в виде $xy = c^2$, где $c > 0$, тогда $x + y \geqslant 2c$. Неравенство превращается в равенство $x + y = 2c$ только при $x = c$ и $x = c$. Следовательно, сумма является наименьшей, если эти числа равны.

✓ ***Замечание.*** Докажите утверждение, сформулированное в этом примере, другим способом — с помощью производной для функции $f(x) = x + y = x + \dfrac{c^2}{x}$. □

2.5. Доказать, что если сумма двух положительных чисел является постоянным числом, то их произведение будет наибольшим, если эти числа равны.

Решение. Для любых положительных чисел x и y сумму чисел представим в виде $x + y = 2c$, где $c > 0$, тогда $2c \geqslant 2\sqrt{xy}$, или $xy \leqslant c^2$, причем неравенство превращается в равенство только тогда, когда $x = y = c$. Следовательно, произведение является наибольшим, когда эти числа равны. □

2.6. Решить уравнение
$$3^x + 4^x + \left(\tfrac{1}{4}\right)^x + \left(\tfrac{1}{3}\right)^x = 2 + 2\cos^2 x - x^2.$$

Решение. Для любого положительного числа a выполняется неравенство $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$, причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = 1$.

Для любого значения x выполняется неравенство $3^x > 0$, поэтому $3^x + \dfrac{1}{3^x} \geqslant 2$, причем $3^x + \dfrac{1}{3^x} = 2$ тогда и только тогда, когда $3^x = 1$, т. е. $x = 0$.

Аналогично $4^x + \dfrac{1}{4^x} \geqslant 2$, причем $4^x + \dfrac{1}{4^x} = 2$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Следовательно, левая часть неравенства больше или равна 4.

Для правой части справедлива оценка $2 + 2\cos^2 x - x^2 \leqslant 4$, причем неравенство превращается в равенство только при $x = 0$.

Равенство левой и правой частей возможно только при $x = 0$. □

2.7. На доске написано более 59, но менее 70 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно (-6), среднее арифметическое всех положительных из них равно 7, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно (-14).

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

Решение. а) Пусть среди написанных чисел p положительных, n отрицательных и m нулей. Сумма всех чисел равна количеству чисел, умноженному на его среднее арифметическое $-6(p + n + m) = 7p - 14n + 0 \cdot m$, или $7(p - 2n) = -6(p + n + m)$.

Количество всех чисел $p + n + m$ делится на 7. Из данного условия $59 < p + n + m < 70$ следует, что $p + n + m = 63$, т. е. написано 63 числа.

б) Из равенства $7(p-2n) = -6(p+n+m)$ получаем $13p + 6m = 8n$. Для числа нулей имеем оценку $m \geqslant 0$, поэтому $8n \geqslant 13p$, т. е. $n \geqslant \frac{13}{8}p > p$. Отрицательных чисел больше чем положительных.

в) Используя равенство $p+n+m=63$, из $7(p-2n)=-6(p+n+m)$ получаем $7(p-2n)=-6\cdot 63$, или $p-2n=-54$, $p=2n-54$, $p+n=3n-54$. Из неравенства $p+n\leqslant 63$ следует, что $3n-54\leqslant 63$, или $3n\leqslant 117$, $n\leqslant 39$. Отрицательных чисел не более 39.

Приведем пример для 39 отрицательных чисел. Пусть на доске 39 раз написано число (-14) и 24 раза число 7. Среднее арифметическое значение положительных чисел равно 7, среднее арифметическое отрицательных чисел равно (-14). Найдем среднее арифметическое всех чисел: $\frac{24\cdot 7 - 39\cdot 14}{63} = \frac{24-78}{9} = -6$. Составленный набор чисел удовлетворяет всем условиям задачи. □

2.8. Ученики школы написали тест. Ученик за этот тест мог получить целое неотрицательное число баллов. Считается, что ученик сдал тест, если набрал не менее 60 баллов. Чтобы улучшить результаты, каждому участнику тестирования добавили 7 баллов, поэтому количество сдавших тест увеличилось.

а) Мог ли после этого понизиться средний балл участников, не сдавших тест?

б) Мог ли после этого понизиться средний балл участников, не сдавших тест, и при этом средний балл участников, сдавших тест, тоже понизиться?

в) Пусть первоначально средний балл участников, сдавших тест, равен 70, не сдавших тест — 50 баллов, а средний балл всех участников равен 60. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, равен 75, а не сдавших тест — 55. При каком наименьшем числе участников возможна такая ситуация?

Решение. а) Если три ученика набрали 22, 58 и 82 баллов, то средний балл не сдавших тест равен $(22+58):2=40$. После повышения всех результатов тестирования баллы стали 29, 65 и 89. Средний балл несдавших равен 29, и он понизился.

б) Для примера а) средний балл сдавших тест до повышения результатов равен 82, а после добавления баллов средний балл сдавших тест равен $(65+89):2=77$ и он тоже понизился.

в) Пусть в тестировании участвовало n учеников, не сдали тест p учеников, не сдали тест после добавления баллов q учеников. Пусть

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_q \leqslant \ldots \leqslant a_p < a_{p+1} \leqslant \ldots \leqslant a_n$$

— баллы всех участников, тогда

$$a_p < 60, a_{p+1} \geqslant 60, \quad a_q + 7 < 60, a_{q+1} + 7 \geqslant 60.$$

Средний балл до добавления:

- несдавших $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p} = 50$,
- сдавших $\dfrac{a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_n}{n-p} = 70$,
- всех участников $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 60$.

Сумма баллов всех участников равна $50p + 70(n-p) = 60n$, откуда $n = 2p$.

Числа n и p — целые, поэтому n делится на 2.

После добавления баллов найдем общую сумму баллов: $55q + 75(n-q) = 67n$, $2n = 5p$. Число n делится на 5.

Число n делится на 2 и на 5, значит, оно делится на 10. Из текста задачи очевидно, что n — положительное число. Наименьшим положительным числом, кратным 10, является число 10.

Построим пример для 10 участников: 48, 48, 48, 48, 58, 70, 70, 70, 70, 70.

Первоначальные результаты:

- средний балл несдавших $(48 + 48 + 48 + 48 + 58) : 5 = 50$,
- средний балл сдавших — 70,
- средний балл всех учащихся — 60.

Измененные результаты после повышения баллов:

- средний балл несдавших $(55 + 55 + 55 + 55) : 4 = 55$,
- средний балл сдавших $(65 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77) : 6 = 75$.

Все условия задачи для случая в) выполнены.

Ответ. а) Да; б) да; в) 10. □

2.9. На доске было написано 40 натуральных чисел (некоторые могли быть равными), каждое из которых не меньше 15, но не превосходит 56. Среднее арифметическое написанных чисел равно 32. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые оказались после этого меньше 8, с доски стерли.

а) Может ли среднее арифметическое оставшихся чисел быть больше 17?

б) Может ли среднее арифметическое оставшихся чисел быть больше 29 и меньше 30?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение. а) Пусть на доске написано 6 чисел, равных 15, и 34 числа, равных 35. Среднее арифметическое этих чисел равно $\dfrac{6 \cdot 15 + 34 \cdot 35}{40} = 32$.

Среднее арифметическое нового ряда чисел равно $\dfrac{34 \cdot 17{,}5}{34} =$ $= 17{,}5 > 17$.

б) Очевидно, что с доски могли стереть только числа 7,5, которым первоначально соответствовали числа 15. Пусть с доски было стерто m чисел. Пусть сумма первоначальных чисел, отличных от 15, равна S, тогда сумма оставшихся после стирания чисел равна $\frac{S}{2}$. Среднее арифметическое всех первоначальных чисел равно $\frac{S+15m}{40} = 32$, тогда $S = 1280 - 15m$. Среднее арифметическое оставшихся после стирания чисел равно $\frac{S}{2(40-m)}$, тогда

$$29 < \frac{1280-15m}{2(40-m)} < 30,$$
$$2320 - 58m < 1280 - 15m < 2400 - 60m,$$
$$1040 - 58m < -15m < 1120 - 60m,$$
$$\frac{1040}{43} < m < \frac{1120}{45},$$
$$24\frac{8}{43} < m < 24\frac{8}{45}.$$

Такого целого числа m не существует.

в) Найдем наибольшее возможное значение среднего арифметического $a = \frac{1280-15m}{2(40-m)}$ для оставшихся чисел в зависимости от целочисленного аргумента m:

$$a = \frac{1280-15m}{2(40-m)} = \frac{15m-1280}{2m-80} = \frac{15}{2} + \frac{340}{40-m}.$$

Число a будет наибольшим, если дробь $\frac{340}{40-m}$ будет наибольшей, а это произойдет, когда число m будет наибольшим. Но число m не является свободной переменной, так как в данной задаче существует условие на среднее арифметическое первоначального ряда и первоначальные числа не должны быть больше 56.

Итак, $S = 1280 - 15m \leqslant 56(40-m)$, или $41m \leqslant 960$, $m \leqslant 23\frac{17}{41}$.

Рассмотрим целое число 23, тогда $a \leqslant \frac{15}{2} + \frac{340}{40-23} = 27{,}5$.

Приведем пример первоначального набора, для которого среднее арифметическое нового набора могло стать равным 27,5.

Пусть первоначально на доске было написано 23 раза число 15 и 17 раз число 55.

Их среднее арифметическое равно $\frac{23\cdot 15 + 17\cdot 55}{40} = 32$.

Среднее арифметическое оставшихся чисел $\frac{17\cdot 27{,}5}{17} = 27{,}5$.

Ответ. а) Да; б) нет; в) 27,5. □

Задачи

2.10. Докажите неравенства:

а) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$, где числа x и y одного знака;

б) $\sqrt{xy} \geqslant \frac{2xy}{x+y}$, где числа x и y одного знака;

в) если $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi \geqslant 2$;

г) $\log_2 \pi + \log_\pi 2 > 2$;

д) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$;

е) $a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$, где $a, b, c \geqslant 0$.

2.11. Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{121}{x}$, где $x > 0$, не используя производную функции.

2.12. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x}{25 + x^2}$, где $x > 0$, не используя производную функции.

2.13. Найдите наибольшее значение произведения двух положительных чисел, если сумма этих чисел равна 14.

2.14. Используя неравенство Коши, докажите неравенство $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

2.15. Докажите, что из всех прямоугольников с данным периметром P наибольшую площадь имеет квадрат.

2.16. Докажите, что из всех прямоугольников с данной площадью S наименьший периметр имеет квадрат.

2.17. На доске написано более 91, но менее 117 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 17, среднее арифметическое всех положительных из них равно 26, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -13.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

2.18. Ученики школы написали тест. Ученик за этот тест мог получить целое неотрицательное число баллов. Считается, что ученик сдал тест, если набрал не менее 46 баллов. Чтобы улучшить результаты, каждому участнику тестирования добавили 7 баллов, поэтому количество сдавших тест увеличилось.

а) Мог ли после этого понизиться средний балл участников, не сдавших тест?

б) Мог ли после этого понизиться средний балл участников, не сдавших тест, и при этом средний балл участников, сдавших тест, тоже понизиться?

в) Пусть первоначально средний балл участников, сдавших тест, равен 56, не сдавших тест — 31 баллов, а средний балл всех участников равен 46. После добавлении баллов средний балл участников, сдавших тест, равен 61, а не сдавших тест — 33. При каком наименьшем числе участников возможна такая ситуация?

2.19. На доске было написано 440 натуральных чисел (некоторые могли быть равными), каждое из которых не меньше 13, но не превосходит 58. Среднее арифметическое написанных чисел равно 25. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые оказались после этого меньше 7, с доски стерли.

а) Может ли среднее арифметическое оставшихся чисел быть больше 17?

б) Может ли среднее арифметическое оставшихся чисел быть больше 23 и меньше 24?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

2.20. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d

$$\frac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1)}{abcd} \geqslant 81.$$

Гармония дробей, обратных натуральным числам

Бесконечная сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ называется *гармоническим рядом*.

Название объясняется следующим свойством.

Любое слагаемое в этой сумме, начиная со второго, является средним гармоническим значением двух соседних слагаемых, т. е. $\frac{1}{n}$ является средним гармоническим чисел $\frac{1}{n-1}$ и $\frac{1}{n+1}$.

Действительно, используя для чисел a и b определение среднего гармонического $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, найдем среднее гармоническое чисел $\frac{1}{n-1}$ и $\frac{1}{n+1}$:

$$\frac{2}{\dfrac{1}{\frac{1}{n-1}}+\dfrac{1}{\frac{1}{n+1}}}=\frac{2}{(n-1)+(n+1)}=\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}.$$

Сумма $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$ — гармоническое число для n слагаемых в гармоническом ряду. Гармонические числа часто возникают при анализе алгоритмов для компьютерных программ.

Если при неограниченном возрастании номера n, т. е. при $n \to \infty$, последовательность гармонических чисел стремится к определенному числу, то это число и назовем суммой ряда. При возрастании номера n кажется, что дроби уменьшаются и сумма гармонического ряда окажется конечным числом.

Но в действительности это не так. При возрастании номера n гармонические числа медленно возрастают (табл. 1), но могут принять сколь угодно большое значение. Например, $H_{1\,000\,000} \approx 14{,}3927267$.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{7381}{2520}$

Гармонические числа удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}.$$

Любое положительное рациональное число можно записать в виде конечной суммы различных членов гармонического ряда. Действительно, пусть $\frac{m}{n}$ — рациональное число, где $m, n \in \mathbb{N}$, тогда $\frac{m}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m}$. Первое слагаемое в сумме сохраним, а остальные преобразуем, используя тождество $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$. Если слагаемые будут повторяться, то применим снова это тождество до тех пор, пока все слагаемые не окажутся различными.

Пример. Представим число 3 в виде суммы различных членов гармонического ряда. Начнем с равенства $3 = 1 + 1 + 1$.

Для второй единицы суммы получаем

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Для последней единицы суммы имеем

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + \\ + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{42}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{42}\right) = \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) + \\ + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{156}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{56}\right) + \left(\frac{1}{43} + \frac{1}{1806}\right).$$

Итак,

$$3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \\ + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \frac{1}{56} + \frac{1}{156} + \frac{1}{1806}.$$

Этот пример приведен не только для формирования умения представить любую дробь через члены гармонического ряда, но и для демонстрации того факта, что, суммируя члены гармонического ряда, можно получить любое положительное рациональное число. □

Интересные значения тангенса некоторых углов

На рис. 3 построена четверть окружности. Сравните длины получившихся дуг, чтобы убедиться в том, что подписи соответствуют углам, образованными лучами с осью x.

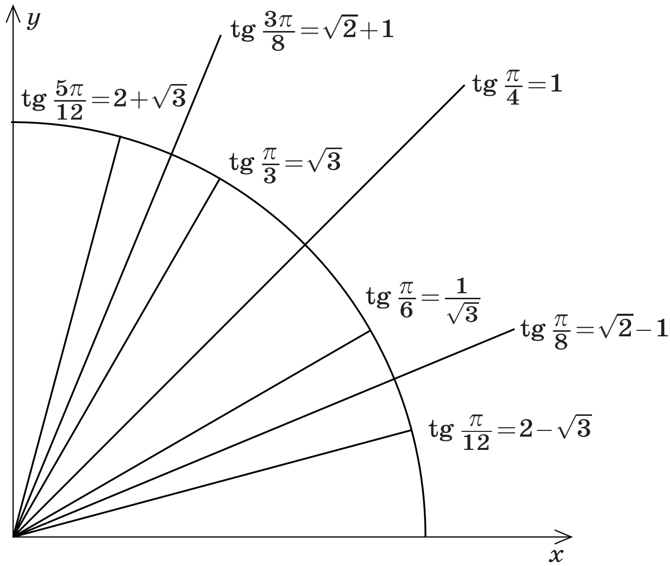

Рис. 3

3. Формулы сокращенного умножения

Теоретический материал

Формулы сокращенного умножения:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,\ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc.$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}).$$

$$(a+b)^n=$$
$$=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^k a^{n-k}b^k+\ldots+nab^{n-1}+b^n,$$

$n\in\mathbb{N}$, — бином Ньютона, $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},\ \text{ если } a^2\geqslant b.$$

Схема Горнера деления многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ *на одночлен* $(x-c)$

В верхнюю строку таблицы (табл. 2) записываем коэффициенты данного многочлена $f(x)$. Коэффициенты многочлена $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}$ для частного находим во второй строке таблицы по указанным стрелками маршрутам.

Таблица 2

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
c	$b_0=a_0$	$\cdot c+$ $b_1=b_0c+a_1$	$\cdot c+$ $b_2=b_1c+a_2$		$b_{n-1}=b_{n-2}c+a_{n-1}$	$\cdot c+$ $f(c)=b_{n-1}c+a_n$

Результат деления

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})(x-c)+f(c),$$

или

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{x-c}=$$
$$=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}+\frac{f(c)}{x-c}\,.$$

Если $f(c)=0$, то многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ делится на $(x-c)$ без остатка, т. е. c — корень многочлена. Если $f(c)\neq 0$, то c не является корнем многочлена.

Иногда разложение многочлена на множители определяется умением увидеть формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Примеры решения задач

3.1. Решить уравнение $x^4=(4x-5)^2$.

Решение.

$$x^4-(4x-5)^2=0 \;\Leftrightarrow\; (x^2-4x+5)(x^2+4x-5)=0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x^2-4x+5=0 \text{ или } x^2+4x-5=0.$$

Уравнение $x^2-4x+5=0$ не имеет корней, а уравнение $x^2+4x-5=0$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=-5$. □

3.2. Разложить на множители $a^4+a^2b^2+b^4$.

Решение.

$$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=$$
$$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab).$$ □

Пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам по математике и иллюстрирует различные методы решения алгебраических задач повышенной сложности. Все задачи разбиты на темы. В каждой теме кратко рассмотрены теоретические сведения, разобраны несколько примеров и приведены задачи для самостоятельного решения. В конце темы приведены дополнительные сведения об использовании алгебры в других разделах математики, физики и техники, а также занимательные задачи, направленные на формирование интереса к математике.