Содержание

Глава 6

Паросочетания, свадьбы и теорема Менгера

"А еще они рисовали... всякую всячину... все, что начинается на М...[1]"
Льюис Кэрролл (Lewis Carroll)

Результаты этой главы по сравнению с результатами других глав носят более комбинаторный характер, хотя, как мы увидим, они тесно связаны с теорией графов. Мы начнем с обсуждения теоремы Холла "о свадьбах" в различных контекстах. В разделе 6.2 мы докажем теорему Менгера (введенную в разделе 2.1) о количестве непересекающихся путей, соединяющих данную пару вершин в графе или ориентированном графе, а в разделе 6.3 дадим альтернативную формулировку теоремы Менгера, известную как теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе, которая имеет важное значение в связи с задачей о потоках в сетях. Более детальное изложение этих вопросов можно найти в [39] и [22].

6.1. Теорема Холла "о свадьбах"

Теорема о свадьбах, доказанная Филиппом Холлом (Philip Hall) в 1935 году, отвечает на следующий вопрос, известный как **задача о свадьбах** (marriage problem).

Если имеется конечное множество девушек, каждая из которых дружит с несколькими юношами, то при каких условиях все девушки смогут выйти замуж за юношей так, чтобы каждая выходила замуж за того юношу, с которым дружит?

Например, если есть четыре девушки, $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, и пять юношей, $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, между которыми имеются дружеские отношения, показанные ниже, то возможное решение состоит в том, что g_1 выходит замуж за b_4, g_2 выходит замуж за b_1, g_3 выходит замуж за b_3 и g_4 выходит замуж за b_2.

[1] Перевод Н.М. Демуровой. Эпиграф из *"Приключений Алисы в стране чудес"* связан с тем, что в оригинале глава называется "*Matching, marriage and Menger's theorem*". — *Примеч. пер.*

Девушка	*Юноши, с которыми дружит девушка*		
g_1	b_1	b_4	b_5
g_2	b_1		
g_3	b_2	b_3	b_4
g_4	b_2	b_4	

Эта проблема может быть представлена графически, если взять двудольный граф G, в котором множество вершин разбивается на два непересекающихся множества, V_1 и V_2, соответствующих девушкам и юношам, и каждое ребро соединяет девушку с юношей, с которым она дружит. На рис. 6.1 показан граф G, соответствующий показанной выше ситуации.

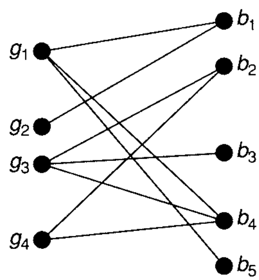

Рис. 6.1

В более общей постановке **совершенное паросочетание** (complete matching) из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ представляет собой взаимно-однозначное соответствие между вершинами V_1 и некоторыми вершинами V_2, такое, что соответствующие вершины соединены ребрами. Задача о свадьбах может быть выражена в теоретико-графических терминах следующим образом.

Если $G = G(V_1, V_2)$ представляет собой двудольный граф, то при каких условиях существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2 в G?

Возвращаясь к брачной терминологии, заметим, что при любом решении задачи о свадьбах.

Для всех целых k, удовлетворяющих условию $1 \le k \le m$, где m — общее количество девушек, каждое множество из k девушек должно коллективно дружить как минимум с k юношами.

Это условие необходимо, потому что, если оно не выполнено для некоторого множества из k девушек, выдать замуж всех девушек в этом множестве не удастся. Мы называем это условие **условием свадьбы** (marriage condition).

Как это ни удивительно, условие свадьбы оказывается и достаточным: в этом и заключается теорема Холла о свадьбах. Хотя данная теорема сформулирована в легкомысленных терминах брака, она применима и к более серьезным проблемам. Например, она дает необходимое и достаточное условие решения задачи о назначениях заданий, в которой задания назначаются работникам с различной квалификацией. Пример такой задачи приведен в упражнении 6.2. Из-за важности этой теоремы мы приводим три ее доказательства; первое дано с П. Халмосом (P. Halmos) и Х.Э. Воганом (H.E. Vauhhan).

Теорема 6.1 (Холл, 1935). Необходимое и достаточное условие решения задачи о свадьбах состоит в том, чтобы любое множество из k девушек в совокупности дружило по меньшей мере с k юношами, $1 \leq k \leq m$.

Доказательство. Как отмечалось выше, это условие является необходимым.

Чтобы доказать, что это условие является достаточным, используем индукцию по m. Теорема, очевидно, верна при $m = 1$.

Предположим теперь, что есть m девушек, и предположим, что теорема верна, если количество девушек *меньше* m. Следует рассмотреть два случая.

1) Если каждые k девушек (где $k < m$) в совокупности дружат по меньшей мере с $k + 1$ юношей, так что условие всегда верно с одним "запасным" юношей, то мы берем любую девушку и выдаем ее замуж за любого юношу, с которым она дружит. Тогда исходное условие остается истинным для $m - 1$ девушек, которые могут выйти замуж по индукции, завершая доказательство данного случая.
2) Если имеется множество из k девушек (где $k < m$), которые в совокупности дружат ровно с k юношами, то эти k девушек могут вступать в брак по индукции с k юношами, оставляя $m - k$ девушек ожидать замужества. Но любое множество из h из этих $m - k$ девушек, где $h \leq m - k$, должно дружить по меньшей мере с h из оставшихся юношей, так как в противном случае эти h девушек вместе с упомянутым выше множеством из k девушек в совокупности будут дружить менее чем с $h + k$ юношами, что противоречит нашему предположению. Отсюда следует, что исходное условие применимо и к $m - k$ девушкам. Поэтому по индукции они могут вступить в брак таким образом, чтобы все были счастливы, а доказательство — завершено. ■

Мы также можем сформулировать теорему Холла на языке совершенных паросочетаний в двудольном графе. Напомним, что количество элементов в множестве S обозначается как $|S|$.

Следствие 6.2. Пусть $G = G(V_1, V_2)$ — двудольный граф, и для каждого подмножества A множества V_1 обозначим через $\varphi(A)$ множество вершин V_2, смежных по меньшей мере с одной вершиной из A. Тогда совершенное паросочетание из V_1 в V_2 существует тогда и только тогда, когда $|A| \le |\varphi(A)|$ для каждого подмножества A множества V_1.

Доказательство. Доказательство данного следствия представляет собой перевод на язык графов доказательства, приведенного выше. ■

Теория трансверсалей

Теперь мы представим альтернативное доказательство теоремы Холла на языке теории трансверсалей (transversal theory). Мы оставляем читателям в качестве упражнения перевод этого доказательства с использованием терминологии паросочетаний или брака.

Вспомним из приведенного выше примера (см. рис. 6.1), что множества юношей, являющихся друзьями для четырех девушек, представляют собой $\{b_1, b_4, b_5\}$, $\{b_1\}$, $\{b_2, b_3, b_4\}$ и $\{b_2, b_4\}$ и что решение задачи о свадьбах получается путем нахождения четырех разных b, по одному из каждого из показанных множеств юношей; такое решение приведено на рис. 6.2.

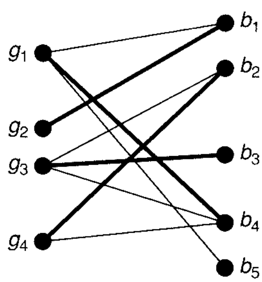

Рис. 6.2

В общем случае, если E — непустое конечное множество и если $\mathcal{F} = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ представляет собой семейство (не обязательно различных) непустых подмножеств E, то **трансверсаль** (transversal) $\mathcal{F}$ является множеством из m различных элементов E, по одному из каждого множества S_i; таким образом, $\{b_4, b_1, b_3, b_2\}$ является трансверсалью семейства

$$\mathcal{F} = \left(\{b_1, b_4, b_5\}, \{b_1\}, \{b_2, b_3, b_4\}, \{b_2, b_4\}\right).$$

Теперь предположим, что $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, и пусть

$$S_1 = S_2 = \{1,2\}, \quad S_3 = S_4 = \{2,3\}, \quad S_5 = \{1,4,5,6\}.$$

В таком случае невозможно найти пять различных элементов E, по одному от каждого подмножества S_i; иными словами, семейство $\mathcal{F} = (S_1, S_2, \ldots, S_5)$ не имеет трансверсали. Тем не менее подсемейство $\mathcal{F}' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$ имеет трансверсаль, например $\{1, 2, 3, 4\}$. Мы называем трансверсаль подсемейства семейства $\mathcal{F}$ **частичной трансверсалью** (partial transversal) $\mathcal{F}$. В нашем примере $\mathcal{F}$ имеет несколько частичных трансверсалей, таких как $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 5\}$ и Ø. Обратите внимание, что любое подмножество частичной трансверсали является частичной трансверсалью.

Естественно спросить, при каких условиях данное семейство подмножеств множества имеет трансверсаль. Связь между этой задачей и задачей о свадьбах легко увидеть, если E — множество юношей, а S_i — множество юношей, дружащих с девушкой g_i, $1 \le i \le m$. В этом случае трансверсаль — это просто множество из m юношей, в котором каждый юноша дружит с соответствующей девушкой. Отсюда следует, что теорема 6.1 дает также достаточное условие наличия трансверсали для данного семейства множеств.

Теперь переформулируем теорему Холла в соответствующем виде и предоставим альтернативное доказательство, найденное Р. Радо (R. Rado). Прелесть этого доказательства заключается в том, что, по сути, оно состоит только из одного шага, в отличие от доказательства Халмоса–Вогана, которое включает в себя два отдельных случая (однако рассматриваемое доказательство очень трудно выразить на интуитивном и привлекательном языке бракосочетаний).

Теорема 6.3. Пусть E — непустое конечное множество и пусть $\mathcal{F} = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ — семейство непустых подмножеств E. Тогда $\mathcal{F}$ имеет трансверсаль тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств S_i содержит как минимум k элементов для $1 \le k \le m$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна.

Чтобы доказать достаточность, покажем, что если одно из подмножеств (скажем, S_1) содержит больше чем один элемент, то мы можем удалить элемент из S_1 без изменения условия. Повторяя эту процедуру, мы в конечном итоге сводим задачу к случаю, когда каждое подмножество содержит только один элемент, и доказательство становится тривиальным.

Осталось только показать обоснованность этой "процедуры сведения". Итак, предположим, что S_1 содержит элементы x и y, удаление любого из которых делает условие неверным. Тогда имеются подмножества A и B из $\{2, 3, \ldots, m\}$, обладающие тем свойством, что $|P| \le |A|$, а также $|Q| \le |B|$, где

$$P = \bigcup_{j \in A} S_j \cup \left(S_1 - \{x\}\right) \text{ и } Q = \bigcup_{j \in B} S_j \cup \left(S_1 - \{y\}\right).$$

Тогда

$$|P \cup Q| = \left| \bigcup_{j \in A \cup B} S_j \cup S_1 \right| \text{ и } |P \cap Q| \geq \left| \bigcup_{j \in A \cap B} S_j \right|.$$

Отсюда вытекает необходимое противоречие, поскольку

$$\begin{aligned} |A| + |B| &\geq |P| + |Q| = |P \cup Q| + |P \cap Q| \geq \\ &\geq \left| \bigcup_{j \in A \cup B} S_j \cup S_1 \right| + \left| \bigcup_{j \in A \cap B} S_j \right| \geq \\ &\geq \left(|A \cup B| + 1 \right) + |A \cap B| = \qquad (\text{по условию Холла}) \\ &= |A| + |B| + 1. \end{aligned}$$

■

Прежде чем перейти к некоторым приложениям теоремы Холла, сформулируем следствие, которое дает нам условие, при котором *как минимум* t девушек могут выйти замуж за юношей, с которыми они дружат.

Следствие 6.4. Если E и $\mathcal{F}$ определены так же, как и раньше, то $\mathcal{F}$ имеет частичную трансверсаль размером t тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств S_i содержит не менее $k+t-m$ элементов.

Набросок доказательства. Необходимый результат следует из применения теоремы 6.1 к семейству

$$\mathcal{F}' = \left(S_1 \cup D, S_2 \cup D, \ldots, S_m \cup D \right),$$

где D — любое множество, не пересекающееся с E и содержащее $m-t$ элементов. Обратите внимание, что $\mathcal{F}$ имеет частичную трансверсаль размером t тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}'$ имеет трансверсаль. ■

Упражнения

6.1[s]. Предположим, что три юноши, a, b и c, дружат с четырьмя девушками, w, x, y и z, следующим образом.

Юноша	*Девушки, с которыми дружит юноша*		
a	w	y	z
b	x	z	
c	x	y	

1) Изобразите двудольный граф, соответствующий этой таблице отношений.

2) Найдите пять различных решений соответствующей задачи о свадьбах.

3) Проверьте условие свадьбы для этой задачи.

6.2. Строительный подрядчик ищет каменщика, плотника, сантехника и слесаря и получает пять претендентов: одного — на должность каменщика, одного — на плотника, одного — на каменщика и сантехника и двух — на сантехника и слесаря.

1) Изобразите соответствующий двудольный граф.

2) Проверьте, выполняется ли условие свадьбы для этой задачи.

Могут ли на все должности быть приняты работники соответствующей квалификации?

6.3[s]. Объясните, почему граф на рис. 6.3 не имеет совершенного паросочетания из V_1 в V_2. Найдите множество вершин в V_1, для которых не выполняется условие свадьбы.

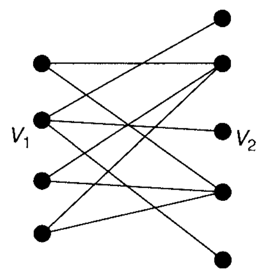

Рис. 6.3

6.4. (“Задача о гареме”.) Пусть B — множество юношей и пусть каждый юноша в B желает жениться более чем на одной из своих подружек. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы задача о гареме имела решение. (*Подсказка*: замените каждого юношу несколькими идентичными копиями самого себя, а затем воспользуйтесь теоремой Холла.)

6.5. Докажите, что если $G = G(V_1, V_2)$ — двудольный граф, в котором степень каждой вершины в V_1 не меньше, чем степень каждой вершины в V_2, то G имеет совершенное паросочетание.

6.6[s]. Решите, какие из следующих семейств подмножеств $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеют трансверсали; найдите трансверсаль для семейств, у которых она есть; и перечислите все частичные трансверсали у тех семейств, у которых нет трансверсали:

1) ({1}, {2, 3}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4, 5});
2) ({1, 2}, {2, 3}, {4, 5}, {4, 5});
3) ({1, 3}, {2, 3}, {1, 2}, {3});
4) ({1, 3, 4), {1, 4, 5}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5}).

6.7. Повторите упражнение 6.6 для множества {G, R, A, P, H, S}:
1) ({R}, {R, G}, {A, P}, {A, H}, {R, A});
2) ({R}, {R, G}, {A, G}, {A, R});
3) ({G, R}, {R, P, H}, {G, S}, {R, H});
4) ({R, P}, {R, P}, {R, G}, {R}).

6.8[s]. Пусть E — множество букв в слове *MATROIDS*. Покажите, что семейство подмножеств E

(STAR, ROAD, MOAT, RIOT, RIDS, DAMS, MIST)

имеет ровно восемь трансверсалей.

6.9[s]. Пусть E представляет собой множество {1, 2, …, 50}. Сколько различных трансверсалей имеет семейство ({1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, …, {50,1})?

6.10. Проверьте утверждение следствия 6.4 для $E = \{a, b, c, d, e\}$ и $\mathcal{F} = (\{a, c, e\}, \{b, d\}, \{b, d\}, \{b, d\})$.

6.11[s]. Пусть $E = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \bigstar\}$ и $\mathcal{F} = (\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\clubsuit\}, \{\clubsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \bigstar\})$.
1) Перечислите все подсемейства $\mathcal{F}$, для которых не выполняется условие свадьбы.
2) Проверьте утверждение следствия 6.4.

6.12. Перепишите
1) утверждение следствия 6.4 с использованием терминологии бракосочетаний;
2) доказательство Халмоса–Вогана теоремы Холла на языке теории трансверсалей.

6.2. Теорема Менгера

Теперь мы обратимся к теореме, которая тесно связана с теоремой Холла и имеет далеко идущие практические применения. Эта теорема, открытая К. Менгером (K. Menger), касается числа путей, соединяющих две заданные вершины, v и w, в графе G. Нас может интересовать максимальное количество путей от v до w, никакие два из которых не имеют общих ребер, — такие пути называются **реберно-непересекающимися путями**. Может также возникнуть вопрос о максимальном количестве путей от v до w, никакие два из которых не имеют общей вершины (кроме v и w), — такие пути называются **вершинно-непересекающимися путями**. Например, на графе на рис. 6.4 имеется четыре реберно-непересекающихся и два вершинно-непересекающихся пути из v в w.

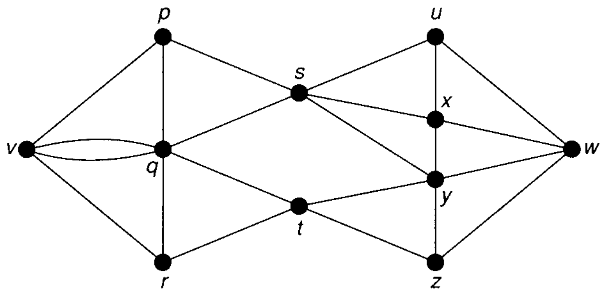

Рис. 6.4

Для исследования этих задач нужны некоторые дополнительные определения. Будем считать, что G — связный граф, а v и w — разные вершины G. ***vw*-разделяющим множеством** (*vw*-disconnecting set) G будем называть множество E ребер G, такое, что каждый путь от v до w включает в себя ребро из E; обратите внимание, что всякое *vw*-разделяющее множество является разделяющим множеством G. Аналогично ***vw*-отделяющим множеством** (*vw*-separating set) графа G является множество S вершин, отличных от v и w, таких, что каждый путь из v в w проходит через вершину из S. На рис. 6.4 множества

$$E_1 = \{ps, qs, ty, tz\} \text{ и } E_2 = \{uw, xw, yw, zw\}$$

являются *vw*-разделяющими множествами, а

$$V_1 = \{s, t\} \text{ и } V_2 = \{p, q, y, z\}$$

являются *vw*-отделяющими множествами.

Чтобы посчитать реберно-непересекающиеся пути от v до w, заметим сначала, что если E представляет собой *vw*-разделяющее множество с k ребрами, то число реберно-непересекающихся путей не может превышать k, так как в противном случае некоторое ребро из E будет включено более чем в один путь. Фактически, если E является *vw*-разделяющим множеством минимально возможного размера, число реберно-непересекающихся путей равно k и в каждом таком пути имеется ровно одно ребро из E. Этот результат известен как реберная форма **теоремы Менгера**; в этой форме она была впервые доказана Л.Р. Фордом (мл.) (L.R. Ford, Jr.) и Д.Р. Фалкерсоном (D.R. Fulkerson) в 1955 году.

Теорема 6.5. Максимальное количество реберно-непересекающихся путей, соединяющих две различные вершины, v и w, связного графа, равно минимальному числу ребер в vw-разделяющем множестве.

Примечание. Приведенное доказательство неконструктивно, поскольку не дает систематического способа получения k реберно-непересекающихся путей или даже поиска самого значения k. Алгоритм, который может это сделать, приведен в следующем разделе.

Доказательство. Как мы только что указали, максимальное число реберно-непересекающихся путей, соединяющих v и w, не может превышать минимальное количество ребер в vw-разделяющем множестве. Используем индукцию по числу ребер графа G, чтобы доказать, что эти числа равны. При $m = 1$ результат тривиален.

Итак, предположим, что число ребер графа G равно m и что теорема верна для всех графов с менее чем m ребрами. Следует рассмотреть два случая.

1) Предположим сначала, что существует vw-разделяющее множество E минимального размера k, такое, что не все его ребра инцидентны v и не все инцидентны w. Например, на рис. 6.4 вышеупомянутое множество E_1 является таким vw-разделяющим множеством. Удаление из G ребер из E оставляет два непересекающихся подграфа, V и W, содержащих вершины v и w соответственно.

   Теперь определим два новых графа, G_1 и G_2, следующим образом: G_1 получается из G путем стягивания каждого ребра V (т.е. сжиманием V до v), а G_2 получается аналогичным стягиванием каждого ребра W. Графы G_1 и G_2, полученные из графа на рис. 6.4, показаны на рис. 6.5; пунктирными линиями обозначены ребра E_1. Поскольку каждый из подграфов G_1 и G_2 содержит меньше ребер, чем G, и так как E является vw-разделяющим множеством минимального размера и для G_1, и для G_2, то по гипотезе индукции в G_1 имеется k реберно-непересекающихся путей от v до w; аналогичное утверждение верно и для G_2. Комбинируя очевидным образом эти пути, получаем k реберно-непересекающихся путей в G.

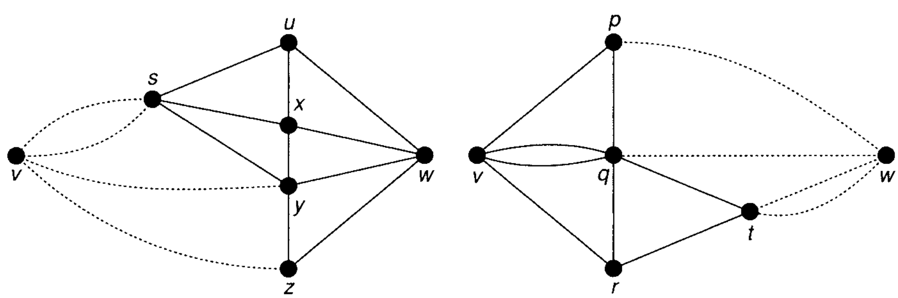

Рис. 6.5

2) Теперь допустим, что каждое vw-разделяющее множество минимального размера k состоит только из ребер, которые все инцидентны v, либо все инцидентны w. Например, на рис. 6.4 таким vw-разделяющим множеством является множество E_2. Без потери общности можно считать, что каждое ребро графа G содержится в некотором vw-разделяющем множестве размером k, так как в противном случае удаление соответствующего ребра не влияет на величину k и мы можем воспользоваться гипотезой индукции для получения k реберно-непересекающихся путей. Если P — произвольный путь от v до w, то он должен состоять либо из единственного ребра, либо из двух ребер, и поэтому может содержать не более одного ребра из любого vw-разделяющего множества размером k. Удаляя из G ребра, принадлежащие P, мы получим граф, содержащий по крайней мере $k-1$ реберно-непересекающихся путей (согласно гипотезе индукции). Вместе с P эти пути дают искомые k путей в G. ■

Обратимся теперь к другой задаче, упомянутой в начале этого раздела, — к нахождению числа вершинно-непересекающихся путей из v в w. Именно эту задачу и решал Менгер, хотя обычно его имя связывают с обеими теоремами — и 6.5, и 6.6. Доказательство теоремы 6.5 при этом претерпевает лишь незначительные изменения, состоящие главным образом в замене таких терминов, как "реберно-непересекающийся" и "инцидентный", терминами "вершинно-непересекающийся" и "смежный". Сформулируем теперь вершинную форму теоремы Менгера, а ее доказательство предоставим читателю.

Теорема 6.6 (Менгер, 1927). Максимальное число вершинно-непересекающихся путей, соединяющих две различные несмежные вершины, v и w, графа, равно минимальному числу вершин в vw-отделяющем множестве.

Из теорем 6.5 и 6.6 можно немедленно вывести условия (с которыми мы встречались в разделе 2.1) того, что граф является k-связным и k-реберно-связным.

Следствие 6.7. Граф G является k-реберно-связным тогда и только тогда, когда любые две различные вершины G соединяются по крайней мере k реберно-непересекающимися путями.

Следствие 6.8. Граф G с как минимум $k+1$ вершиной является k-связным тогда и только тогда, когда любые две различные вершины G соединяются по крайней мере k вершинно-непересекающимися путями.

Приведенное выше обсуждение может быть изменено таким образом, чтобы дать число "дугонепересекающихся" путей из вершины v в вершину w в ориентированном графе. Приведенная теорема аналогична теореме 6.5, и ее доказательство выполняется почти дословно так же. Обратите внимание, что в ориентированном графе vw-разделяющее множество представляет собой множество дуг A, такое, что каждый путь из v в w включает дугу из множества A.

Теорема 6.9. Максимальное количество дугонепересекающихся путей из вершины v в вершину w в ориентированном графе равно минимальному количеству дуг в vw-разделяющем множестве.

Например, если ориентированный граф имеет вид, показанный на рис. 6.6, то имеется шесть дугонепересекающихся путей от v до w. Соответствующее vw-разделяющее множество состоит из дуг vz, xz, yz (дважды) и xw (дважды).

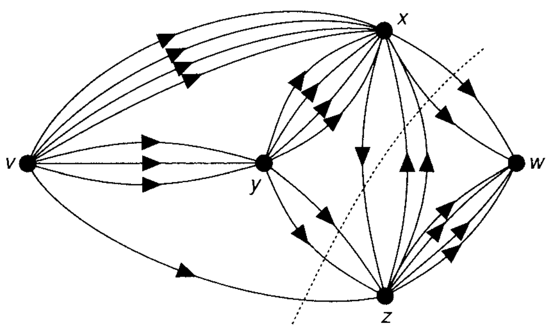

Рис. 6.6

Очевидно, что эти диаграммы по мере увеличения количества дуг, соединяющих пары вершин, становятся очень громоздкими. Чтобы справиться с этой неприятностью, мы изображаем только одну дугу и указываем рядом с ней необходимое количество дуг (рис. 6.7). Это, казалось бы, невинное замечание имеет фундаментальное значение для изучения сетевых потоков, которые мы обсудим в следующем разделе.

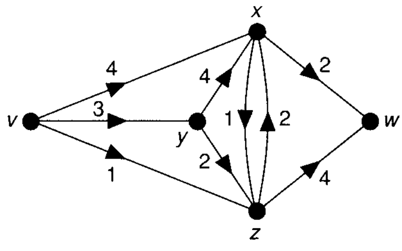

Рис. 6.7

Этот раздел мы завершим выводом теоремы Холла из теоремы Менгера. Мы также докажем версию теоремы Холла, представленную в следствии 6.2.

Теорема 6.10. Теорема Холла вытекает из теоремы Менгера.

Доказательство. Пусть $G = G(V_1, V_2)$ — двудольный граф. Мы должны доказать, что если $|A| \leq |\varphi(A)|$ для каждого подмножества A множества V_1, то существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2.

Для этого мы применим вершинную форму теоремы Менгера (теорема 6.6) к графу, полученному присоединением к G вершины v, смежной с каждой вершиной в V_1 (девушки), и вершины w, смежной с каждой вершиной в V_2 (юноши) (рис. 6.8).

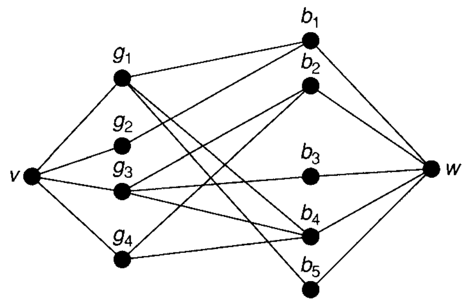

Рис. 6.8

Поскольку совершенное паросочетание из V_1 в V_2 существует тогда и только тогда, когда количество вершинно-непересекающихся путей из v в w равно числу вершин в V_1 (скажем, k), достаточно показать, что каждое vw-отделяющее множество имеет не менее k вершин. Итак, пусть S представляет собой vw-отделяющее множество, состоящее из подмножества A множества V_1 и подмножества B множества V_2. Поскольку $A \cup B$ является vw-отделяющим множеством, ни одно ребро не может соединить вершину $V_1 - A$ с вершиной $V_2 - B$, а следовательно, $\varphi(V_1 - A) \subseteq B$. Отсюда следует, что

$$|V_1 - A| \leq |\varphi(V_1 - A)| \leq |B|,$$

и, таким образом, $|S| = |A| + |B| \geq |V_1| = k$, что и требовалось. ■

Упражнения

6.13[s]. Проверьте теоремы 6.5 и 6.6 для графов на рис. 6.9.

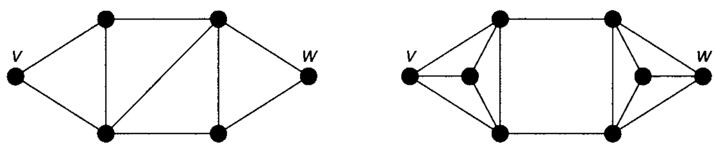

Рис. 6.9

6.14. Проверьте теоремы 6.5 и 6.6 для графа Петерсена в случае, когда v и w 1) смежные вершины; 2) не являются смежными вершинами.

6.15[s]. Проверьте следствие 6.7 для каждого из следующих графов:

1) W_5; 2) $K_{3,4}$; 3) Q_3.

6.16. Проверьте следствие 6.7 для каждого из следующих графов:

1) $K_{3,5}$; 2) $K_{3,3,3}$; 3) граф октаэдра.

6.17. Проверьте теорему 6.9 для каждого ориентированного графа на рис. 6.10.

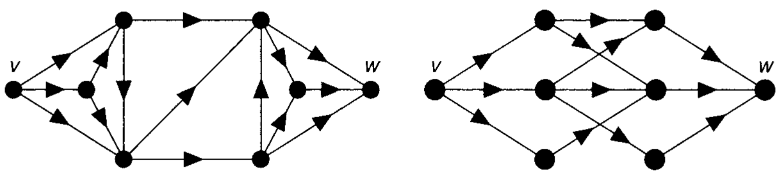

Рис. 6.10

6.3. Сетевые потоки

Современное общество в значительной степени управляется сетями — транспортными, сетями связи и т.д., — и фундаментальное значение приобретает математический анализ таких сетей. В этом разделе мы проиллюстрируем, что анализ сетей, по сути, представляет собой изучение ориентированных графов.

Производитель компьютеров хочет отправить свои компьютеры на данный рынок. Существуют различные каналы, по которым могут быть отправлены ящики с компьютерами, как показано на рис. 6.11, где вершина v представляет производителя, а w — рынок. Число рядом с каждой дугой указывает максимальную нагрузку, которая может проходить через соответствующий канал. Производитель желает найти максимальное количество ящиков с компьютерами, которые можно отправить по сети, не превышая разрешенную пропускную способность каждого канала.

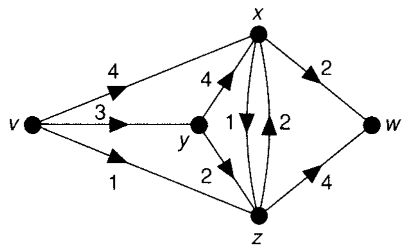

Рис. 6.11

Рисунок 6.11 позволяет описывать и другие ситуации. Например, если каждая дуга представляет улицу с односторонним движением, а число рядом с дугой — максимально возможный поток движения по этой улице в транспортных средствах в час, то мы можем запросить максимально возможное количество транспортных средств, которые смогут проехать из v в w в течение одного часа. В качестве альтернативы, если на схеме изображена электрическая цепь, мы можем определить максимальный ток, который можно безопасно пропустить эту через цепь, при указанных предельных токах, при превышении которых выгорают отдельные провода.

Используя эти примеры в качестве исходной точки, определим **сеть** (network) N как взвешенный ориентированный граф, т.е. ориентированный граф, каждой дуге a которого присваивается неотрицательное вещественное число $c(a)$, именуемое ее **пропускной способностью** (capacity). **Полустепень исхода** (out-degree) $\text{outdeg}(x)$ вершины x является суммой пропускных способностей дуг вида xz; **полустепень захода** $\text{indeg}(x)$ определяется аналогично. Например, в сети, показанной на рис. 6.11, $\text{outdeg}(v) = 8$ и $\text{indeg}(x) = 10$. Обратите внимание, что орлемма о рукопожатиях теперь принимает следующий вид.

Сумма полустепеней исхода всех вершин в сети равна сумме их полустепеней захода.

Вершина с нулевой полустепенью захода является **источником** (source), а вершина с нулевой полустепенью исхода является **стоком** (sink); например, на рис. 6.11 единственный источник — v, а w — единственный сток. Обычно мы предполагаем, что любая сеть имеет ровно один источник v и один сток w. Общий случай нескольких источников и стоков, соответствующих более чем одному производителю и рынку, легко сводится к этому частному случаю (см. упражнение 6.22).

Поток (flow) в сети представляет собой функцию φ, которая назначает каждой дуге неотрицательное действительное число $\varphi(a)$, называемое **потоком через *a***, таким образом, чтобы

1) для каждой дуги a выполнялось условие $\varphi(a) \le c(a)$;
2) полустепени исхода и захода каждой вершины, отличной от v и w, были одинаковы.

Таким образом, поток в любой дуге не может превышать ее пропускную способность, а "общий поток", входящий в каждую вершину, кроме v и w, равен "общему потоку" из нее. На рис. 6.12 показан возможный поток в сети на рис. 6.11. **Нулевым потоком** (zero flow) является поток, в котором поток в каждой дуге равен нулю; любой иной поток является **ненулевым потоком** (non-zero flow). Дуга a, для которой $\varphi(a)=c(a)$, называется **насыщенной** (saturated). На рис. 6.12 дуги vz, xz, yz, xw и zw насыщены, а остальные — **ненасыщены** (unsaturated).

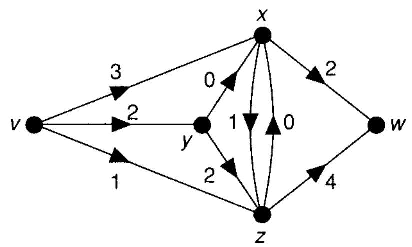

Рис. 6.12

Из орлеммы о рукопожатиях следует, что сумма потоков в дугах, выходящих из v, равна сумме потоков в дугах, входящих в w; эта сумма называется **величиной потока** (value of the flow). Исходя из приведенных выше примеров нас интересуют в основном потоки, значение которых максимально велико, — **максимальные потоки** (maximum flow). Вы можете легко проверить, что поток на рис. 6.12 является максимальным для сети на рис. 6.11 и что его величина равна 6. Хотя сеть может иметь несколько разных максимальных потоков, величины всех их должны быть равны.

Исследование максимальных потоков в сети тесно связано с понятием **разреза** (cut), который представляет собой множество дуг A, таких, что каждый путь от v до w включает в себя дугу из A. Таким образом, разрез в сети является vw-разделяющим множеством в соответствующем ориентированном графе D. **Пропускная способность разреза** представляет собой сумму пропускных способностей дуг в разрезе. Мы занимаемся в основном теми разрезами, пропускная способность которых настолько мала, насколько это возможно, — так называемыми **минимальными разрезами** (minimum cut). На рис. 6.13 минимальный разрез состоит из дуг vz, xz, yz и xw, но не дуги zx; пропускная способность этого разреза равна $2+2+2=6$.

Обратите внимание, что величина любого потока не может превышать пропускную способность любого разреза, так что величина любого *максимального* потока не может превышать пропускной способности любого *минимального* разреза. Оказывается, эти два значения всегда равны. Этот результат, известный как **теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе**, доказан

Л.Р. Фордом (мл.) и Д.Р. Фалкерсоном в 1955 году. Мы представим два доказательства. Первое показывает, что данная теорема, по сути, эквивалентна теореме Менгера; второе же является прямым доказательством теоремы.

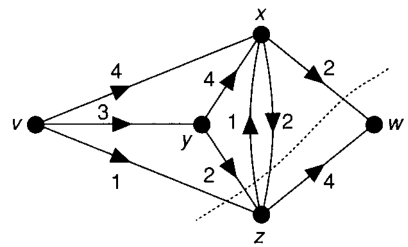

Рис. 6.13

Теорема 6.11 (теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе). В любой сети величина максимального потока равна пропускной способности любого минимального разреза.

Примечание. Применяя эту теорему, часто проще всего найти поток и разрез, для которого величина потока равна пропускной способности разреза. Из теоремы следует, что поток должен быть максимальным, а разрез — минимальным. Если все пропускные способности представляют собой целые числа, то величина максимального потока также является целым числом; этот результат оказывается полезным в определенных приложениях сетевых потоков.

Первое доказательство. Предположим сначала, что пропускная способность каждой дуги является целым числом. Тогда сеть можно рассматривать как ориентированный граф D, в котором пропускные способности представляют собой количество дуг, соединяющих различные вершины (как на рис. 6.6 и 6.7). Величина максимального потока соответствует общему количеству дугонепересекающихся путей из вершины v в вершину w в D, а пропускная способность минимального разреза — минимальному количеству дуг в vw-разделяющем множестве графа D. После этого необходимый результат следует из теоремы 6.9.

Распространение этого результата на сети, в которых пропускные способности представляют собой рациональные числа, достигается путем умножения этих пропускных способностей на подходящее целое число d, чтобы сделать их целыми числами. Так мы получаем описанный выше случай, а требуемый результат получается путем деления на d.

Наконец, если некоторые из пропускных способностей иррациональны, то мы используем их приближение с любой желаемой точностью до рациональных значений, после чего применяем приведенный выше результат. Тщательно выбирая рациональные приближения, мы можем гарантировать, что значение любого максимального потока и пропускная способность любого минимального разреза будут различаться на сколь угодно малую величину. Обратите внимание, что в практических применениях иррациональные пропускные способности встречаются редко, так как обычно они указываются в десятичном виде.

Второе доказательство. Поскольку величина любого максимального потока не может превышать пропускную способность любого минимального разреза, достаточно доказать существование разреза, пропускная способность которого равна величине данного максимального потока.

Пусть φ является максимальным потоком. Определим два множества, V и W, вершин в сети следующим образом. Если G является базовым графом сети, то вершина z находится в V тогда и только тогда, когда в G существует путь

$$v = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{m-1} \to v_m = z\,,$$

в котором каждое ребро v_iv_{i+1} соответствует либо ненасыщенной дуге v_iv_{i+1}, либо дуге $v_{i+1}v_i$, через которую проходит ненулевой поток. Множество W состоит из всех тех вершин, которые не принадлежат V. Например, на рис. 6.12 множество V состоит из вершин v, x и y, а множество W — из вершин z и w.

Очевидно, что v содержится в V. Покажем теперь, что множество W содержит вершину w. Если это не так, то w принадлежит V и, следовательно, в G существует путь

$$v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{m-1} \to w$$

вышеуказанного типа. Теперь выберем положительное число ε, которое не превышает ни одного из чисел, необходимых для насыщения любой ненасыщенной дуги v_iv_{i+1}, и не превышает поток в любой дуге $v_{i+1}v_i$, через которую проходит ненулевой поток. Легко видеть, что если увеличить на ε потоки во всех дугах первого типа и уменьшить на ε потоки во всех дугах второго типа, то величина потока φ увеличится на ε, а это противоречит нашему предположению о том, что поток φ — максимальный. Отсюда следует, что w принадлежит W.

Для завершения доказательства обозначим через E множество всех дуг вида xz, где x принадлежит V, а z принадлежит W. Ясно, что E является разрезом. Кроме того, каждая дуга xz из E насыщена, а через каждую дугу zx проходит нулевой поток, поскольку в противном случае z также была бы элементом V. Отсюда следует, что пропускная способность E должна быть равна величине потока φ и что E является требуемым минимальным разрезом. ■

Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе позволяет проверять, максимален ли данный поток, но только для достаточно простых сетей. На практике сети, с которыми приходится иметь дело, большие и сложные, так что обычно трудно найти максимальный поток такой сети простым подбором. Большинство методов поиска максимального потока включает в себя определение путей увеличения потока из v в w. Это пути, которые полностью состоят из ненасыщенных дуг xz и дуг zx, через которые проходит ненулевой поток. Например, рассмотрим сеть, показанную на рис. 6.14.

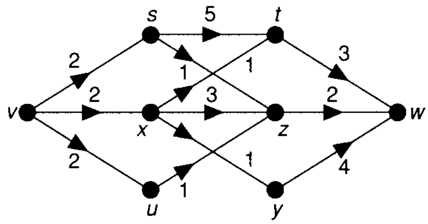

Рис. 6.14

Начиная с нулевого потока, мы можем построить пути, увеличивающие поток

$v \to s \to t \to w$, вдоль которого величину потока можно увеличить на 2,

$v \to x \to z \to w$, вдоль которого величину потока можно увеличить на 2,

и $v \to u \to z \to x \to y \to w$, вдоль которого величину потока можно увеличить на 1.

Полученный в результате поток с величиной 5 показан на рис. 6.15.

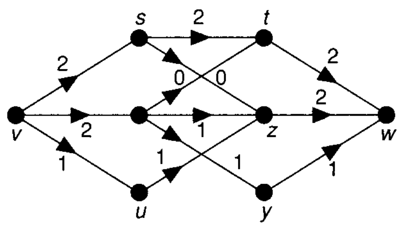

Рис. 6.15

Поскольку сеть имеет пропускную способность 5, этот поток является максимальным потоком, а разрез — минимальным разрезом.

В этом разделе нам удалось только слегка коснуться этого многогранного и важного направления. Читатель, желающий продолжить изучение затронутых вопросов, может обратиться к работам [22] и [24].

Упражнения

6.18[s]. Рассмотрим сеть на рис. 6.16.

1) Перечислите все разрезы данной сети и найдите минимальный разрез.
2) Найдите максимальный поток и проверьте выполнение теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе.

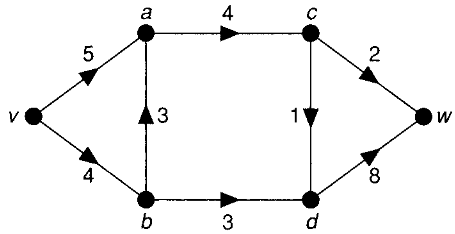

Рис. 6.16

6.19. Повторите упражнение 6.18 для сети, показанной на рис. 6.17.

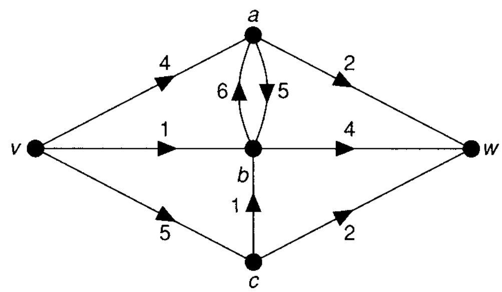

Рис. 6.17

6.20[s]. Проверьте выполнение теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе для сети, показанной на рис. 2.37.

6.21. Найдите поток величиной 20 в сети на рис. 6.18. Является ли этот поток максимальным?

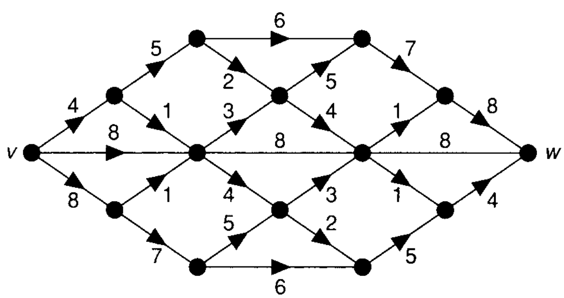

Рис. 6.18

6.22[s]. 1) Рассмотрим сеть с несколькими источниками и стоками. Покажите, как анализ потоков в этой сети может быть приведен к стандартному случаю путем добавления новых “вершины-источника” и “вершины-стока”.

2) Проиллюстрируйте свой ответ на вопрос из п. 1 для сети на рис. 6.19.

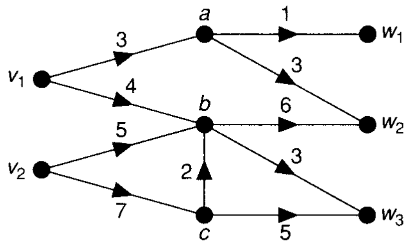

Рис. 6.19

Проблемы

6.23. 1) Используйте условие свадьбы, чтобы показать, что если у каждой девушки есть $r \geq 1$ друзей, а у каждого юноши есть r подруг, то у задачи о свадьбах есть решение.

2) Используйте результат п. 1 упражнения, чтобы доказать, что если G — двудольный регулярный степени r граф, то G имеет совершенное паросочетание. Выведите из этого, что хроматический индекс графа G равен r.

(Это частный случай теоремы 5.18.)

6.24. Предположим, что условие свадьбы удовлетворено и каждая из m девушек дружит как минимум с t юношами. По индукции по m покажите, что браки могут быть заключены не менее чем $t!$ способами, если $t \leq m$, и не менее чем $t!/(t-m)!$ способами при $t > m$.

6.25. Пусть E и $\mathcal{F}$ определены обычным образом и пусть T_1 и T_2 — трансверсали $\mathcal{F}$, а x — элемент T_1. Покажите, что существует элемент y из T_2, такой, что $(T_1 - \{x\}) \bigcup \{y\}$ (множество, полученное из T_1 заменой x на y) также является трансверсалью $\mathcal{F}$. Сравните этот результат с результатом упражнения 3.11.

(Этот результат понадобится нам в главе 7, “Матроиды”.)

6.26. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство, состоящее из m непустых подмножеств E и пусть A — подмножество E. Применяя теорему Холла к семейству, состоящему из $\mathcal{F}$ вместе с $|E| - \mathrm{m}$ копиями $E - A$, докажите, что существует трансверсаль $\mathcal{F}$, содержащая A тогда и только тогда, когда

1) $\mathcal{F}$ имеет трансверсаль;

2) A является частичной трансверсалью $\mathcal{F}$.

(Более простое доказательство с использованием матроидов приведено в главе 7, “Матроиды”.)

6.27. **Ранг** (rank) $r(A)$ подмножества A множества E представляет собой количество элементов в наибольшей частичной трансверсали $\mathcal{F}$, содержащейся в A. Покажите, что

1) $0 \leq r(A) \leq |A|$;

2) если $A \subseteq B \subseteq E$, то $r(A) \leq r(B)$;

3) если $A, B \subseteq E$, то $r(A \bigcup B) + r(A \bigcap B) \leq r(A) + r(B)$.

Сравните эти результаты с результатами упражнения 3.33.

(Этот результат также понадобится нам в главе 7, “Матроиды”.)

6.28. Пусть E — счетное множество и пусть $= (S_1, S_2, \ldots)$ — счетное семейство непустых *конечных* подмножеств E.

1) При определении трансверсали $\mathcal{F}$ обычным путем покажите по лемме Кёнига (теорема 2.7), что $\mathcal{F}$ имеет трансверсаль тогда и только тогда, когда для всех конечных k объединение любых k подмножеств S_i содержит как минимум k элементов.

2) Рассмотрев

$$E = \{1, 2, 3, \ldots\},\ S_1 = E,\ S_2 = \{1\},\ S_3 = \{2\},\ S_4 = \{3\}, \ldots,$$

покажите, что результат п. 1 ложен, если не все S_i конечны.

6.29. Подробно докажите теорему 6.6.

6.30. Покажите, как теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе может быть использована для доказательства теоремы Холла.