УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я726
М52

Учебник соответствует Примерной основной образовательной программе основного общего образования и включён в Федеральный перечень

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова,
доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.

М52 Алгебра : 8 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков ; под ред. В. Е. Подольского. — 2-е изд., перераб. — М. : Вентана-Граф, 2016. — 368 с. : ил.

ISBN 978-5-360-07483-0

Учебник предназначен для углублённого изучения алгебры в 8 классе и входит в комплект из трёх книг: «Алгебра. 7 класс», «Алгебра. 8 класс», «Алгебра. 9 класс» (авт. А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков) системы «Алгоритм успеха».

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я726

ISBN 978-5-360-07483-0

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи среднего уровня сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

Задачи, которые можно решать с помощью компьютера

5.5. Задания для устной работы

5.10. Задания, рекомендованные для домашней работы глава

1 Множества и операции над ними

В этой главе вы повторите знакомое вам из курса алгебры 7 класса понятие множества. Расширите свои знания о способах задания множества. Научитесь выполнять операции над множествами, устанавливать взаимно однозначное соответствие между множествами.

§ 1 Повторение и расширение сведений о множествах. Подмножество

Часто в повседневной жизни объединённые по некоторому признаку объекты мы называем *группой*, *объединением*, *коллекцией*, *совокупностью* и т. п. Для этих слов в математике существует синоним **множество.**

Приведём несколько примеров множеств:

- множество учеников вашей школы;
- множество учеников вашей школы, являющихся призёрами школьной олимпиады по математике;
- множество федеральных округов России;
- множество двузначных чисел;
- множество пар чисел $(x; y)$, являющихся решениями уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

Отдельные множества в математике имеют названия:

- множество точек плоскости — **геометрическая фигура;**
- множество точек, обладающих заданным свойством, — **геометрическое место точек (ГМТ);**
- множество значений аргумента функции f — **область определения функции** f, которую обозначают $D(f)$;
- множество значений функции f — **область значений функции** f, которую обозначают $E(f)$.

Множества, элементами которых являются числа, называют **числовыми множествами.** Для некоторых числовых множеств используют специальные обозначения:

- множество натуральных чисел, обозначают буквой $\boldsymbol{N}$;
- множество целых чисел, обозначают буквой $\boldsymbol{Z}$;
- множество рациональных чисел, обозначают буквой $\boldsymbol{Q}$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$ (читают: «a принадлежит множеству A»). Если элемент b не принадлежит множеству A, то пишут $b \notin A$ (читают: «b не принадлежит множеству A»).

Например, $12 \in \boldsymbol{N}$, $-3 \notin \boldsymbol{N}$, $\frac{2}{3} \in \boldsymbol{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{Z}$, $a \in \{a, b, c\}$.

Чаще всего множество задают одним из двух способов.

Первый способ. Множество задают перечислением всех его элементов.

Например, если M — множество натуральных чисел, меньших 5, то пишут $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Второй способ. Указывается **характеристическое свойство** элементов множества, т. е. свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они.

Например, если x — произвольный элемент множества A, которое задано с помощью характеристического свойства его элементов, то пишут $A = \{x \mid \ldots\}$. После вертикальной черты указывают условие, которому должен удовлетворять элемент x, чтобы принадлежать множеству A.

Рассмотрим несколько примеров.

- $\{x \mid x = 3n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$ — множество натуральных чисел, кратных 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множество корней уравнения $x(x^2 - 1) = 0$. Это множество равно множеству $\{-1, 0, 1\}$, которое, в свою очередь, можно задать с помощью другого характеристического свойства: $\{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ |x| < 2\}$. Имеем: $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\} = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ |x| < 2\}$.
- $\{x \mid [x] = 0\}$[1] — множество чисел таких, что $0 \leqslant x < 1$. Понятно, что $\{x \mid [x] = 0\} = \{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$.
- Пусть $(x; y)$ — координаты точки. Тогда множество точек $\{(x; y) \mid y = 2x - 1,\ x$ — любое число$\}$ — прямая, являющаяся графиком функции $y = 2x - 1$.

Вообще для точек координатной плоскости множество $\{(x; y) \mid y = f(x),\ x \in D(f)\}$ — это график функции f.

В геометрии, задавая множество точек с помощью характеристического свойства, мы тем самым задаём ГМТ.

- Если A, B — заданные точки плоскости, а X — произвольная точка этой плоскости, то множество $\{X \mid XA = XB\}$ — серединный перпендикуляр отрезка AB.

Пример 1. Докажите, что множество A всех чётных натуральных чисел равно множеству B чисел, которые можно представить в виде суммы двух нечётных натуральных чисел.

Решение. Пусть $x \in A$. Тогда можно записать, что $x = 2m$, где m — натуральное число. Имеем: $x = 2m = (2m - 1) + 1$. Следовательно, $x \in B$.

---

[1] См. пример 3 § 26 учебника «Алгебра. 7 класс.». авт. А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков (в дальнейшем ссылаясь на этот учебник будем писать «Алгебра. 7 класс»).

Теперь предположим, что $x \in B$. Тогда $x = (2n - 1) + (2k - 1)$, где n и k — натуральные числа. Имеем: $x = 2n - 1 + 2k - 1 = 2(n + k - 1)$. Следовательно, $x \in A$.

Таким образом: если $x \in A$, то $x \in B$, и наоборот, если $x \in B$, то $x \in A$. Отсюда $A = B$. ■

Рассмотрим множество цифр десятичной системы счисления $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Выделим из множества A его элементы, являющиеся чётными цифрами. Получим множество $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, все элементы которого являются элементами множества A.

Определение

Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$ (читают: «множество B — подмножество множества A» или «множество A содержит множество B»).

Рис. 1.1

Рассмотрим примеры:

- $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q} \supset \boldsymbol{N}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$;
- множество учащихся вашего класса является подмножеством множества учащихся вашей школы;
- множество млекопитающих является подмножеством множества позвоночных;
- множество точек луча CB является подмножеством множества точек прямой AB (рис. 1.1).

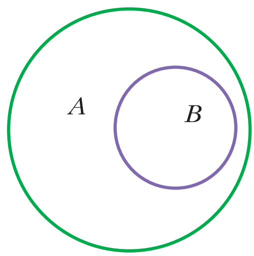

Рис. 1.2

Для иллюстрации соотношений между множествами пользуются схемами, называемыми **диаграммами Эйлера-Венна**.

На рисунке 1.2 изображены множество A (больший круг) и множество B (меньший круг, полностью содержащийся в большем). Эта схема означает, что $B \subset A$ (или $A \supset B$).

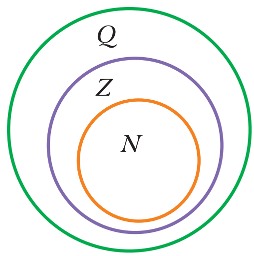

Рис. 1.3

На рисунке 1.3 с помощью диаграмм Эйлера-Венна показано соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$.

Если $B \subset A$, то с помощью рисунка 1.2 можно сделать такие выводы:

1) *для того чтобы элемент x принадлежал множеству A, достаточно, чтобы он принадлежал множеству B*;

2) *для того чтобы элемент x принадлежал множеству B, необходимо, чтобы он принадлежал множеству A*.

Например, если A — множество натуральных чисел, кратных 5, а B — множество натуральных чисел, кратных 10, то очевидно, что $B \subset A$. Поэтому, для того чтобы натуральное число n было кратным 5 ($n \in A$), достаточно, чтобы оно было кратным 10 ($n \in B$). Для того чтобы натуральное число n было кратно 10 ($n \in B$), необходимо, чтобы оно было кратно 5 ($n \in A$).

Из определений подмножества и равенства множеств следует, что *если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$*.

Если в множестве B нет элемента, не принадлежащего множеству A, то множество B является подмножеством множества A. В силу этого соображения пустое множество считают подмножеством любого множества. Действительно, пустое множество не содержит ни одного элемента, следовательно, в нём нет элемента, который не принадлежит данному множеству A. Поэтому для любого множества A справедливо утверждение: $\varnothing \subset A$.

Любое множество A является подмножеством самого себя, т. е. $A \subset A$.

Определение

Если $B \subset A$ и $B \neq A$, то множество B называют собственным подмножеством множества A.

Например, множество $\boldsymbol{Z}$ является собственным подмножеством множества $\boldsymbol{Q}$.

Пример 2. Сколько подмножеств имеет множество $A = \{a, b, c\}$?

Решение. Выпишем все подмножества данного множества: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. Всего получили 8 подмножеств. ■

В параграфе 35 будет доказано, что *количество подмножеств n-элементного множества равно 2^n*.

?

1. Приведите примеры множеств.

2. Как обозначают множество и его элементы?

3. Как обозначают множества натуральных, целых и рациональных чисел?

4. Как записать, что элемент a принадлежит множеству A? Не принадлежит множеству A?
5. Какие существуют способы задания множеств?
6. Какое множество называют подмножеством данного множества?
7. Как наглядно иллюстрируют соотношение между множествами?
8. Какое множество является подмножеством любого множества?
9. Какое множество называют собственным подмножеством данного множества?

Упражнения

1.1. Как называют множество львов, подчиняющихся одному вожаку?

1.2. Назовите какое-нибудь множество военнослужащих, объединённых в одно подразделение.

1.3. Поставьте вместо звёздочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получилось верное утверждение:
1) $5 * \boldsymbol{N}$; 3) $-5 * \boldsymbol{Q}$; 5) $3{,}14 * \boldsymbol{Q}$;
2) $0 * \boldsymbol{N}$; 4) $-\frac{1}{2} * \boldsymbol{Z}$; 6) $\pi * \boldsymbol{Q}$.

1.4. Дана функция $f(x) = x^2 + 1$. Поставьте вместо звёздочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получилось верное утверждение:
1) $3 * D(f)$; 3) $\frac{1}{2} * E(f)$;
2) $0 * D(f)$; 4) $1{,}01 * E(f)$.

1.5. Задайте с помощью перечисления элементов множество:
1) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ x^2 - 1 = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ |x| < 3\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ x \leqslant 15,\ x = 7k,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$.

1.6. Задайте с помощью перечисления элементов множество:
1) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ x(2|x| - 1) = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ -3 \leqslant x < 2\}$.

1.7. Пусть O — данная точка плоскости. Что представляет собой множество точек M этой плоскости:
1) $\{M \mid OM = 3$ см$\}$; 3) $\{M \mid OM \leqslant 5$ см$\}$?
2) $\{M \mid OM > 5$ см$\}$;

1.8. Пусть A, B, C — три данные точки плоскости. Что представляет собой множество точек M этой плоскости $\{M \mid MA = MB = MC\}$?

1.9. Назовите какие-нибудь геометрические фигуры, которые являются подмножествами множества точек прямой.

1.10. Назовите какие-нибудь геометрические фигуры, которые являются подмножествами множества точек круга.

1.11. Пусть A — множество букв слова «координата». Множество букв какого из слов является подмножеством множества A:

1) нора;	5) нитки;	9) ордината;
2) трактор;	6) корка;	10) дорога;
3) картина;	7) дар;	11) корона;
4) крокодил;	8) подарок;	12) кардинал?

1.12. Пусть A — множество цифр числа 1958. Является ли множество цифр числа x подмножеством множества A, если:

1) $x = 98$;	3) $x = 519$;	5) $x = 195\ 888$;
2) $x = 9510$;	4) $x = 5858$;	6) $x = 91\ 258$?

1.13. Пусть $A \neq \varnothing$. Какие два разных подмножества имеет множество A?

1.14. Равны ли множества A и B:

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$;
3) $A = \{(0; 1)\}$, $B = \{(1; 0)\}$;
4) $A = \{x \mid x \leqslant 3, x \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \boldsymbol{Z}\}$;
5) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно 2 и $3\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно $6\}$;
6) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x \leqslant 15, x = 19k, k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, 3 < x < 4\}$?

1.15. Укажите равные множества:

$A = \{x \mid x = 6n - 3, n \in \boldsymbol{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 3n, n \in \boldsymbol{N}\}$;
$C = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно 3 и не кратно $2\}$;
$D = \{x \mid x = 6n + 3, n \in \boldsymbol{N}\}$.

1.16. Какие из следующих множеств равны пустому множеству:

1) $A = \{x \mid x \neq x\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, \frac{1}{2}x - 2 = 0\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, |x| < 1\}$;
4) $D = \{x \mid 3x^4 + 5x^2 + 7 = 0\}$;
5) $E = \{x \mid x > |x|\}$?

1.17. Какое из следующих утверждений верно:

1) $\{a\} \in \{a, b\}$;	3) $a \subset \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$;	4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

1.18. Докажите, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

1.19. Расположите данные множества в такой последовательности, чтобы каждое следующее множество было подмножеством предыдущего:

1) A — множество восьмиклассников вашей школы;
B — множество восьмиклассников вашей школы, которые учатся в математическом классе;

C — множество учащихся вашей школы, которые не младше 10 лет;
D — множество учащихся 8 класса, являющихся призёрами районной математической олимпиады;
2) A — множество всех млекопитающих;
B — множество всех псовых;
C — множество всех позвоночных;
D — множество всех волков;
E — множество всех хищных млекопитающих.

1.20. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера соотношение между множествами:
1) A — множество всех неотрицательных рациональных чисел;
$B = \{0\}$;
$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел;
2) $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел;
A — множество натуральных чисел, кратных 6;
B — множество натуральных чисел, кратных 3.

1.21. Запишите с помощью символа $\subset$ соотношение между множествами:
$A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$; $C = \{x \mid x = 10n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 50n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$; $D = \{x \mid x = 5n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$.

1.22. Какое из утверждений $A \subset B$ или $B \subset A$ является верным для данных множеств:
$A = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \boldsymbol{N}\}$; $B = \{x \mid x = 8n + 2,\ n \in \boldsymbol{N}\}$?

1.23. Даны множества $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, являющиеся всеми собственными подмножествами некоторого множества A. Запишите множество A.

1.24. Назовите все подмножества множества $\{1, 2\}$.

1.25. На языке «необходимо и достаточно» опишите принадлежность элемента x множествам A, B и C (рис. 1.4).

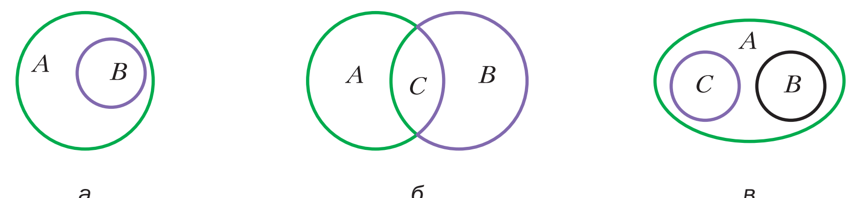

Рис. 1.4

1.26. Вместо многоточия поставьте одно из слов — «необходимо» или «достаточно»:
1) для того чтобы треугольник был равносторонним, ..., чтобы два его угла были равны;

2) для того чтобы число делилось нацело на 3, ..., чтобы оно делилось нацело на 9;

3) для того чтобы последняя цифра десятичной записи натурального числа была 0, ..., чтобы число было кратно 5.

1.27. Известно, что для любого множества B множество A является его подмножеством. Найдите множество A.

1.28. Приведите пример такого одноэлементного множества, что его элемент является одновременно подмножеством данного множества.

1.29. Докажите, что $\{x \mid x = 3k - 1, k \in \boldsymbol{Z}\} = \{x \mid x = 3n + 2, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

1.30. Докажите, что $\{x \mid x = 4n - 1, n \in \boldsymbol{Z}\} = \{x \mid x = 4m + 3, m \in \boldsymbol{Z}\}$.

Упражнения для повторения

1.31. Известно, что $4x^2y = 3$. Найдите значение выражения:

1) $6x^2y$; 2) $4x^4y^2$; 3) $-3x^6y^3$.

1.32. Задайте формулой функцию, если значения функции:

1) противоположны соответствующим значениям аргумента;

2) равны удвоенным соответствующим значениям аргумента;

3) на 2 меньше квадратов соответствующих значений аргумента.

§ 2 Операции над множествами

Пусть A — множество решений уравнения $x + y = 5$, а B — множество решений уравнения $x - y = 3$. Тогда множество C решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

состоит из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B. В этом случае говорят, что множество C является **пересечением множеств** A и B.

Определение

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$. Из определения следует, что

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Легко убедиться, что решением рассмотренной выше системы является пара (4; 1). Этот факт можно записать так:

$\{(x; y) \mid x + y = 5\} \cap \{(x; y) \mid x - y = 3\} = \{(4; 1)\}$.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество, т. е. $A \cap B = \varnothing$. Также заметим, что $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Из определения пересечения двух множеств следует, что *если* $A \subset B$, *то* $A \cap B = A$, в частности, *если* $B = A$, *то* $A \cap A = A$.

Например:

$\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}$,

$\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}$.

Пересечение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На рисунке 2.1 заштрихованная фигура изображает множество $A \cap B$.

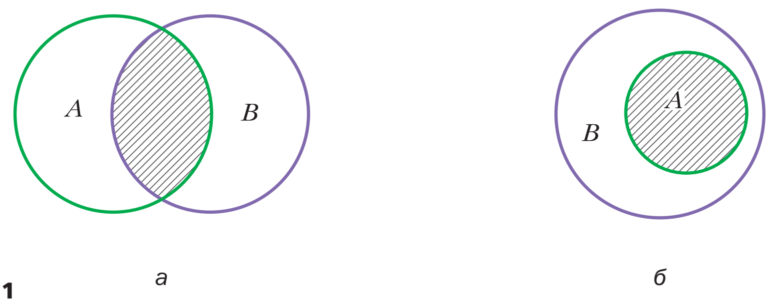

Рис. 2.1

Для того чтобы решить уравнение $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, надо решить каждое из уравнений $x^2 - x = 0$ и $x^2 - 1 = 0$.

Имеем: $A = \{0, 1\}$ — множество корней первого уравнения, $B = \{-1, 1\}$ — множество корней второго уравнения. Множество $C = \{-1, 0, 1\}$, каждый элемент которого принадлежит или множеству A, или множеству B, является множеством корней исходного уравнения. Множество C называют **объединением множеств** A и B.

Определение

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$. Из определения следует, что

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Если требуется найти объединение множеств решений уравнений, то говорят, что требуется решить **совокупность уравнений**.

Совокупность записывают с помощью квадратной скобки. Так, чтобы решить уравнение $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, нужно решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - x = 0, \\ &x^2 - 1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \cup \varnothing = A$.

Из определения объединения двух множеств следует, что *если* $A \subset B$, *то* $A \cup B = B$, в частности, *если* $B = A$, *то* $A \cup A = A$.

Объединение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На рисунке 2.2 заштрихованная фигура изображает множество $A \cup B$.

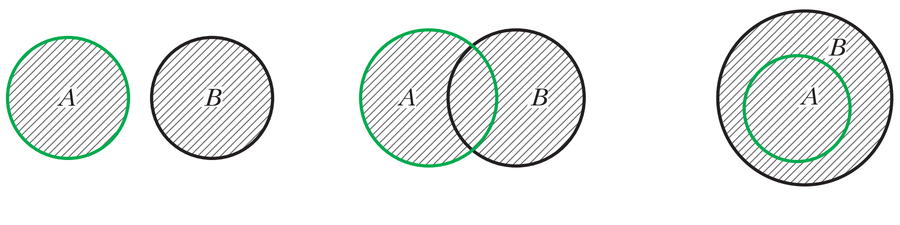

Рис. 2.2

Часто приходится рассматривать пересечение и объединение трёх и более множеств.

Пересечение множеств A, B и C — это множество всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B, и множеству C (рис. 2.3).

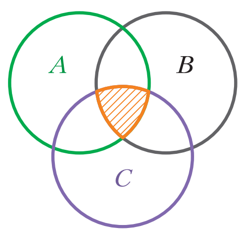

Рис. 2.3

Например, чтобы решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$$

надо найти пересечение трёх множеств: $\{(x;\, y) \mid x + y = 5\}$, $\{(x;\, y) \mid x - y = 3\}$ и $\{(x;\, y) \mid x^2 + y^2 = 17\}$.

Объединение множеств A, B и C — это множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B, или множеству C (рис. 2.4).

Например, объединение множеств остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников — это множество всех треугольников.

Если из множества $\boldsymbol{Z}$ исключить множество $\boldsymbol{N}$, то получим множество целых неположительных чисел. Оно состоит из всех элементов множества $\boldsymbol{Z}$, которые не принадлежат множеству $\boldsymbol{N}$. Говорят, что множество целых неположительных чисел является **разностью множеств $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{N}$**.

Определение

Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B.

Разность множеств A и B обозначают так: $A \setminus B$. Из определения следует, что

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \setminus \varnothing = A$.

Из определения разности двух множеств следует, что *если* $A \subset B$, *то* $A \setminus B = \varnothing$, в частности, *если* $B = A$, *то* $A \setminus A = \varnothing$.

Разность множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На рисунке 2.5 заштрихованная фигура изображает множество $A \setminus B$.

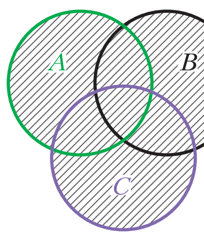

Рис. 2.4

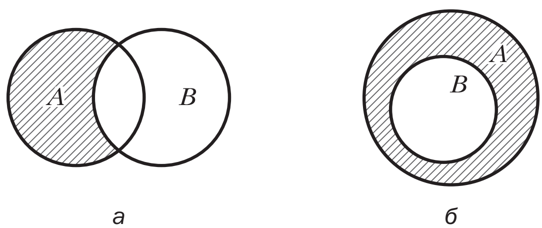

Рис. 2.5

Пример 1. Найдите пересечение множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x = 5k,\ k \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;

2) $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x \mid x \leqslant 4\}$;

3) $A = \{x \mid x = 2m,\ m \in \boldsymbol{N}\}$, B — множество простых чисел.

Решение.

1) A — множество натуральных чисел, кратных 5.

B — множество натуральных чисел, кратных 3.

Тогда множество $A \cap B$ состоит из всех натуральных чисел, кратных 5 и 3 одновременно, т. е. из всех натуральных чисел, кратных 15. Следовательно, $A \cap B = \{x \mid x = 15m,\ m \in \boldsymbol{N}\}$.

2) $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leqslant 4\}$.

3) A — множество чётных натуральных чисел. Поскольку множество простых чисел содержит только одно чётное число (число 2), то $A \cap B = \{2\}$. ■

Пример 2. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;

2) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 1,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;

3) $A = \{X \mid OX < 3\}$, $B = \{X \mid OX = 3\}$, где O и X — точки плоскости, O — данная точка.

Решение.

1) A — множество нечётных натуральных чисел, B — множество чётных натуральных чисел. Тогда $A \cup B$ — это множество натуральных чисел, т. е. $A \cup B = \boldsymbol{N}$.

2) A — множество нечётных натуральных чисел. Элементами множества B являются только нечётные числа. Следовательно, $B \subset A$. Тогда $A \cup B = A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \boldsymbol{N}\}$.

3) Очевидно, что $A \cup B = \{X \mid OX \leqslant 3\}$. Следовательно, $A \cup B$ — это круг с центром в точке O и радиусом 3. ■

Пример 3. Найдите разность множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n + 1,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;

2) $A = \{X \mid OX \leqslant 3\}$, $B = \{X \mid OX < 3\}$, где O и X — точки плоскости, O — данная точка.

Решение.

1) A — множество нечётных натуральных чисел, B — множество нечётных натуральных чисел, больших 1. Тогда $A \setminus B = \{1\}$.

2) Очевидно, что $A \setminus B = \{X \mid OX = 3\}$. Следовательно, $A \setminus B$ — это окружность с центром O и радиусом 3. ■

?

1. Что называют пересечением двух множеств?

2. Что называют объединением двух множеств?

3. Как находят пересечение трёх и более множеств? Объединение трёх и более множеств?

4. Что называют разностью двух множеств?

5. Как с помощью диаграмм Эйлера иллюстрируют пересечение, объединение и разность двух множеств?

Упражнения

2.1. Найдите пересечение множеств цифр, используемых в записи чисел:
1) 555 288 и 82 223; 2) 470 713 и 400 007.

2.2. Пусть A — множество двузначных чисел, B — множество простых чисел. Принадлежит ли множеству $A \cap B$ число: 5; 7; 11; 31; 57; 96?

2.3. Найдите множество общих делителей чисел 30 и 45.

2.4. Найдите объединение множеств цифр, используемых в записи чисел:
1) 27 288 и 56 383; 2) 55 555 и 777 777.

2.5. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$; 3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

2.6. Найдите пересечение множеств A и B, если:
1) A — множество равнобедренных треугольников, B — множество равносторонних треугольников;
2) A — множество прямоугольных треугольников, B — множество равносторонних треугольников;
3) A — множество двузначных чисел, B — множество натуральных чисел, кратных 19;
4) A — множество однозначных чисел, B — множество простых чисел.

2.7. Найдите пересечение множеств A и B, если:
1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x > 11\}$;
2) $A = \{x \mid x = 4n, n \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n, n \in \boldsymbol{N}\}$;
3) $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$.

2.8. Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением была геометрическая фигура: 1) отрезок; 2) точка; 3) треугольник; 4) пятиугольник; 5) шестиугольник.

2.9. Какие фигуры могут быть пересечением двух лучей, лежащих на одной прямой?

2.10. Известно, что для любого множества B выполняется равенство $A \cap B = A$. Найдите множество A.

2.11. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$; 3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$; 4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?