УДК 519.1(075.32)
ББК 22.176я723
КТК 117
Щ64

Рецензенты:
Гадельшин М.Ш. — канд. физ.-мат. наук,
преподаватель ГАПОУ СО ЕЭТК;
Слепухин А.В. — канд. пед. наук, доцент кафедры ИКТ
в образовании Института математики, физики, информатики
и технологий Уральского государственного
педагогического университета

Щербина И. А.
Щ64 Дискретная математика : учеб. пособие / И. А. Щербина. — Ростов н/Д : Феникс, 2020. — 125 с. : ил. — (Среднее профессиональное образование).

ISBN 978-5-222-31154-7

Учебное пособие подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование», входящей в список 50 наиболее востребованных на рынке труда новых и перспективных профессий, требующих среднего профессионального образования (ТОП-50).

Книга содержит 5 разделов. Материал изложен в доступной форме, содержит множество примеров, таблиц и рисунков. После каждой темы приведены вопросы и мини-игры для закрепления материала. Каждый раздел заканчивается практической работой, в которой приведены примеры решения задач и задачи для самостоятельного выполнения. Изучение содержания материала представленного учебного пособия предполагает использование средств современных образовательных технологий, в частности, применяются QR-коды, которые являются ссылками на тренировочные задания, расположенные на сайте http://learningapps.org/.

Пособие адресовано студентам учреждений среднего профессионального образования, обучающимся по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование», и является дидактической поддержкой учебной программы «Дискретная математика с элементами математической логики».

УДК 519.1(075.32)
ББК 22.176я723

ISBN 978-5-222-31154-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной книге в сжатой форме изложены некоторые специальные разделы математики, которые предусмотрены требованиями ФГОС к содержанию курса «Дискретная математика» для среднего специального образования по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование». Книга написана по программе «Дискретная математика с элементами математической логики», которая была разработана автором книги. Рабочая программа учебной дисциплины ЕН.02 «Дискретная математика с элементами математической логики» является частью основной образовательной программы в соответствии с ФГОС СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование», применяется в Государственном автономном профессиональном образовательном учреждении Свердловской области «Екатеринбургский экономико-технологический колледж» г. Екатеринбурга.

Цель данной книги — дать необходимый теоретический минимум информации, рассмотреть возможные практические задачи и научиться решать задачи по дискретной математике.

Согласно структуре программы весь материал разбит на разделы, а каждый раздел состоит из тем, в которые входят лекции и практические работы, вопросы для самопроверки, а также тренажеры-задачки для закрепления теоретического материала.

По каждой теме:

– приведены основные теоретические сведения;

– рассмотрены типовые задачи с подробными решениями;

– даны примеры и упражнения для самостоятельной работы;

– после каждой лекции приведены вопросы для самоконтроля;

– представлены задания для закрепления теории в виде различных игр: «Кто хочет стать миллионером?», «Установите соответствие», кроссворд и т. д.

Стиль и объем изложения курса в предлагаемой книге таковы, что изучение дисциплины возможно без помощи преподавателя.

Учебное пособие ориентировано на современные технологии. Применяются *QR*-коды, которые являются ссылками на приложения, представляющими собой различные игры, расположенные на ресурсе https://learningapps.org/. Игры позволяют закрепить теоретический материал без напряжения и с удовольствием.

В результате изучения дисциплины обучающийся осваивает следующие элементы компетенций, представленные в таблице ниже.

Компетенции, которые осваивает обучающийся

Код	*Наименование компетенции*
ОК 01	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 02	Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности
ОК 04	Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами
ОК 05	Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста
ОК 09	Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности
ОК 10	Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

При изучении лекции осваиваются общие компетенции ОК 05, ОК 09, ОК 10 — работа с лекцией и источниками, решение упражнений для тренажа (закрепление теоретического материала); при ответе на вопросы для самоконтроля можно использовать различные источники. При выполнении практических заданий осваиваются общие компетенции ОК 01, ОК 02, ОК 04.

По окончании изучения курса «Дискретная математика» обучающиеся должны

знать:

– основные понятия теории множеств;

– основы математической логики и теории графов;

– основы логики предикатов;

– основные методы алгоритмов;

уметь:

– упрощать логические формулы;

– решать булевы уравнения;

– решать задачи в теории графов;

– использовать алгоритм Дейкстры и Флорида при нахождении кратчайшего пути в задачах на графах;

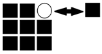
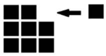
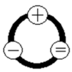
– строить высказывания к высказываниям, содержащим кванторы.

Вначале при изучении дискретной математики покажется, что слишком сложно, и захочется забросить. Но не нужно сдаваться. При постепенном углублении в нее начнет проявляться общий рисунок представления о данном разделе математики. Обязательно нужно прорешать все задания, которые позволяют закрепить формулы. Просто учить бесполезно. В математике нужно понимание. Для выполнения тренажеров на мобильных устройствах нужно установить *QR*-сканер.

В данном учебном пособии используются значки для обозначения различных действий как обучающихся, так и преподавателей (см. табл. на с. 6).

В конце учебного пособия представлен словарь основных терминов, который поможет при выполнении заданий для тренажа.

Условные обозначения

Символ	*Значение*
	Примеры решения задач
	Упражнения для самостоятельного решения
	Основные понятия, определения, теоремы
	Вопросы для самоконтроля
	Время тренажа
	Немного истории
	Практическая работа

В тексте будут встречаться некоторые математические символы. Их значение приведено в таблице ниже.

Символы и обозначения

Символ	*Значение*
$\subset, \supset, \subseteq$	Знак включения
$\in$	Принадлежит множеству
$\notin$	Не принадлежит множеству
N	Множество натуральных чисел
Z	Множество целых чисел
Q	Множество рациональных чисел
R	Множество действительных чисел
C	Множество комплексных чисел
U	Универсальное множество
$\varnothing$	Пустое множество

Окончание табл.

Символ	*Значение*
$\cup$	Объединение множеств
$\cap$	Пересечение множеств
$\backslash$	Разность множеств
$\wedge$	Конъюнкция
$\vee$	Дизъюнкция
$\neg$, $-$	Отрицание, инверсия
$\rightarrow$	Импликация
$\leftrightarrow$	Эквиваленция
$\oplus$	Разделительное ИЛИ, сумма Жегалкина
$\mid$	Штрих Шеффера
$\downarrow$	Стрелка Пирса
$\forall$	Квантор (символ) общности
$\exists$	Квантор (символ) существования
$\equiv$	Тождество

Краткий обзор истории формирования и развития дискретной математики

Дискретная математика — область математики, изучающая свойства структур конечного характера. В отличие от дискретной классическая математика изучает свойства непрерывного характера, например теорию пределов и производные.

Развиваясь параллельно с другими разделами математики, элементы дискретной математики являлись их составной частью.

Важнейшие примеры дискретных математических объектов: множество, конечный граф, слово, входящее в высказывание, отображение одного множества в другое, функции. Деление математики на дискретную и классическую условно, поскольку элементы дискретной математики используются для изучения непрерывных моделей.

В широком смысле дискретная математика включает в себя такие разделы математики, как теория множеств, математическая логика, теория графов, логика предикатов и т.д. В узком смысле дискретная математика состоит из ряда специальных новых разделов, которые интенсивно стали развиваться с середины прошлого века в связи с изобретением цифровых технологий. К таким разделам можно отнести теорию функциональных систем, теорию графов и сетей, комбинаторный анализ, теорию автоматов и алгоритмов, теорию кодирования, теорию синтеза управляющих систем, дискретную геометрию и др.

Этот раздел математики является важным, так как применение дискретной математики — основа современных компьютерных наук и информатики. Благодаря дискретной математике — поиску новых алгоритмов решения задач — развиваются робототехника, компьютерные технологии.

Учим символы и обозначения
Игра «Установите соответствие»

Желаем успехов в новых начинаниях!

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Тема 1.1. Основы теории множеств

Лекция 1. Множества. Операции над множествами

Множества и операции над ними. Мощность множеств. Отношения и функции. Основные тождества алгебры множеств.

Понятие множества

Теория множеств явилась основой для развития науки в XX в. Ее методы используются в различных математических дисциплинах: функциональном анализе, теории функций действительного переменного и т.д. В настоящее время с нее начинается серьезное изучение математики, поскольку многие математические дисциплины используют ее аппарат.

В начальной школе изучение понятия «множества» начиналось с чисел, которые входили в семейство натуральных и обозначались N. Чуть позже были введены понятия целых чисел, которые обозначались Z, далее множество дробей, десятичных и обыкновенных, обозначали Q, а все эти множества входили в множество, которое называлось множеством действительных чисел и обозначалось R. Данные множества изображены на рисунке 1.1. Чуть позже, в старших классах, ввели множество комплексных чисел, которое рассматривается как отдельное множество и обозначается C.

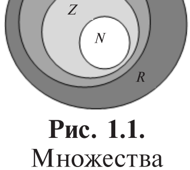


Рис. 1.1. Множества

Данное множество позволяло извлекать корни из отрицательных чисел. Введем основные понятия, связанные с множеством.

Множество — это совокупность элементов, обладающих сходными свойствами или признаками. Обозначается большими латинскими буквами A, B, C, D и т.д.

Все числа, входящие в эти множества, называются *элементами множества*. Например: числа 1, 2, 3, 4, 5 и так далее – элементы множества натуральных чисел N. Обычно элементы множества обозначаются следующим образом: n_1, n_2, n_3. Принадлежность элементов множеству записывается следующим образом: $n_1, n_2, n_3 \in N$. Если элемент не принадлежит множеству, то запись выглядит следующим образом: $n_4 \notin N$.

Множество считается заданным, если перечислены все его элементы или указано свойство, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству.

Множество будем записывать так: $M = \{m_1; m_2; m_3\}$ — множество, состоящее из элементов. Если частный случай, то будет выглядеть так: $M = \{1; 2; 3\}$. Если множество обладает каким-либо свойством, то будем записывать следующим образом: $M = \{m | m \in N, m < 8\}$ — множество M, состоящее из всех натуральных чисел меньше восьми.

Если каждый элемент множества А является множеством B, то пишут $A \subset B$ или $B \subset A$ и говорят, что множество A является *подмножеством множества B*. В этом случае также говорят, что A содержится в B или B содержит A. Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается $\varnothing$. Два множества A и B называются равными, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, а каждый элемент множества B принадлежит множеству A. Обозначается так: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Количество элементов конечного множества называется *мощностью* множества и обозначается $|A|$.

Например: задано множество $N = \{1; 3; 4; 5\}$. Данное множество состоит из четырех элементов, значит, мощность этого множества равна 4, т.е. $|A| = 4$.

Теорема. Пусть A_1, A_2, A_3, ..., A_n — конечные множества, их мощности соответственно равны $|A_1| = k_1$, $|A_2| = k_2$, $|A_3| = k_3$, ..., $|A_n| = k_n$. Тогда мощность множества $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ равна произведению мощностей множества A_1, A_2, A_3, ..., A_n.

Операции над множествами

Множество, состоящее из всех тех и только тех множеств элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением* множеств A и B и обозначается: $A \cup B$ или $A + B$.

Например: $A = \{1; 3; 5; 6\}$ и $B = \{2; 3; 5; 8\}$, тогда $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 6; 8\}$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех множеств элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением* множеств A и B и обозначается: $A \cap B$ или $A \cdot B$. Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

Например: $A = \{1; 3; 5; 6\}$ и $B = \{2; 3; 5; 8\}$, тогда $A \cap B = \{3; 5\}$.

Множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется *разностью* множеств A и B и обозначается: $A \setminus B$.

Например: $A = \{1; 3; 5; 6\}$ и $B = \{2; 3; 5; 8\}$, тогда $A \setminus B = \{1; 6\}$.

Универсальное множество — это такое множество, которое состоит из всех элементов, а также подмножеств множества объектов исследуемой области.

Универсальное множество может выбираться самостоятельно в зависимости от рассматриваемого множества и решаемых задач. Обозначается U.

Множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые не принадлежат множеству A, т.е. дополняют его до универсального множества, называется *дополнением* к множеству. Обозначается $\overline{A}$.

Например: U — множество всех однозначных целых чисел, $A = \{1; 3; 5; 6\}$, тогда $\overline{A} = \{-9; ...; 0; 2; 4; 7; 8; 9\}$.

Основные тождества алгебры множеств:

$A \cup B \equiv B \cup A$ (коммутативность объединения);

$A \cap B \equiv B \cap A$ (коммутативность пересечения);

$A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность объединения);

$A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения);

$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);

$A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);

$A \cup \overline{A} \equiv U$, $A \cap \overline{A} \equiv \varnothing$;

$A \cup \varnothing \equiv A$, $A \cap \varnothing \equiv \varnothing$;

$A \cap U \equiv A$, $A \cup U \equiv U$;

$A \cup A \equiv A$, $A \cap A \equiv A$;

$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон двойственности — закон де Моргана);

$\overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон двойственности — закон де Моргана);

$A \cup (A \cap B) \equiv A$ (закон поглощения);

$A \cap (A \cup B) \equiv A$ (закон поглощения).

Справедливость тождества устанавливается с помощью принципа равнообъемности: показывается, что множества в левой и правой частях тождества состоят из одних и тех же элементов.

Докажем, например, тождество $\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Что и требовалось доказать.

Докажем тождество: $A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Покажем $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup C) \Rightarrow \Rightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \in C$. Но тогда $x \in A \cup (B \cap C)$.

Покажем теперь, что $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in A \cup (B \cap C)$, то $x \in A$ или $x \in (B \cap C)$. Но если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$.

Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Что и требовалось доказать.

Остальные тождества доказываются аналогично.

Введенные тождества принято называть булевыми — по имени автора, впервые их доказавшего.

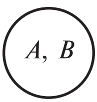
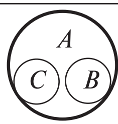
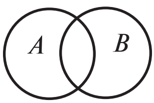
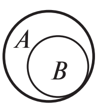
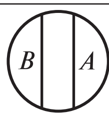
Джордж Буль (1815–1864) — английский математик, один из основоположников математической логики. Он одним из первых обратился к логической проблематике. Является автором трактата «Исследование законов мышления, на которых основываются математические теории логики и вероятностей» (1854).

Графическое изображение множеств. Круги Эйлера–Венна

Круги Эйлера на самом деле достаточно часто встречаются в нашей жизни. Еще в начальной школе ученики начинают работать со схематическими фигурами, которые наглядно объясняют соотношения предметов и понятий. Делятся на группы в зависимости от типа отношений между множествами (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Виды кругов Эйлера–Венна

Графическое представление	*Название*	*Графическое представление*	*Название*
	Равнозначные		Соподчиненные
	Пересекающиеся		Противоречащие
	Подчиненные		Противоположные

Круги Эйлера–Венна — это схематичное изображение отношений между множествами и их элементами.

Метод был разработан известным математиком Леонардом Эйлером.

Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский и российский математик.

Эйлер внес существенный вклад в теорию и методы приближенных вычислений. Впервые применил аналитические методы в картографии. Предложил удобный метод графического изображения соотношений и операций над множествами, получивший название «круги Эйлера» (или Эйлера–Венна).

Позже данный способ был доработан англичанином Джоном Венном, который ввел понятие пересечения нескольких множеств.

Джон Венн (1834–1923) — английский логик и философ. Венн расширил математическую логику Буля и более всего известен среди математиков и логиков своим схематическим способом представления множеств и их объединений и пересечений. Венн пришел к критическому рубежу методов, использовавших в XIX в. диаграммы Джорджа Буля и Огастеса де Моргана, и написал труд «Символьная логика» (*Symbolic Logic*), для того чтобы представить свои собственные интерпретации и корректировки работ Буля.

Отношения и функции. Отношения эквивалентности и частичного порядка

Представьте: вы решили поехать в другую страну и отправились туда на самолете. Прилетели. Спустились с трапа, прошли таможенный досмотр и решили, что нужно найти гостиницу. Надо бы спросить у кого-то, где здесь можно ее найти, но языка вы не знаете.

Вот для таких людей (как в примере) придуманы средства визуальной информации:

- красный или зеленый крест — медпункт;
- ножницы и расческа — парикмахерская;

· чемодан — камера хранения;
· кружка — кафе;
· тарелка с вилкой и ложкой — ресторан;
· кровать с подушкой — гостиница, хостел.

Основное достоинство этих легко узнаваемых картинок в том, что каждая строго соответствует определенному виду услуг.

Итак, с одной стороны, множество разновидностей сервиса, с другой — множество транспарантов. Соответствие между элементами этих двух множеств помогает ориентироваться в незнакомой обстановке.

Можно рассмотреть и другие примеры соответствия. Например: на вахте в колледже за спиной вахтера висят ключи. Каждый из них открывает дверь нужной аудитории. Идет экзамен, и каждому экзаменующемуся ставится соответствующая оценка. Заселение в новостройку. Опять соответствие: между жильцами и номерами квартир.

Если в каждой из описанных ситуаций отвлечься от деталей и перевести это на язык математики, то мы получим следующее: есть некоторое множество A, и каждому его элементу ставится в соответствие определенный элемент некоторого множества B: аудитории — ключ, сдающему экзамен — оценка, жильцу — номер квартиры. Причем с каждым элементом первого множества ставится в соответствие один элемент второго множества.

Всякое такое соответствие в теории множеств называется *отображением* множества A во множество B. Обозначается: $A \to B$.

В каждой паре из элемента множества A и соответствующего ему в данном отображении элемента множества B первый называется *прообразом* (или значением аргумента), второй — образом (или значением функции).

Все элементы множества B, выступающие в данном отображении в роли образов, в совокупности называются *образом* множества A в этом отображении.

Изобразим отображение множеств и их элементов с помощью кругов Эйлера–Венна (рис. 1.2).

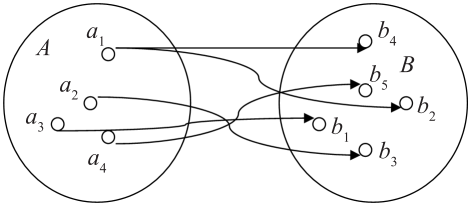


Рис. 1.2. Отображение множеств

Из данного рисунка видно, что одному элементу первого множества могут соответствовать несколько элементов из второго множества.

Соответствие между равными множествами $A = B$ называется *отношением* на данном множестве. Отношения в некоторых числовых множествах могут выражаться терминами: «быть равными», «не превышает», «не меньше», «быть делителем» и т.д. *Унарные (одноместные) отношения* отражают наличие какого-то определенного признака (свойства) у элементов множества.

Например: «быть черным» на множестве шаров.

Бинарные (двухместные) отношения используются для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве.

Например: на множестве людей могут быть заданы бинарные отношения «работать в одной организации», «жить в одном городе» и т.д.

?

1. Какие основные символы, используемые в теории множеств, вы знаете?
2. Что такое множество? Как оно обозначается?
3. Какое множество называется пустым?
4. Что такое подмножество?
5. Какое множество можно назвать универсальным?
6. Какие соотношения (действия) между множествами вы знаете?
7. Что такое круги Эйлера–Венна? Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера–Венна объединение и пересечение трех множеств.
8. Поясните термин «мощность множества».

9. Что называется отображением множества во множество?
10. Какие отношения называются унарными, какие — бинарными? Приведите примеры.

Учим основные тождества алгебры множества
Игра «Установить соответствие»

Практическая работа № 1. Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера–Венна

Цель: научиться решать задачи, используя диаграммы Эйлера–Венна.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные принципы теории множеств; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Выполнение данной практической работы способствует формированию общих компетенций ОК 01, ОК 02, ОК 04 (см. табл. на с. 4).

Теоретический материал

Множество часто задают графически с помощью диаграмм Эйлера–Венна, где всякий рассматриваемый контур соответствует одному из рассматриваемых множеств и ограничивает (символически) его элементы, а рамка, ограничивающая все элементы пространства, в верхнем правом углу имеет обозначение U. Множество часто изображают с помощью кругов.

РАЗДЕЛ 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

Тема 5.1. Алгоритмы на графах

Лекция 8. Алгоритмы нахождения кратчайшего пути

Поиск кратчайшего пути: алгоритмы Дейкстры и Флойда.

Пусть нужно построить сеть дорог, которые бы соединили n городов так, чтобы, например, турист мог из каждого города попасть в любой другой город. Для каждой пары городов (x, y) известна стоимость $c(x, y)$ строительства дороги между ними. Нужно построить самую дешевую сеть дорог из всех возможных. Вместо сети дорог можно рассматривать сеть трубопроводов, линии электропередачи, кратчайшие пути до назначенного пункта и т.д. Если построить граф, где города будут вершинами, а расстояние между городами выражает длину ребра, то тем самым мы будем иметь задачу о построении графа кратчайшего пути.

Рассмотрим два наиболее эффективных алгоритма нахождения кратчайшего пути:

- алгоритм Дейкстры;
- алгоритм Флойда.

Указанные алгоритмы легко выполняются при малом количестве вершин в графе. При увеличении их количества задача поиска кратчайшего пути усложняется.

Алгоритм Дейкстры

Данный алгоритм был изобретен нидерландским ученым Э. Дейкстрой в 1959 г.

Эдсгер Вибе Дейкстра (1930–2002) — нидерландский ученый, труды которого оказали влияние на развитие информатики и информационных технологий. Известность Дейкстре принесли его работы в области применения математической логики при разработке компьютерных программ. В 1972 г. он стал лауреатом премии Тьюринга, в 2002 г. получил ежегодную премию, вручаемую Симпозиумом по принципам распределенных вычислений (*Symposium on Principles of Distributed Computing*) Ассоциации вычислительной техники, «за публикацию, оказавшую наибольшее влияние на область распределенных вычислений». В знак признания заслуг ученого с 2003 г. эта премия носит название премии Дейкстры.

С помощью данного алгоритма можно найти кратчайшее расстояние от одной из вершин графа до всех остальных. Обязательное условие: граф является взвешенным с положительным весом ребер.

Для того чтобы разобраться с данным алгоритмом, рассмотрим его на конкретном примере. На рисунке 5.1 изображен ориентированный граф, цифры над ребрами являются весом (это может быть обозначение расстояния между вершинами, уровень значимости и т.п.).

Пример: найти кратчайший путь $L(I, S)$.

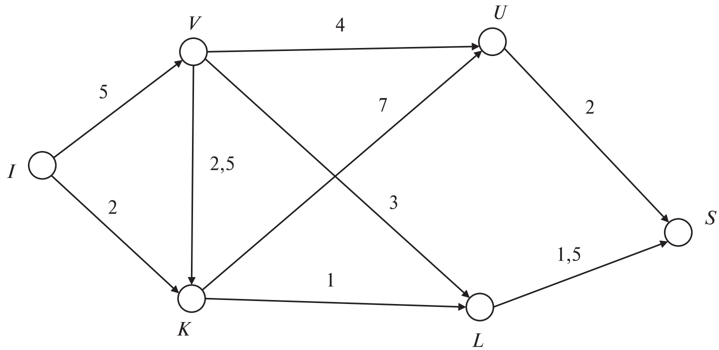


Рис. 5.1. Демонстрация алгоритма Дейкстры

Данные орграфа внесем в таблицу 5.1, в которой названия столбцов (буквы) — это названия вершин. Буквы

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

· *Алгоритм Дейкстры* — это алгоритм нахождения кратчайшего пути от одной из вершин графа до всех остальных, который работает только для графов без ребер отрицательного веса.

· *Алгоритм Флойда* — это алгоритм поиска кратчайшего пути между любыми двумя вершинами графа.

· *Ациклический граф* — орграф, не содержащий циклов.

· *Базис* — набор логических функций (операций), с помощью которых можно выразить любые другие логические функции.

· *Бинарное* (*двоичное*) *дерево* — это динамическая структура данных, представляющая собой дерево, в котором каждая вершина имеет не более двух потомков.

· *Булева формула* — формула, содержащая кроме переменных и скобок только знаки функций конъюнкции, дизъюнкции, отрицания.

· *Вершина* (*узел*) *дерева* — это каждый элемент дерева.

· *Вершины инцидентны* ребру, если она является одним из его концов.

· *Ветви дерева* — это направленные ребра, которыми соединены вершины дерева.

· *Взвешенный граф* — граф, у которого каждому ребру приписано некоторое положительное число (вес).

· *Выполнимым* (*опровержимым*) называется *предикат*, если существует по крайней мере один набор конкретных предметов, при подстановке которого вместо соответствующих переменных в предикат последний обращается в истинное (ложное) высказывание.

· *Высказывание в математике* — повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно.

· *Высказывательная форма* — логическое высказывание, в котором один из объектов заменен переменной.

· *Высота (глубина) дерева* — это количество ярусов, на которых располагаются его вершины.

· *Гамильтонов цикл* — простой цикл, содержащий все вершины графа ровно по одному разу.

· *Гамильтонова цепь* — простая цепь, проходящая через все вершины графа, с началом и концом в разных вершинах.

· *Граф G' является частью G*, если множество вершин $V' \subset V$ является подмножеством вершин исходящего графа, а множество ребер E' — множеством не всех ребер. V' и E' можно выбрать как угодно.

· *Граф G' (V', E') является подграфом G*, если множество вершин $V' \subset V$ является подмножеством вершин исходящего графа, а множество ребер E' — множеством всех ребер, оба конца которых принадлежат вершинам V'. V' можно выбрать как угодно, а E' — однозначно.

· *Графом* называют совокупность точек и линий, соединяющих эти точки: $G(V, E)$, где G — имя графа, V — множество вершин, E — множество ребер, $|V| = n$ — число вершин, $|E| = m$ — число ребер.

· *Две вершины смежные*, если существует ребро, их соединяющее.

· *Дерево* — связный ациклический неориентированный граф, который содержит более двух узлов.

· *Дизъюнкция* (лат. *disjunctio* — «разобщение») — логическая операция, по своему применению максимально приближенная к выражению «или то, или это, или оба сразу».

· *Дискретная математика* — область математики, изучающая дискретные математические объекты и структуры.

· *Длина маршрута (пути)* — число ребер маршрута (пути).

· *ДНФ* — формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся дизъюнкцией элементарных произведений (конъюнктивных одночленов).

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Щербина Ирина Андреевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный редактор *М. Басовская*
Выпускающий редактор *Г. Логвинова*
Технический редактор *А. Столярова*

Формат 84×108/32.
Бумага типографская № 2. Тираж 1 000 экз. Заказ

ООО «Феникс»
344011, Россия, Ростовская обл., г. Ростов-на-Дону,
ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.
Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru
E-mail: idea@fenixrostov.ru

Изготовлено в России
Дата изготовления: 08.2019.

Изготовитель: АО «Первая Образцовая типография»
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, Россия, Ульяновская обл.,
г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14