



УДК 51  
ББК 22.1  
П18

Серия «Просто о необычном и сложном»

Matt Parker

THINGS TO MAKE AND DO IN THE FOURTH  
DIMENSION

A Mathematician's Journey Through Narcissistic Numbers, Optimal  
Dating Algorithms, at Least Two Kinds of Infinity, and More

Перевод с английского *Павла Миронова*

Компьютерный дизайн *Виктории Лебедевой*

Печатается с разрешения автора и литературных агентств  
Janklow & Nesbit (UK) LTD. и Prava I Prevodi International  
Literary Agency.

**Паркер, Мэтт.**

П18 Чем заняться в четвертом измерении? Приключения математика в мире бесконечности / Мэтт Паркер ; [перевод с английского П. Миронова]. — Москва : Издательство АСТ, 2020. — 512 с. : ил. — (Просто о необычном и сложном).

ISBN 978-5-17-098981-2

Австралиец Мэтт Паркер (род. 1980) начинал как учитель математики, а потом переехал в Англию и стал рассказывать о своем любимом предмете на канале BBC и в газете *Guardian*, а потом придумал формат публичных лекций, на которых рассказывает о сложных проблемах математики очень понятно и с большой дозой юмора. Выступления Мэтта неизменно пользуются огромным успехом, и он широко известен в мире шоу-бизнеса как «Стенд-ап-математик». Книга, которую вы держите в руках, выдержана в том же стиле: автор умеет говорить просто о сложном, при этом нигде не погрешив против научной точности. И даже читатель, бесконечно далекий от цифр, форм и формул, вряд ли устоит перед неотразимым обаянием математики.

УДК 51  
ББК 22.1

© Matt Parker, 2014  
© Перевод. П. Миронов, 2020  
© Издание на русском языке AST Publishers, 2020



# Оглавление

0. Глава нулевая . . . . .	7
1. Как у вас с цифрами? . . . . .	14
2. Создание фигур . . . . .	36
3. Квадратное — это здорово. . . . .	57
4. Перемещение фигур . . . . .	76
5. Фигуры: теперь в трех измерениях . . . . .	100
6. Занимательная упаковка . . . . .	125
7. Прайм-тайм: время простых. . . . .	148
8. Узел — это не проблема . . . . .	175
9. Графы — это не шутки! . . . . .	196
10. Четвертое измерение . . . . .	224
11. Метод алгоритма. . . . .	250
12. Как построить компьютер . . . . .	280
13. Числа вперемешку . . . . .	306
14. Удивительные фигуры. . . . .	339
15. Измерения более высокого порядка. . . . .	360
16. Хорошие данные не сдаются . . . . .	384
17. Возмутительные числа . . . . .	410
18. К бесконечности и дальше . . . . .	443
N+1. Глава следующая . . . . .	467
Ответы в конце книги . . . . .	472
Благодарность за предоставленные тексты и изображения . . . . .	503



# 0

## Глава нулевая

Оглянитесь по сторонам, и вы наверняка увидите какой-нибудь сосуд, типа пивного стакана или кофейной чашки. Как бы они ни выглядели, длина окружности их дна почти всегда будет больше высоты. Иногда стакан может показаться слишком высоким, однако у стандартного британского стакана для пинты пива длина окружности примерно в 1,8 раза больше высоты. А у стандартного «высокого» стакана, который подают в вездесущих кофейнях *Starbucks*, этот параметр составляет 2,3, хотя компания и не прислушалась к моему совету переименовать этот стакан в «приземистый».

Воспользоваться этим знанием в своих интересах довольно просто. В следующий раз, когда вам доведется быть в пабе, кафе или любом другом заведении, где вы хотели бы получить что-нибудь бесплатно, поспорьте с каким-нибудь другим посетителем о том, что окружность его кружки или чашки больше, чем высота. Если же речь пойдет о кружке с ручкой в пабе или необычно большой чашке в кафе, то считайте, что вам повезло еще сильнее: длина окружности у таких емкостей обычно в три раза превышает высоту — иными словами, вы можете с изрядным пафосом поставить три такие кружки одну на другую и заявить, что длина окружности их основания все равно больше высоты. Но если вы тут же достанете какой-нибудь измерительный прибор типа линейки, это заставит ваших жертв усомниться в спонтанности вашего пари, поэтому

лучше воспользоваться для измерений соломинкой или салфеткой.

Это работает для всех стаканов, за исключением самых тонких стаканов для шампанского. Если вы хотите проверить свой стакан, не вызывая лишних подозрений, попробуйте обхватить его рукой. Ваши указательный и большой пальцы вряд ли коснутся друг друга на противоположной стороне. А теперь попробуйте теми же пальцами измерить высоту стакана. Скорее всего, вам это удастся (или, в худшем случае, вы будете близки к успеху). Это — чрезвычайно наглядная демонстрация того, насколько мала высота стакана по сравнению с длиной окружности его дна.

Я бы хотел, чтобы люди больше знали именно о такой математике — удивляющей, неожиданной и, что важнее всего, позволяющей получать бесплатную выпивку. Цель этой книги состоит в том, чтобы показать людям массу милых и интересных мелочей, связанных с математикой.

Крайне печально, что большинство людей считает, будто математика ограничивается тем, что они изучали в средней школе. На самом деле этот мир гораздо обширнее.

При неправильном преподавании математика действительно может быть невероятно скучной. Зайдите в любую школу на урок математики, и вы почти гарантированно увидите, что большинство учеников, мягко говоря, не воодушевлены происходящим. И проблема состоит в том, что эта чудовищная скука преследует одно поколение школьников за другим.

Но есть и исключения. Некоторые из учащихся любят математику и даже решат посвятить ей всю свою жизнь. Что же такое они разглядели, чего не смогли увидеть все остальные?

Я был одним из таких немногочисленных учеников — за множеством скучных задач я смог увидеть суть математики и логику, лежащую в ее основе.

При этом я отлично понимал, что чувствуют мои товарищи, особенно те из них, кто был талантлив в области спорта. Я боялся упражнений с футбольным мячом так же сильно, как они боялись занятий по математике.

Но я, по крайней мере, мог видеть цель всех этих попыток дриблинга футбольным мячом через препятствия в виде дорожных конусов — они позволяли выстроить базовый набор навыков, крайне полезных для реальной игры в футбол. И я понимал, почему мои спортивные товарищи так ненавидели математику: мне кажется, что совершенно непродуктивно заставлять учеников изучать базовые навыки, необходимые для понимания математики, — а потом не давать им возможности глубже погрузиться в эту область и порезвиться на этом поле.

Все это прекрасно представляли себе дети, любившие математику. Именно по этой причине люди, занимающиеся математикой, способны сделать неплохую карьеру. Если человек работает в области математических исследований, то он не просто занимается сложными операциями по сложению и вычитанию, как может показаться многим. Точно так же профессиональный футболист не ограничивается занятиями по совершенствованию своего дриблинга на поле. Профессиональный математик использует имеющиеся у него навыки и методы для изучения области математики и новых математических открытий. Он ищет необычные фигуры в более высоких измерениях, пытается найти новые типы чисел или изучает мир за пределами бесконечности. Так что дело далеко не ограничивается одной лишь арифметикой.

В этом и состоит секрет математики — по сути, это одна большая игра.

Профессиональные математики занимаются игрой. И цель моей книги заключается в том, чтобы открыть для читателей новый мир и дать им все необходимое для этой игры. Вы и сами вполне можете почувствовать себя мате-

матиком, играющим в премьер-лиге. А если вы из тех ребят, которые любят математику с детства, то у вас имеется множество новых областей для открытий. Все начинается с того, что вы можете и что вы делаете. Вы можете создавать четырехмерные объекты, разбираться с парадоксальными фигурами и завязывать невероятные узлы. Эта книга — великолепный технологический инструмент с идеальной функцией паузы. Если вы хотите остановиться и немного поиграть с математическими задачами, то не отказывайте себе в этом. Книга со всеми своими статичными, материальными страницами будет терпеливо ждать вашего возвращения.

Все самые интересные и необычные элементы передовых технологий являются по своей сути математическими — начиная с обработки информационных массивов в современной медицине и заканчивая уравнениями, помогающими передавать текстовые сообщения с одного мобильного телефона на другой. Однако даже технология, опирающаяся на сложные математические техники, изначально возникла лишь потому, что какому-то математику показалось интересным разобраться с какой-то головоломкой.

В этом и состоит суть математики. Она пытается найти закономерность и логику просто так; можно сказать, что она удовлетворяет наше игровое любопытство. Новые математические открытия могут иметь бесчисленное количество практических применений — от них порой даже зависит наша жизнь, — однако причина появления этих открытий крайне редко бывает столь же практичной.

Говорят, что физик Ричард Фейнман, лауреат Нобелевской премии, сказал о предмете своих занятий так: «Физика — как секс: она может приводить к практическим результатам, но это не основная причина, по которой мы ей занимаемся».

Я также надеюсь, что вам в процессе чтения этой книги не составит особого труда вспомнить школьные уроки

математики. Без этого вы просто не сможете понять все самое интересное. Каждый из нас хотя бы приблизительно помнит, что такое математическая константа «пи» (примерно равная 3,14), а кое-кто может вспомнить, что она описывает отношение диаметра круга к длине его окружности. Именно благодаря числу «пи» мы знаем, что окружность стакана более чем в три раза превышает путь через его середину. Оценивая размер стакана, большинство людей обращает внимание именно на диаметр, забывая умножить эту величину на «пи». Подобные примеры позволяют нам не просто запомнить величину этого соотношения, а протестировать его в условиях реального мира. Как это ни печально, но в школьном курсе математики нас редко учат тому, каким образом с помощью этой науки можно выиграть бесплатную выпивку в баре.

Причина, по которой мы не можем полностью отказаться от школьной математики, состоит в том, что самые интересные вещи в этом мире базируются на значительно менее интересных. Отчасти именно поэтому некоторые люди находят математику столь сложной — они упускают из вида некоторые жизненно важные для понимания шаги и поэтому просто не могут в полной мере понять красоту более высоких идей. Однако все было бы совсем иначе, если бы они усваивали информацию постепенно и в правильном порядке.

В математике практически нет вопросов, не поддающихся довольно простому пониманию, однако порой крайне важно, чтобы вы действовали в оптимальном порядке. Разумеется, для того чтобы добраться до верха высокой лестницы, вам потребуется прилагать большие усилия с первого момента до последнего, однако усилия для преодоления каждой отдельно взятой ступеньки одинаковы. То же самое происходит с математикой. Вы двигаетесь шаг за шагом. Если вы понимаете, что такое простые числа, то вам будет значительно проще изучать простые узлы.

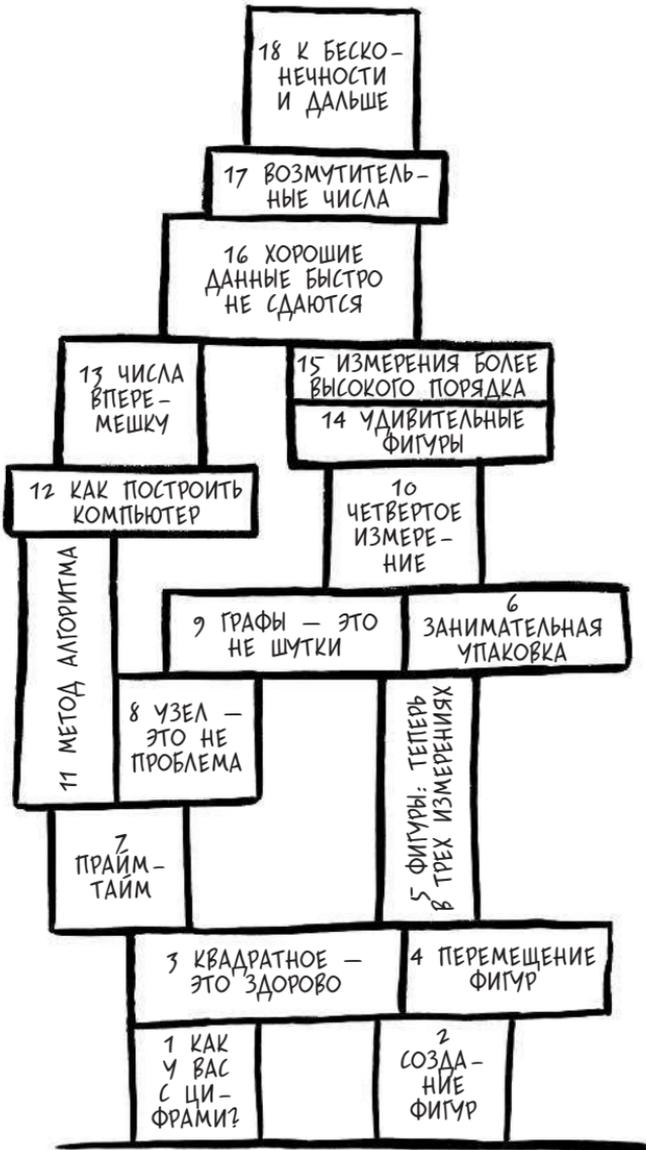
Если вы хорошо разбираетесь с трехмерными фигурами, то вам не составит особого труда разобраться и с четырехмерными. Вы можете представить себе главы этой книги как структуру, в которой каждый элемент покоится на основании, созданном в нескольких предыдущих главах.

Вы можете выбрать свой собственный путь для чтения этой книги. Главное, что нужно сделать, — это убедиться перед началом чтения той или иной главы, что вы ознакомились с предыдущими, на выводах и данных которых основана та, к которой вы приступаете. Книга построена таким образом, что все последующие главы рассматривают всё более продвинутые вопросы, которые редко изучаются в школьных классах. И поначалу это может показаться сложным. Однако если вы двигаетесь по главам в правильном порядке, то к моменту, когда вы достигнете самых удаленных уголков математического мира, у вас уже будет все необходимое для того, чтобы в полной мере насладиться происходящим.

Прежде всего помните, что главная мотивация для вас как покорителя этой непростой структуры может состоять просто в том, чтобы наслаждаться открывающимися перед вами видами.

Математика слишком долго ассоциировалась исключительно с образованием; теперь же нам нужно увидеть в ней объект удовольствия и исследований. Решая одну математическую загадку или головоломку за другой, мы можем довольно быстро оказаться на вершине и наслаждаться математикой, о существовании которой даже не подозревает большинство людей.

Мы обретем способность играть с вещами, не поддающимися нормальной человеческой интуиции. Математика обеспечивает доступ к миру мнимых чисел и фигур, существующих лишь в 196 883 измерениях, и объектам, простирающимся за пределы бесконечности. Мы сможем увидеть множество интересных вещей — начиная от четвертого измерения и заканчивая трансцендентными числами.



Эту книгу можно представить себе в виде башни, в которой одни главы опираются на другие. Так что выбирайте свой путь с должной мудростью.

# 1

## КАК У ВАС С ЦИФРАМИ?



Во времена моих визитов к стоматологу я пытаюсь чем-то занять свой ум и отвлечься от того факта, что ко мне в рот лезет какой-то незнакомец. Обычно я ищу себе какие-то цифровые головоломки, которые могу решать в уме.

Как-то раз на пути к доктору я попросил в твиттере, чтобы мне набросали хороших математических загадок, для решения которых мне не понадобились бы бумага и ручка. Один друг предложил мне расставить девять цифр таким образом, чтобы первые две представляли число, кратное 2, первые три представляли число, кратное 3, и так далее, пока число, состоящее из девяти цифр, не будет кратно 9. У этой задачи есть всего одно решение.

Устроившись в удобном стоматологическом кресле, я довольно быстро понял, что традиционная и скучная последовательность 123456789 не подходит в качестве решения. Хотя 12 делится на 2, а 123 делится на 3, на этом решение заканчивается. Число 1234 не делится на 4.

К моменту завершения зубоврачебных процедур я перебрал множество комбинаций цифр, но, к сожалению, стоматологи редко разрешают пациентам надолго оста-

ваться в кресле и погружаться в размышления. Поэтому я нашел решение уже по дороге домой. Единственным подходившим ответом было число 381654729. (Если бы вам было не нужно использовать все девять цифр и вы также могли бы использовать ноль, то у задачи появляются и другие варианты, например 480006. Благодаря своим свойствам такие числа называются многоделимыми (*polydivisible*). Известно 20456 многоделимых чисел, самое большое из которых — 3608528850368400786036725.)

Интересно отметить, что эта головоломка возможна лишь благодаря тому, что мы в наши дни используем цифры. Если бы вы загадали эту загадку древнему римлянину, то она совершенно никак не помогла бы ему отвлечься во время зубоврачебной процедуры. И дело было не только в том, что римляне использовали другие цифры, такие как V и X. Их цифры имели одно и то же значение вне зависимости от местоположения. V всегда означает 5; X всегда означает 10. С нашими числами все иначе: цифра 2 в составе числа 12 означает 2, но в числе 123 эта же цифра означает 20. К счастью, стоматология во времена Древнего Рима была довольно простой и быстрой.

Когда речь заходит о числовых головоломках, да и о многих других вопросах школьной математики, то я не могу не поделиться с вами одним маленьким секретом. Во многом решение зависит от того, каким образом мы записываем числа. Если в принятой нами числовой системе вы умножаете число 11111111 само на себя, то получаете довольно интересное число 12345678987654321 (в котором все цифры сначала идут по нарастающей от 1 до 9, а затем по убывающей). Это же правило работает для других чисел, состоящих из единиц:  $11111 \times 11111 = 123454321$ ; и  $111 \times 111 = 12321$ . Но стоит вам записать числа несколько иным образом, и закономерность исчезает. Число 111 в римских цифрах выглядит как CXI, а результат CXI  $\times$  CXI выглядит не слишком интересным — XMMCCCXXI.