УДК 519.813:303.7
ББК 22.1я7
З-38

Рецензент — проректор по магистратуре и аспирантуре Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, доктор экономических наук, профессор *Л.И. Гончаренко*

Научный редактор — доктор физико-математических наук *А.В. Савватеев*

З-38 **Захаров, А. В**. Теория игр в общественных науках [Текст] : учебник для вузов / А. В. Захаров ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — 2-е изд., исправл. — М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2019. — (Учебники Высшей школы экономики). — 304 с. — 1000 экз. — ISBN 978-5-7598-1941-7 (в пер.). — ISBN 978-5-7598-1874-8 (e-book).

В учебнике излагаются основы некооперативной теории игр и разбираются примеры из различных областей экономики и политической науки. Для понимания материала необходимо знание математического анализа и теории вероятностей на уровне первого курса.

Книга может быть использована как основной учебник по семестровому курсу теории игр для студентов бакалавриата или магистратуры, не изучавших предмет ранее, или для более короткого повторного курса.

УДК 519.813:303.7
ББК 22.1я7

*Учебное издание*
*Серия «Учебники Высшей школы экономики»*

Алексей Владимирович Захаров

**Теория игр в общественных науках**

*Второе издание, исправленное*

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор-корректор *И.Л. Легостаева*
Дизайн обложки *Д.Ю. Наумкин*
Компьютерная верстка и графика: *И.Г. Андреева*

Подписано в печать 14.12.2018. Формат 70×100/16. Печать струйная ролевая
Усл.-печ. л. 24,7. Уч.-изд. л. 22,0. Тираж 1000 экз. Изд. № 2253

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20, тел.: 8 (495) 772-95-90 доб. 15285

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
www.chpd.ru, e-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (499) 270-73-59

Опубликовано Издательским домом Высшей школы экономики <http://id.hse.ru>

doi:10.17323/978-5-7598-1941-7

ISBN 978-5-7598-1941-7 (в пер.)
ISBN 978-5-7598-1874-8 (e-book)

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

В настоящее время имеется множество книг по теории игр на русском языке, однако необходимость в написании, как минимум, еще одной такой книги у меня не вызывает сомнений.

Причина здесь кроется в том факте, что термин «теория игр» существенным образом многозначный. Во-первых, существует теория игр в рамках общей теории исследования операций (игры с нулевой суммой, потенциальные игры и методы численного решения). Во-вторых, есть теория игр с точки зрения чистой математики (теоремы о неподвижных точках, параметрические задачи на максимум, поведение многозначных отображений, многоцелевое динамическое программирование). В-третьих, можно говорить о теории игр с точки зрения математической логики («детские» игры с последовательными ходами, в которых нужно отыскать оптимальную стратегию одного из двух игроков, теорема Цермело и метод обратной индукции, алгоритмическая сложность поиска равновесий Нэша). В-четвертых, можно говорить о теории игр с точки зрения экономики и политической науки (гербарий сюжетов, так или иначе концентрирующийся вокруг трагедии общин и иных примеров неэффективности равновесий по Нэшу). Все перечисленные «теории игр» — это совершенно разные науки! И по методам, и по характеру формулируемых задач, и по тому математическому аппарату, который является в каждой из них центральным.

Предлагаемая читателю «Теория игр в общественных науках» посвящена решению не очень простой задачи. А именно, разъяснить не-математикам основы теории игр *на строго научном языке*. Такая попытка является достаточно рискованной. В то же время, учитывая то, что данная книга —

(А) *почти единственный* текст на русском языке, где подробно обсуждаются аукционы, задача дизайна механизмов, а также сигнальные игры и равновесия в них, в рамках общей теории динамических игр с неполной информацией [1];

(Б) возможно, не единственная, но исключительно удачная попытка разъяснить базовые для современного экономиста вещи на строгом уровне (равновесия в играх голосования и политические равновесия, решение по доминированию в модели олигополии Курно, а также целый ряд других классических сюжетов, входящих в необходимый минимум любого работающего экономиста);

[1] Часть этого материала разбирается в книгах Печерского и Беляевой [2001], Писарука [2013], Васина и Морозовой [2003], Данилова [2002] и в некоторых других книгах.

(В) в числе прочего, «малая энциклопедия», или «джентльменский набор» сюжетов, которыми оперирует любой грамотный экономист-теоретик,

я полагаю, что риск, предпринятый автором, оправдан.

Научное редактирование не коснулось части разобранных в книге примеров, однако все они в свое время были проработаны во время семинарских и лекционных занятий в Высшей школе экономики. И автор, и научный редактор с благодарностью учтут все присланные замечанные вами опечатки и неточности при последующем переиздании книги после первой «пробы читателем».

Алексей Савватеев,
доктор физико-математических наук

*Васин А.А.*, *Морозов В.В.* Введение в теорию игр с приложениями в экономике. Учеб. пособ. М.: 2003.

*Данилов В.* Лекции по теории игр. М.: New Economic School, 2002.

*Печерский Л.*, *Беляева А.А.* Теория игр для экономистов: Вводный курс. Учеб. пособ. СПб.: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2001.

*Писарук Н.Н.* Введение в теорию игр. 2013. <http://pisaruk.narod.ru/books/games.pdf>.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Люди, организации и государства все время взаимодействуют друг с другом. Как поступит каждый, когда его выигрыш зависит не только от его собственного выбора, но и от чьего-то другого? Теория игр — это раздел прикладной математики, позволяющий осмыслить принимаемые в подобных ситуациях решения. Теория игр широко используется в экономике, а также в политологии, социологии и науке об управлении.

Эта книга написана на основе курсов, читаемых автором на факультетах экономики и прикладной математики Высшей школы экономики в Москве на протяжении последних четырех лет. Книга адресована студентам бакалавриатов и магистратур высших учебных заведений, изучающих экономику, политологию, менеджмент, прикладную математику. Предполагается, что читатель владеет основами математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление), а также основами теории вероятностей. Книга также может представлять интерес для студентов магистратуры (особенно, не изучавших предмет ранее) и любого читателя, желающего подготовить себя к чтению международной академической литературы в области экономики или политологии.

При составлении книги автор преследовал три непростые и отчасти противоречивые задачи.

Во-первых, книга должна содержать достаточно большой, но не чрезмерный, объем формальных математических определений, теорем и доказательств, составляющих костяк теории. С одной стороны, книга задумывалась как учебник, предназначенный для студентов бакалавриатов экономических вузов, что предполагало наличие у читателя знания математического анализа, по крайней мере, на начальном уровне. С другой стороны, целью книги не являлся обзор (пусть даже поверхностный) всего инструментария, разработанного по сей день, или формулирование утверждений как можно в более общей форме. Таким образом, необходимо было достичь компромисс между доступностью и общностью (и в значительно меньшей мере — между доступностью и точностью) формулировок и объемом.

Во-вторых, книга должна быть «живой», т.е. содержать большое число примеров применения теории в таких общественных науках, как экономика или политология, чтобы поддерживать интерес читателя и не допускать ощущения, что теория оторвана от реальности и от предметной области читателя. Книга должна быть способна заинтересовать незнакомого с предметом читателя.

В-третьих, как подбор математических утверждений, так и подбор примеров и задач должны быть современными и актуальными. Наука быстро меняется. Те ветви теории, которые казались перспективными (и даже необходимыми) двадцать–тридцать лет назад, сегодня представляют лишь исторический интерес — т.е. не используются в экономической, политологической или иной науке. В то же время появились новые направления. Поэтому одним из критериев отбора задач для книги являлся индекс цитирования работ, откуда они были взяты.

Структура книги следует более-менее установившемуся стандарту для учебников среднего и продвинутого уровней по данному предмету. Учебник разделен на четыре главы.

Первая глава посвящена статическим играм с полной информацией. Приводится определение игры в нормальной форме, определения доминирования, смешанных стратегий и равновесия Нэша. В качестве приложения приводится доказательство теоремы Нэша о существовании равновесия.

Во второй главе рассматриваются динамические игры с полной информацией. Помимо совершенства по подыграм для конечных игр, в главе говорится о конечно и бесконечно повторяющихся играх. Также дается определение совершенного марковского равновесия в повторяющихся играх (это — очень востребованная в наше время аналитическая концепция) и разбираются несколько задач, использующих такую игровую постановку.

Третья глава имеет два раздела. Во-первых, это байесовы игры, или статические игры с неполной информацией. Во-вторых, в главе излагаются основы теории дизайна механизмов и теории аукционов. В частности, формулируется и доказывается теорема об эквивалентности доходов в аукционах, даются определения и условия Нэш-реализуемости и реализуемости в доминирующих стратегиях.

Наконец, четвертая глава посвящена динамическим играм с неполной информацией. Большое внимание уделяется изложению различных концепций решения для таких игр (секвенциального равновесия, совершенного равновесия) и их взаимосвязи, сигнальным играм, играм с сообщениями.

В книге разбираются или предлагаются для самостоятельного решения около 200 примеров и задач, в том числе и стандартные примеры из области экономики — производство общественных благ, объемная и ценовая конкуренция, аукционы, некоторые макроэкономические модели. Значительная часть примеров приходится и на политологические темы, такие как поведение политиков и избирателей на выборах, лоббирование, моделирование решений в авторитарных политических системах, возникновение массовых протестов.

Для вводного курса в теорию игр объемом в один семестр в качестве основного текста можно использовать первые две главы данной книги, а также (в зависимости от скорости освоения материала) начало третьей главы. Вся книга может быть использована в качестве учебника в рамках двухсеместровых курсов, рассчитанных на студентов 3–4 года обучения. Книга также может быть использована в качестве вспомогательного материала для продвинутого курса по политологии или политической экономике.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность К.С. Сорокину, помогавшему мне вести курсы в Высшей школе экономики (ему же принадлежит доказательство теоремы 4.1); А.В. Савватееву, проведшему большую работу по научному редактированию текста; Д.С. Карабекяну, редактировавшему тексты задач; Ф.Т. Алескерову, С.Б. Измалкову, а также всем студентам, с которыми я работал и которые помогали мне находить ошибки в этом тексте.

1

ГЛАВА

# СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Ранним утром 14 октября 1066 г. войска короля Гарольда, правителя Англосаксонского королевства, стояли на высоком холме рядом с местечком под названием Гастингс и готовились к бою. Двумя неделями ранее Вильгельм, герцог Нормандский, вторгся на земли Гарольда, желая присвоить их себе и щедро наградить ими своих подданных. И вот настал день большого сражения.

Войско нормандцев, в основном состоявшее из тяжело вооруженных всадников, обрушилось на пеших англосаксов, стоявших щитом к щиту на вершине холма. Первая атака была отбита: потеряв много убитых и раненых, нормандцы отступили, чтобы напасть снова.

Раз за разом они атаковали. Наконец, когда уже почти стемнело, всадникам все-таки удалось пробить брешь в обороне англичан. Войско Гарольда вдруг дрогнуло и побежало. Король был убит; немногим удалось спастись. Англия была завоевана — в последний раз в своей долгой истории.

Почему исход сражения решился так быстро? Каждый воин, стоя в строю, преследовал две (иногда противоположные) цели: выполнить свой воинский долг и остаться в живых. Пока его товарищи держали строй, воин должен был сражаться: конечно же, он мог быть убит при следующей атаке, но если бы он покинул поле боя, то его ждал бы позор и, возможно, наказание или даже смерть за трусость. Но вот последовала особо суровая атака. Видя, как кругом гибнут их товарищи, несколько солдат дрогнуло и побежало. Несколько стоящих рядом последовало их примеру.

Как только некоторое критическое число солдат покинуло поле боя, держать оборону перестало быть выгодным: риск быть убитым начал перевешивать возможное наказание за бегство. Тем более, что чем больше солдат покидало поле боя, тем меньше становилась вероятность того, что каждый отдельно взятый беглец будет наказан. Не прошло и нескольких минут, как все войско обратилось в бегство и погибло: пеший не имеет никаких шансов против преследующего его конного воина. Тем не менее решение каждого солдата бросить свой щит и попытаться добежать до видневшейся вдали лесной опушки было рациональным: если остальные бегут, то у отдельно взятого воина фактически нет выбора. Оставаясь сражаться, он обрекает себя на верную смерть. Пытаясь спастись, он с некоторой вероятностью остается в живых. Что произошло бы, если бы каждый воин был готов сражаться до конца, как личная дружина короля Гарольда (которая не отступила ни на шаг и была полностью уничтожена)? Возможно, никто бы не побежал и битва закончилась бы победой англосаксонцев. Но история не знает сослагательного наклонения.

Оглянитесь вокруг. Действия других людей практически всегда влияют на решения, которые нам приходится принимать. Почему в некоторых вузах студенты списывают на экзамене? Если списывают все остальные, то для каждого отдельно взятого студента выгода от списывания перевешивает ожидаемое наказание от поимки. В приличных вузах не списывает никто (или почти никто): попавшегося ждет показательное наказание, вплоть до отчисления. Как происходит обвал финансового рынка? По той же причине: если вы ожидаете, что цена акции упадет, то вам выгодно от нее избавиться. Если все начинают избавляться от этой акции, то ее цена падает, оправдывая ожидания. Конечно же, всегда можно рассуждать о «стадном инстинкте» и о стремлении людей имитировать друг друга, но очень часто массовая паника имеет рациональное (на индивидуальном уровне) объяснение.

Теория игр — раздел прикладной математики, с помощью которого ученые (в первую очередь экономисты и политологи) моделируют поведение нескольких субъектов, когда критерий принятия решения каждого зависит от решений, принимаемых остальными. Важнейший факт состоит в том, что решение игровой задачи часто отличается от решения оптимизационной задачи: войску короля Гарольда (да и самому королю) было бы «выгодно», если бы никто из солдат не побежал. Но в итоге решение каждый отдельный солдат принимал сам за себя.

## 1.1. СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ: ЧИСТЫЕ СТРАТЕГИИ

Существует несколько способов классифицировать игровые задачи. Различие между *статическими* и *динамическими* играми обусловлено возможностью игроков наблюдать за действиями друг друга и реагировать на них. В статических играх игроки принимают решения одновременно; принятые решения не подлежат пересмотру. В динамических играх существует более сложный порядок ходов.

### 1.1.1. ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В детстве все играли в игру «камень-ножницы-бумага». Каждый из двух игроков выбрасывает одну из трех заглавных фигур. «Камень» побеждает «ножницы», «бумага» — «камень», «ножницы» — «бумагу». Победивший бьет щелбан проигравшему. Как можно математически описать эту игру?

Во-первых, нам известно, что игроков всего двое. Будем говорить, что *множество игроков* в этой игре состоит из двух элементов: $I = \{1, 2\}$.

Во-вторых, мы знаем, что каждый игрок может выбрать одну из трех стратегий. Таким образом, для каждого игрока $i \in I$ *множество стратегий* будет[1] $S_i = \{$«камень», «ножницы», «бумага»$\}$.

В-третьих, мы знаем, как выигрыши игроков зависят от тех стратегий, которые они выбрали. В нашей игре всего два игрока, причем у каждого игрока конечное число стратегий. Выигрыши игроков в такой игре можно представить в виде матрицы, каждая строка которой соответсвует одной стратегии 1-го игрока, каждый столбец — одной стратегии 2-го игрока. Каждая ячейка такой матрицы будет соответствовать одной из возможных ситуаций развития событий. Она будет содержать два числа: выигрыш 1-го игрока и выигрыш 2-го игрока. Если выигрыш от победы равен 1, выигрыш от поражения равен $-1$, а выигрыш от ничьей равен 0, то матрица выигрышей будет выглядеть так:

| | | **Игрок 2** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | «камень» | «ножницы» | «бумага» |
| **Игрок 1** | «камень» | $0;\ \ 0$ | $1; -1$ | $-1;\ \ 1$ |
| | «ножницы» | $-1;\ \ 1$ | $0;\ \ 0$ | $1; -1$ |
| | «бумага» | $1; -1$ | $-1;\ \ 1$ | $0;\ \ 0$ |

Эта матрица задает нам *функции выигрышей* игроков — т.е. то, как их выигрыши зависят от играемых стратегий.

Для того чтобы формально определить, что такое функция выигрышей (ее иногда также называют *функцией полезности*), введем следующее обозначение.

[1] «Камень-ножницы-бумага» — статическая игра: решая, какой ход делать, вы не знаете, что выбросит ваш противник. После того, как вы сделали свой ход, у вас нет возможности передумать, причем ваш противник находится в том же положении, что и вы. Примерами динамических игр являются карточная игра в «дурака», «крестики-нолики» или шахматы. Стратегия должна предписывать, какой ход надо делать в каждой из возможных игровых ситуаций. Стратегия, в таком случае, — это толстая книга, прочтя которую, доверенное вами лицо может играть в карты или шахматы так, как вы считаете нужным. Множество стратегий в такой игре — это все возможные способы написания таких книг. Более подробно о том, как решать такие игры, мы расскажем в следующей главе.

**Определение 1.1.** Пусть $S_1, \dots, S_N$ — множества. *Декартовым произведением* этих множеств называется множество

$$S \equiv \prod_{i=1}^{N} S_i = \{(s_1, \dots, s_N) \mid s_1 \in S_1, \dots, s_N \in S_N\}.$$

Если $I = \{1, \dots, N\}$ — множество игроков, $S_1, \dots, S_N$ — множества стратегий игроков, то будем говорить, что *множество профилей стратегий*, или *множество стратегий в игре*, есть $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$. Например, в нашей игре множество профилей стратегий будет $S = \{$(«камень», «камень»), («камень», «ножницы»),…,(«бумага», «бумага»)$\}$.

Любой элемент $s_i \in S_i$ называется *стратегией* игрока $i$, любой элемент $s \in S$ — *профилем стратегий* игроков. Обозначим через $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$ множество всех возможных профилей стратегий для всех игроков, кроме игрока $i$. Соответственно, $s_{-i} \in S_{-i}$ будет профилем стратегий всех игроков, кроме $i$.

Функция выигрыша игрока $i$ будет присваивать каждому профилю стратегий $s \in S$ некоторый выигрыш $u_i \colon S \to \mathbb{R}$. Назовем функцию $u \colon S \to \mathbb{R}^N = (u_1, \dots, u_N)$ *профилем функций выигрышей* игроков.

Теперь можно формально определить, что мы имеем в виду под игрой.

**Определение 1.2.** Набор $G = \langle I, S, u \rangle$ называется *игрой в нормальной форме*.

В игре каждый игрок $i$ выбирает одну стратегию из множества стратегий $S_i$. Выигрыш каждого игрока зависит как от выбранной им стратегии, так и от стратегий, выбранных другими игроками. Цель анализа игры — понять, какие стратегии игроки выберут в зависимости от множества профилей стратегий $S$ и профиля функций выигрышей $u$.

### 1.1.2. ДОМИНИРОВАНИЕ

Наша задача — составить прогноз поведения игроков в игре. Первое (и наиболее очевидное) рассуждение состоит в том, что ни один игрок не станет играть некоторую стратегию, если какая-то другая стратегия всегда приносит ему больший выигрыш.

**Определение 1.3.** Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда для игрока $i$ стратегия $s_i \in S_i$ *сильно доминирует* стратегию $s'_i \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}). \tag{1.1}$$

Стратегия $s_i \in S_i$ *слабо доминирует* стратегию $s'_i \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant u_i(s'_i, s_{-i}), \tag{1.2}$$

а хотя бы для одного $s_{-i} \in S_{-i}$ мы дополнительно имеем (1.1).

Если одна стратегия всегда приносит игроку больший выигрыш, чем другая, то мы говорим о сильном доминировании. Если у игрока есть одна стратегия, которая сильно или слабо доминирует все остальные, то мы можем ожидать, с большой долей уверенности, что он сыграет именно ее. Если такая стратегия есть у каждого игрока, то мы получили решение игры — прогноз относительно того, что сделает каждый игрок.

**Определение 1.4.** Набор стратегий $s^* \in S$ является *равновесием в сильно* (*слабо*) *доминирующих стратегиях*, если для всех $i$ и всех $s_i' \in S_i$, $s_i' \neq s_i^*$, стратегия $s_i^*$ сильно (слабо) доминирует $s_i'$.

Будем говорить, что стратегия является *доминируемой*, если ее доминирует какая-то другая стратегия.

***Дилемма заключенного.*** Два бандита — Петя и Вася — попались милиции. Их подозревают в совершении ограбления. Следователь предлагает каждому из них дать показания против своего товарища. Никаких улик против них нет: если никто из них не сознается, то каждый проведет в тюрьме всего один год за незаконное хранение оружия. Петя и Вася сидят в разных камерах и лишены возможности общаться друг с другом. Если один из них даст показания, а другой промолчит, то промолчавший проведет в тюрьме десять лет, а расколовшийся выйдет на свободу. Если оба расколются, то каждый получит по восемь лет. Формально, мы имеем $I = \{\text{Петя, Вася}\}$, $S_1 = S_2 = \{\text{«сознаться», «молчать»}\}$. Пусть выигрыш каждого равен, со знаком минус, годам, проведенным за решеткой:

| | | **Вася** | |
|---|---|---|---|
| | | «молчать» | «сознаться» |
| **Петя** | «молчать» | $-1;\ -1$ | $-10;\ 0$ |
| | «сознаться» | $0; -10$ | $-8; -8$ |

Как же поведут себя Петя и Вася? Каждому выгодно сознаться, вне зависимости от того, что сделает другой. Допустим, что Васе стало известно, что Петя промолчит. Если Вася сознается, он проведет в тюрьме 0 лет; если промолчит, то один год. Следовательно, если Петя будет молчать, то Вася расколется. Теперь предположим, что Вася знает, что Петя решил расколоться. Васе все равно выгодно сознаться (так он получит 8 лет вместо 10). Следовательно, вне зависимости от того, что сделает Петя, Вася сознается. Поскольку выигрыши симметричны, Петя тоже сознается: профиль стратегий («сознаться», «сознаться») является равновесием в сильно доминирующих стратегиях.

***Эффективность по Парето.*** Заметим, что исход «дилеммы заключенного» (8 лет тюрьмы каждому) не является наилучшим: если бы Петя и Вася сыграли стратегии $s =$ («молчать», «молчать»), то каждому из них было бы строго лучше. Это — следствие того, что мы анализируем игровую, а не оптимизационную задачу. Петя и Вася принимают решения по отдельности; если бы за них обоих решал кто-то один, максимизирующий суммарный выигрыш Пети и Васи, то он бы действительно выбрал $s =$ («молчать», «молчать»). Однако в реальности каждый решает сам за себя.

Можем ли мы сказать, какой из двух профилей стратегии является более хорошим? Наиболее строгий критерий имеет следующее формальное определение.

**Определение 1.5.** Пусть $G = \langle I, S, u\rangle$ — игра, стратегии $s, s' \in S$. Будем говорить, что профиль стратегий $s$ *Парето-доминирует* $s'$, если для всех $i \in I$

$$u_i(s) \geqslant u_i(s'), \tag{1.3}$$

причем как минимум для одного $i$ это неравенство выполняется строго.

Профиль стратегий $s^o$ является *Парето-эффективным* или *оптимальным по Парето*, если не существует стратегии $s' \in S$, которая Парето-доминирует стратегию $s^o$.

Следуя этому определению, мы будем считать, что первый профиль стратегий лучше второго, если все без исключения игроки согласны с тем, что первый профиль стратегий не хуже, причем по крайней мере один игрок считает, что первый профиль стратегий лучше. В игре «дилемма заключенного» единственный профиль стратегий, который не является Парето-эффективным — это равновесные стратегии («сознаться», «сознаться»). В этом отражена суровая правда жизни. Поведение игроков в самых разных ситуациях очень часто оставляет желать лучшего. Случается так, что существует вариант действий, который увеличил бы благосостояние всех без исключения игроков — но он не обязан являться равновесием. В итоге может показаться, что в плачевном для всех игроков исходе виновата какая-то невидимая сила, какой-то дополнительный игрок, о существовании которого мы можем только догадываться. Однако теория игр способна объяснять такие исходы, не прибегая к конспирологии. Парето-доминируемые равновесные исходы случаются, как бы это ни было печально.

***Аукцион второй цены.*** Предположим, что на продажу выставлена ранее не известная картина великого художника Виктора Михайловича Васнецова. Два богатых человека — Владимир и Михаил — решили купить эту картину. Владимир оценивает картину в $v_1$ руб., Михаил — в $v_2$ руб. (т.е. по определению, $v_1$ и $v_2$ — максимальная сумма, которую каждый из них готов заплатить за картину). Аукцион происходит по следующей схеме. Сначала Владимир и Михаил присылают свои заявки в закрытых пакетах. Картину приобретает тот, кто предложит бо́льшую сумму денег, но платит он столько, сколько указано в проигравшей заявке. Для простоты предположим, что при совпадении заявок каждый покупатель выигрывает с вероятностью $1/2$. Таким образом, если $s_1$ — это заявка Владимира, а $s_2$ — заявка Михаила, то функция выигрышей Владимира выглядит следующим образом:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} v_1 - s_2, & s_1 > s_2; \\ \dfrac{v_1 - s_1}{2}, & s_1 = s_2; \\ 0, & s_1 < s_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Докажем, что стратегия $s_1^* = v_1$ слабо доминирует все остальные. Нам надо перебрать все остальные стратегии $s_1' \in [0, \infty)$ и показать, что ни для одной $s_2 \in [0, \infty)$ мы не можем иметь $u_1(s_1', s_2) > u_1(s_1^*, s_2)$. Мы имеем

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} 0, & s_1' > s_2; \\ \dfrac{v_1 - s_2}{2}, & s_1' = s_2; \\ v_1 - s_2, & s_1' < s_2, \end{cases} \tag{1.5}$$

при $s_2 \leqslant v_1$ и

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} s_2 - v_1, & s_1' > s_2; \\ \dfrac{s_2 - v_1}{2}, & s_1' = s_2; \\ 0, & s_1' < s_2, \end{cases} \tag{1.6}$$

при $s_2 > v_1$. Обе эти величины неотрицательны. Следовательно, в аукционе второй цены слабо доминирующая стратегия состоит в том, чтобы назвать в качестве заявки свою истинную оценку.

***Выборы — два кандидата.*** Пусть $N$ (нечетное число) членов гаражного кооператива решают, за какую из двух кандидатур на должность председателя следует проголосовать. Председателем становится тот, кто получит больше половины голосов. Таким образом, $S_i = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$ для всех $i$, где «A» означает отдать голос за кандидата A, «B» — за кандидата B. Пусть избиратель $i$ получает выигрыш 1, если председателем становится первый кандидат, и 0, если председателем становится второй кандидат. Тогда стратегия $s_1 = \mathtt{A}$ слабо доминирует стратегию $s_1' = \mathtt{B}$. Действительно, пусть $D_\mathrm{A}$ — число голосов (кроме избирателя $i$), поданных за кандидата A (остальные $N - 1 - D_\mathrm{A}$ голосов отдаются за кандидата B). Пусть $u_i(s_i, D_\mathrm{A})$ — выигрыш избирателя $i$ при голосовании за кандидата $s_i \in S_i$. Тогда мы получим

$$u_i(\mathtt{A}, D_\mathrm{A}) - u_i(\mathtt{B}, D_\mathrm{A}) = \begin{cases} 1, & D_\mathrm{A} = \dfrac{N-1}{2}; \\ 0, & D_\mathrm{A} \neq \dfrac{N-1}{2}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Иными словами, голос избирателя имеет значение, только если остальные голоса разделились ровно пополам. В таком случае его голос будет решающим; если же за одного из кандидатов собираются голосовать более половины оставшихся избирателей, то голос избирателя не влияет на исход выборов (и, соответственно, его выигрыши при голосовании за кандидата A и кандидата B равны). Профиль стратегий «каждый голосует за своего любимого кандидата» является, таким образом, равновесием в слабо доминирующих стратегиях. При двух кандидатах *честное* поведение (когда каждый голосует за того, кто ему больше нравится) является рациональным, т.е. даже если избиратель знал бы, как проголосуют другие, он все равно проголосовал бы так же.

### 1.1.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ УДАЛЕНИЕ ДОМИНИРУЕМЫХ СТРАТЕГИЙ

Если равновесие в сильно доминирующих стратегиях существует, то оно является весьма обоснованным прогнозом действий игроков. К сожалению, равновесие в сильно доминирующих стратегиях встречается далеко не во всех играх. Рассмотрим такую игру:

| | | **Игрок 2** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | U | C | R |
| **Игрок 1** | U | 1; 2 | 2; 1 | 1; 0 |
| | L | 0; 5 | 1; 2 | 7; 4 |
| | D | −1; 1 | 3; 0 | 5; 2 |

В этой игре у игрока 1 нет доминирующих (и доминируемых) стратегий. Однако у игрока 2 стратегия U доминирует C. Следовательно, если игрок 2 рационален, то он не будет играть доминируемую стратегию C. Если игрок 1 знает, что игрок 2 рационален, то он может вообще не учитывать существование стратегии C у игрока 2. Следовательно, он может рассматривать следующую игру:

| | | **Игрок 2** | |
|---|---|---|---|
| | | U | R |
| **Игрок 1** | U | 1; 2 | 1; 0 |
| | L | 0; 5 | 7; 4 |
| | D | −1; 1 | 5; 2 |

Если игрок 1 (а) рационален и (б) знает о том, что игрок 2 рационален, то он не будет играть доминируемую стратегию D. С точки зрения игрока 2 (если он рационален, верит в рациональность игрока 1, а также в то, что игрок 1 верит в рациональность игрока 2), матрица игры тогда выглядит так:

| | | **Игрок 2** | |
|---|---|---|---|
| | | U | R |
| **Игрок 1** | U | 1;2 | 1;0 |
| | L | 0;5 | 7;4 |

Тогда игрок 2 не станет играть доминируемую стратегию R (т.е. он всегда будет играть U). Правда, для этого он должен быть уверен в том, игрок 1 знает о его (игрока 2) рациональности. Если игрок 1 уверен, что игрок 2 не станет играть R, то игра приобретет следующий вид:

| | | **Игрок 2** |
|---|---|---|
| | | U |
| **Игрок 1** | U | $1;2$ |
| | L | $0;5$ |

Игроку 1 остается сыграть U — конечно же, при условии выполнения следующей итерации предположений о рациональности[2]. В итоге у нас есть прогноз: $s_1^* = \mathtt{U}$, $s_2^* = \mathtt{U}$.

Процедура, которую мы проделали в этом примере, называется *последовательным удалением доминируемых стратегий*. Дадим ей формальное описание.

**Определение 1.6.** Пусть $G^1, G^2, \ldots$ — последовательность игр, полученных следующим образом. Пусть $S_i^n$ — множество стратегий игрока $i$ в игре $G^n$, полученное путем удаления сильно доминируемых стратегий из множества $S_i^{n-1}$ в игре $G^{n-1} = \langle I, S^{n-1}, u\rangle$. Пусть $S_i^\infty$ — предел последовательности $S_i^1 \supseteq S_i^2 \supseteq \ldots$. Тогда игра *разрешима по доминированию*, если $S_i^\infty$ состоит из одного элемента $s_i^\infty$ для всех $i$. Набор $s^\infty = (s_1^\infty, \ldots, s_N^\infty)$ назовем *решением игры по доминированию*.

Мы предполагаем, что множества $S_i^\infty$ существуют. При конечных множествах стратегий $S_i$ это утверждение очевидно. Кроме того, если на каждом следующем этапе мы удаляем сильно доминируемые стратегии, то порядок их удаления не влияет на итоговый результат $S^\infty$. Например, если на первом шаге мы удалим доминируемые стратегии игрока 1, а на втором шаге — доминируемые стратегии игрока 2, то от перемены порядка, в котором удаляются доминируемые стратегии игроков, результат не изменится (см. задачу 1.21). Мы получим тот же результат и в том случае, если на одном шаге удалим доминируемые стратегии сразу нескольких (или даже всех) игроков. Однако если мы удаляем не только сильно доминируемые, но и слабо доминируемые стратегии, то порядок удаления может быть важен (см. с. 21).

[2] Будем говорить, что в предельном случае рациональность является *всеобщим знанием*. Такое предположение является реалистичным, например, в том случае, когда игровое взаимодействие между несколькими субъектами повторяется много раз подряд. Если на протяжении нескольких ходов мои партнеры не играют доминируемые стратегии, то у меня есть основания полагать, что такое не произойдет и впредь. Если мои действия основаны на предположении о рациональности моих партнеров, то рано или поздно они это поймут, и т.д.

Решение игры по доминированию может не существовать: множества $S_i^\infty$ могут содержать несколько элементов. Рассмотрим такую игру:

**Игрок 2**

| **Игрок 1** | | U | C | R |
|---|---|---|---|---|
| | U | 1; 0 | 2; 1 | 0; 0 |
| | L | 0; −1 | 0; 0 | 2; 1 |
| | D | −1; 1 | −1; 0 | 1; 2 |

Мы удаляем стратегию D у игрока 1, потому что она доминируется стратегией L. Далее мы удаляем стратегию U у игрока 2 (ибо она доминируется стратегией C, если игрок 1 не играет D) и остаемся с неразрешимой по доминированию игрой

**Игрок 2**

| **Игрок 1** | | C | R |
|---|---|---|---|
| | U | 2; 1 | 0; 0 |
| | L | 0; 0 | 2; 1 |

Здесь мы имеем $S^\infty = \{\mathtt{U}, \mathtt{L}\} \times \{\mathtt{C}, \mathtt{R}\}$.

***Битва на море Бисмарка.*** Вот классический жизненный пример использования удаления доминируемых стратегий. Во Второй мировой войне на Тихом океане сражались силы Соединенных Штатов и Японии. Японский генерал Имамура планировал атаковать американские позиции в Новой Гвинее; для этого ему было необходимо перебросить значительные сухопутные силы на Новую Гвинею. Существовали два возможных пути конвоя: южный (S) и северный (N). Американцы под командованием генерала Кенни собиралась не допустить японских подкреплений. Американцы не знали, какой путь выберут японцы; для того, чтобы уничтожить японский конвой, нужно было сначала обнаружить его с воздуха (из-за шторма обе стороны знали примерное время отправки конвоя). Таким образом, у Кенни тоже были две стратегии: искать конвой на севере (N) или на юге (S). От выбора обоих генералов зависело число дней, в течение которых американская авиация могла бомбить японский конвой. При этом северный маршрут был на один день короче южного. Эту ситуацию можно представить в виде следующей игры:

**Кенни**

| **Имамура** | | N | S |
|---|---|---|---|
| | N | −2; 2 | −1; 1 |
| | S | −2; 2 | −3; 3 |

В этой игре ни у одного из игроков нет сильно доминируемых стратегий. Однако у генерала Имамуры есть слабо доминируемая стратегия: S. Она дает ему меньший выигрыш, чем N, при условии, если противник выбирает S, и равный выигрыш, если противник выбирает N. Следуя логике последовательного удаления доминируемых стратегий, Кенни должен был знать, что Имамура не станет играть стратегию S, и самому сыграть N. Так и произошло: Имамура выбрал северный путь, и довольно быстро был обнаружен. Японцы понесли большие потери и вторжение в Новую Гвинею не состоялось (хотя, вероятно, потери японцев были бы еще больше, если бы они выбрали южный путь).

***Последовательное удаление слабо доминируемых стратегий.*** При последовательном удалении слабо доминируемых стратегий решение игры по доминированию может зависеть от порядка, в котором игроки удаляют свои стратегии. Пусть в игре с двумя игроками матрица выигрышей такова[3]:

| | | **Игрок 2** | |
|---|---|---|---|
| | | L | R |
| **Игрок 1** | U | 1; 1 | 0; 0 |
| | M | 1; 1 | 2; 1 |
| | D | 0; 0 | 2; 1 |

В этой игре у первого игрока стратегия M слабо доминирует U и D. Если сначала удалить U, то в игре с оставшимися стратегиями у второго игрока R будет слабо доминировать L. Удалив L, мы приходим к двум решениям — (M, R) и (D, R). Если же сначала удалить D, то на второй итерации мы удаляем R у второго игрока и приходим к решениям (M, L) и (U, L) с другим значениями выигрышей.

### 1.1.4. РАВНОВЕСИЕ НЭША

Рассмотрим пример на с. 20. Если игрок 1 знает, что игрок 2 собирается играть C, то ему следует сыграть U. Аналогично, если игроку 2 известно намерение игрока 1 сыграть U, то ему следует сыграть C. Таким образом, профиль стратегий $s^* = (\mathtt{U}, \mathtt{C})$ является равновесным: ни одному игроку не выгодно изменить свою стратегию при условии, что другой игрок не изменит свою. Формально, $(\mathtt{U}, \mathtt{C})$ отвечает следующему определению.

**Определение 1.7.** Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда $s^* \in S$ — *равновесие Нэша*, если для всех $i$, для всех $s_i' \in S_i$, мы имеем

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i', s_{-i}^*). \tag{1.8}$$

Равновесие Нэша — это такой профиль стратегий, что ни один отдельно взятый игрок не захочет изменить свою стратегию, если стратегии оставшихся игроков останутся неизменными. Равновесие Нэша является основной концепцией решения теоретико-игровых задач в общественных

[3] [Печерский, Беляева, 2001, с. 43].

науках. Почему? Видимо, из-за того, что оно удовлетворяет определенному минимальному набору представлений о рациональности игроков. Нобелевский лауреат Роджер Майерсон так обосновал важность равновесия:

> Когда меня спрашивают, почему в какой-то игре игроки должны вести себя, как в равновесии Нэша, я отвечаю: «Почему нет?» Далее я предлагаю задавшему вопрос сформулировать свое представление о том, как должны повести себя игроки. Если эта спецификация не является равновесием Нэша, то ... она будет противоречить сама себе, если мы предположим, что игроки имеют верное представление о действиях друг друга. [Myerson, 1991, p. 106].

Иными словами, равновесие Нэша является необходимым условием «разумного» поведения игроков. Является ли это условие достаточным? То есть существуют ли игры, в которых профили стратегий, формально удовлетворяющие условиям равновесия Нэша, не могут являться разумными (с интуитивной точки зрения) прогнозами поведения игроков? К сожалению, да. Во многих динамических играх (как мы увидим в следующих главах) нам могут потребоваться более строгие условия для составления прогноза поведения игроков. Тем не менее все равно любой такой прогноз будет являться равновесием Нэша.

***Координационные игры.*** Два студента, Маша и Андрей, договорились пойти в Малый театр. Билеты куплены, и за час до встречи они садятся в метро в разных районах города Москвы. Театр находится на станции метро «Площадь революции». К сожалению, они забыли договориться, где встречаться: в метро или у входа в театр. Телефонов у них нет. Что они будут делать? У каждого два варианта действий: ждать в метро или у театра. Если они пойдут в разные места, то опоздают на спектакль. Матрица игры для них выглядит так:

| | | **Андрей** | |
|---|---|---|---|
| | | М | Т |
| **Маша** | М | 1; 1 | 0; 0 |
| | Т | 0; 0 | 1; 1 |

В этой игре два равновесия: $(\texttt{M}, \texttt{M})$ и $(\texttt{T}, \texttt{T})$, причем ни у одного из игроков нет доминирующих стратегий. Это — классический пример *координационной игры*.

Можно ли сказать, какое из нескольких возможных равновесий будет реализовано в координационной игре? Важную роль играет коммуникация между игроками. Если перед тем, как выйти из дома, Андрей передал Маше, что будет ждать ее в метро, то, скорее всего будет реализована пара стратегий $(\texttt{M}, \texttt{M})$ — несмотря на то что сообщение Андрея не является обязательным к исполнению и никто не мешает Маше прийти к театру.

При отсутствии коммуникаций важную роль играет культурный и психологический контекст игры, не отраженный в функциях выигрышей игроков. Представьте себе следующий пример. Вы и ваш товарищ — десантники, заброшенные во вражеский тыл. Вы приземлились в разных местах; для успешного проведения операции вам необходимо встретиться. Ни у одного из вас нет рации. Однако у каждого есть карта местности — такая как на рис. 1.1. Куда вы пойдете в надежде встретить своего товарища? Для большинства ответ очевиден: мост через речку. Почему? Потому что это место наиболее очевидно. Эта очевидность никак не отражена в функциях выигрышей: если вы встретитесь в любом другом месте, то ваш выигрыш будет таким же. Если вы разминетесь, то вы проиграете — вне зависимости от того, куда вы в итоге пришли.

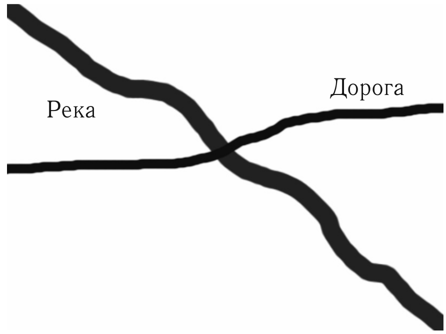

*Рис. 1.1.* Карта вражеской местности

Стратегии, похожие на точку на пересечении дороги и реки на рис. 1.1, иногда называют *фокальными точками*. Важность таких стратегий в координационных играх описана в классической книге Томаса Шеллинга [1960]. Автор спрашивал своих студентов: если бы вам надо было встретиться в Нью-Йорке с незнакомым вам человеком (который находится в том же затруднительном положении, что и вы), то в какое место (и когда) бы вы пришли? Наиболее частый ответ был: в полдень на Times Square. Конечно же, наличие таких фокальных точек зависит от однородности культурной среды, из которой происходят игроки. Человек из другой страны, впервые попавший в Нью-Йорк, вряд ли пойдет искать своего товарища по игре на Times Square, так как не знает о символическом значении, которое может иметь это место для второго игрока.

В координационной игре на выбор равновесия могут влиять не только ментальные факторы, но и история предыдущих взаимодействий игроков. Если Маша и Андрей всегда встречались в метро на станции «Площадь революции» в центре зала, то и в следующий раз они встретятся там же. Андрей, предполагая, что Маша будет ждать его в метро, придет в метро. Маша, рассуждая схожим образом, сделает то же самое. Таким образом, координационная игра обладает свойством *зависимости от истории* или *зависимости от траектории*. Если данная игра повторялась несколько раз и в ней каждый раз реализовывалось одно и то же равновесие, то и в следующий раз, скорее всего, игроки сыграют те же стратегии[4].

[4] Такие многократные взаимодействия более полно описываются динамическими играми.

Реализация одного и того же равновесия в повторяющемся игровом взаимодействии может привести к формированию социальных конвенций. Масколлел, Уинстон и Грин приводят такой пример:

> Каждый день люди, идущие на работу [в центре Нью-Йорка], должны решать, по какой стороне тротуара следует идти. Со временем формируется конвенция, согласно которой люди идут по правой стороне тротуара. Эта конвенция поддерживается, так как любой индивид, отклонившийся [от конвенции] в одностороннем порядке, будет растоптан. Конечно же, в любой день *возможно*, что какой-нибудь индивид решит идти по левой стороне, рассчитывая на то, что все остальные вдруг решат, что конвенция изменилась. Тем не менее наиболее разумный прогноз — что пешеходы и дальше будут придерживаться равновесия «все идут по правой стороне». Заметим, что поведение, для того чтобы стать устойчивой конвенцией, должно являться равновесием Нэша. Иначе индивиды начнут отклоняться от конвенции, как только та будет сформирована [Масколлел, Уинстон, Грин, 1995, с. 249; перевод автора].

## 1.1.5. ФУНКЦИИ РЕАКЦИИ

Рассмотрим матричную игру, представленную на рис. 1.2.

В левой части рис. 1.2 показано, какие стратегии игрока 1 максимизируют его выигрыш при данной стратегии игрока 2. Например, если игрок 2 выбирает стратегию `a`, то выигрыш игрока 1 максимизируется при выборе им стратегии `C`. Фактически, для каждого значения $s_2$ мы определяем одно или несколько значений $s_1$, максимизирующих выигрыш игрока 1. Аналогично, правая часть таблицы показывает, какая стратегия игрока 2 максимизирует его выигрыш для данной стратегии игрока 1. Дадим определение.

**Игрок 1**

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| A | 1;1 | 4;2 | $\boxed{4;3}$ | 2;5 |
| B | 0;2 | 1;1 | 3;2 | 0;0 |
| C | $\boxed{3;4}$ | $\boxed{5;6}$ | 2;0 | 4;1 |
| D | 2;2 | 1;1 | 3;5 | $\boxed{5;0}$ |

**Игрок 2**

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| A | 1;1 | 4;2 | 4;3 | $\boxed{2;5}$ |
| B | $\boxed{0;2}$ | 1;1 | $\boxed{3;2}$ | 0;0 |
| C | 3;4 | $\boxed{5;6}$ | 2;0 | 4;1 |
| D | 2;2 | 1;1 | $\boxed{3;5}$ | 5;0 |

*Рис. 1.2.* Наилучшие реакции для двух игроков

**Определение 1.8.** Функция реакции игрока $i$ есть точечно-множественное отображение $\check{s}_i$ между множествами $S_{-i}$ и $S_i$ такое, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ мы имеем

$$\check{s}_i(s_{-i}) = \left\{ s_i \in S_i \;\middle|\; u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s_i' \in S_i} u_i(s_i', s_{-i}) \right\}.$$

В математике *точечно-множественное отображение* между множествами $A$ и $B$ означает правило, которое каждому элементу из множества $A$ ставит в соответствие какое-то подмножество множества $B$. Функция реакции является точечно-множественным отображением, показывающим, какие стратегии игрока максимизируют его выигрыш в зависимости от профиля стратегий остальных игроков. Для профиля стратегий $s_{-i}$ может существовать несколько стратегий игрока $i$, максимизирующих его выигрыш. Например, выигрыш игрока 2 при $s_1 = \mathtt{B}$ в описанной выше игре максимизируется при $s_2 \in \check{s}_2(\mathtt{B}) = \{\mathtt{a}, \mathtt{c}\}$.

Равновесие Нэша можно определить как любой такой профиль стратегий, в котором стратегия каждого игрока является наилучшей реакцией на стратегии остальных игроков:

**Лемма 1.1.** *Профиль стратегий $s^*$ есть равновесие Нэша в том и только том случае, если для всех $i$ мы имеем*

$$s_i^* \in \check{s}_i(s_{-i}^*). \tag{1.9}$$

Данную формулировку удобно использовать для решения некоторых задач по нахождению равновесия.

***Дуополия Курно.*** Первой формальной задачей, исследованной с помощью нахождения равновесия, была модель конкуренции двух фирм, предложенная французским экономистом и математиком А.А. Курно в XIX в.

В стране $N$ имеются две фирмы-производителя виджетов[5]. Обе фирмы должны решить, какое количество виджетов следует произвести в течение ближайшего месяца. Для простоты предположим, что виджеты делимы — можно произвести (и продать) любое дробное количество. Пусть $q_1 \in [0, \infty)$ — объем производства первой фирмы, $q_2 \in [0, \infty)$ — объем производства второй. Функция спроса на виджеты имеет вид $p = 1 - q_1 - q_2$, где $p$ — максимальная цена, по которой удастся продать $q_1 + q_2$ штук в течение месяца. Предположим, что издержки производства у фирмы $i$ равны $c_i q_i$, где $0 \leqslant c_i < 1$ — издержки изготовления одной единицы товара. Прибыль фирмы равна ее выручке за вычетом издержек производства:

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 p - c_1 q_1 = q_1(1 - q_1 - q_2) - c_1 q_1, \\ u_2 &= q_2 p - c_2 q_2 = q_2(1 - q_1 - q_2) - c_2 q_2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

[5] В экономической литературе так обозначаются типовые изделия.

В этой задаче множество стратегий у каждой из двух фирм не является конечным: каждая фирма может выбрать любой неотрицательный объем производства. Функции выигрышей фирм являются непрерывными функциями от их стратегий. Если $(q_1^*, q_2^*)$ — равновесие Нэша, то $q_1^*$ должен максимизировать $u_1$ при $q_2 = q_2^*$, и наоборот. Решениями максимизационных задач фирм

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) \quad \text{и} \quad \max_{q_2} u_2(q_1, q_2) \tag{1.11}$$

будут соответственно

$$\check{q}_1(q_2) = \begin{cases} \dfrac{1-q_2-c_1}{2}, & q_2 < 1-c_1; \\ 0, & q_2 \geqslant 1-c_1; \end{cases} \quad \text{и} \quad \check{q}_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{1-q_1-c_2}{2}, & q_1 < 1-c_2; \\ 0, & q_1 \geqslant 1-c_2. \end{cases} \tag{1.12}$$

Уравнения (1.12) определяют функции реакции для первой и второй фирмы. Равновесие Нэша — это такие величины $(q_1^*, q_2^*)$, при которых объем производства первой фирмы максимизирует ее прибыль при данном объеме производства второй фирмы, и наоборот. Следовательно, равновесием будет являться любое решение системы уравнений

$$\check{q}_1(q_2) = q_1, \qquad \check{q}_2(q_1) = q_2. \tag{1.13}$$

Графики функций реакции и равновесия для разных значений $c_1$ и $c_2$ представлены на рис. 1.3.

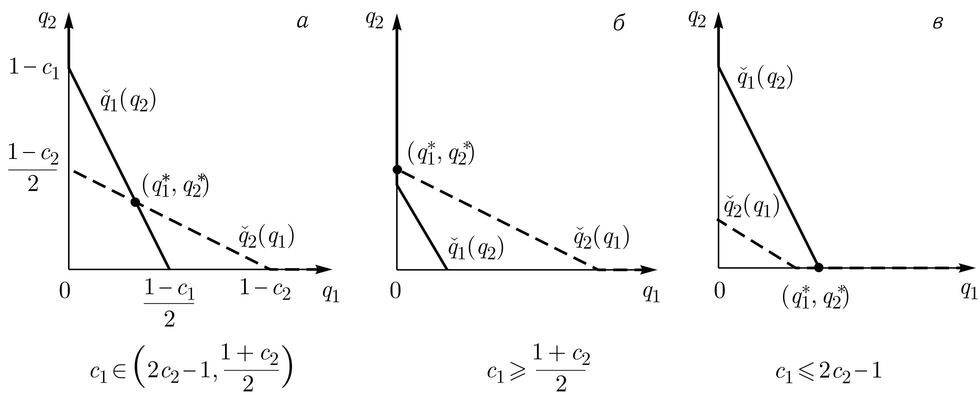


*Рис. 1.3.* Равновесие в модели дуополии Курно для разных значений $c_1$ и $c_2$

На каждом из трех рисунков сплошная линия изображает график функции реакции для фирмы 1, прерывистая линия — график функции реакции для фирмы 2. В точке пересечения этих графиков располагается равновесие.