

УДК 373:512
ББК 22.14я721
М52

Мерзляк, Аркадий Григорьевич.

М52 Математика : разделы «Алгебра» и «Арифметика» на основном государственном экзамене / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — Москва: Издательство АСТ, 2019. — 281, [7] с.: ил. — (ОГЭ-справочник).

ISBN 978-5-17-116321-1

Справочник включает темы школьного курса математики по разделам «Арифметика» и «Алгебра» и соответствует современным образовательным стандартам и программам.

Материал изложен сжато и системно: математические понятия, аксиомы, теоремы, свойства и т. д. Большое внимание уделяется практической части подготовки к экзамену. Для этого в справочник включены разборы типовых экзаменационных заданий, которые были на ОГЭ в последние годы, и заданий для отработки полученных знаний и навыков. В конце пособия даны ответы для самопроверки.

Книга будет незаменимым помощником при подготовке к выпускным экзаменам в форме ОГЭ, при изучении и закреплении нового материала, повторении пройденных тем, тренировки решения типовых экзаменационных заданий.

УДК 373:512
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-17-116321-1

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б.,
Якир М.С., 2019
© ООО «Издательство АСТ», 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	11
§ 1. Натуральные числа	13
1.1. Десятичная запись натуральных чисел . . .	13
1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем	14
1.3. Делимость натуральных чисел	16
1.4. Признаки делимости	17
1.5. Простые и составные числа	18
1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное	20
1.7. Деление с остатком	22
<i>Примеры заданий № 1</i>	23
§ 2. Дроби	27
2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей	27
2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями	30
2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей	31
2.4. Арифметические действия с десятичными дробями	33
2.5. Нахождение части от целого и целого по его части	35

2.6. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби	36
2.7. Округление чисел	38
<i>Примеры заданий № 2</i>	39
2.8. Проценты	43
2.9. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам	44
2.10. Отношение. Процентное отношение	45
2.11. Пропорции	46
2.12. Прямая и обратная пропорциональные зависимости	48
<i>Примеры заданий № 3</i>	49
§ 3. Рациональные числа	53
3.1. Целые числа. Рациональные числа	53
3.2. Координатная прямая	54
3.3. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел	55
3.4. Арифметические действия с рациональными числами	57
<i>Примеры заданий № 4</i>	58
§ 4. Целые выражения	62
4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения	62
4.2. Свойства степени с натуральным показателем	63

4.3. Одночлен	65
4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной	66
4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов	68
4.6. Квадрат суммы и квадрат разности. Формула разности квадратов	69
4.7. Формулы суммы кубов и разности кубов	71
4.8. Разложение многочленов на множители . .	72
<i>Примеры заданий № 5</i>	73
§ 5. Дробные выражения	78
5.1. Алгебраические (рациональные) дроби . . .	78
5.2. Тождество. Тождественные преобразования выражений	79
5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей	79
5.4. Действия с алгебраическими дробями . . .	81
<i>Примеры заданий № 6</i>	84
5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями	90
5.6. Стандартный вид числа	91
<i>Примеры заданий № 7</i>	92
§ 6. Корень из числа	95
6.1. Квадратный корень. Арифметический квадратный корень	95

6.2. Свойства арифметического квадратного корня	96
6.3. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни . .	98
6.4. Корень третьей степени	100
6.5. Запись корня с помощью степени с дробным показателем	100
6.6. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел	101
6.7. Понятие о множестве. Числовые множества. Множество действительных чисел	103
<i>Примеры заданий № 8</i>	105
§ 7. Уравнения с одной переменной	110
7.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной	110
7.2. Линейное уравнение с одной переменной	113
7.3. Квадратное уравнение	114
7.4. Теорема Виета	117
7.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители	118
<i>Примеры заданий № 9</i>	120
7.6. Рациональные уравнения	124
7.7. Метод замены переменной	125
<i>Примеры заданий № 10</i>	127

§ 8. Функции	134
8.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции	130
8.2. Способы задания функции	131
8.3. График функции	133
8.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции	135
8.5. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы	138
8.6. Линейная функция и её свойства. Прямая пропорциональность	140
8.7. Обратная пропорциональная зависимость. Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, и её свойства	143
<i>Примеры заданий № 11</i>	145
8.8. Квадратичная функция и её свойства	160
8.9. Функция и её свойства	165
8.10. График функции	166
8.11. Функция $y = x $ и её свойства	166
8.12. Решение уравнений графическим методом	167
<i>Примеры заданий № 12</i>	169
§ 9. Уравнения с двумя переменными	180
9.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения	180

9.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом	182
9.3. Методы решения систем двух уравнений с двумя переменными	186
<i>Примеры заданий № 13</i>	190
§ 10. Текстовые задачи	195
10.1. Решение текстовых задач с помощью уравнений	195
<i>Примеры заданий № 14</i>	198
10.2. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений	202
<i>Примеры заданий № 15</i>	205
10.3. Решение текстовых задач арифметическим способом	207
<i>Примеры заданий № 16</i>	209
§ 11. Неравенства	212
11.1. Числовые неравенства и их свойства	212
11.2. Оценка значений числовых выражений с помощью свойств числовых неравенств	214
11.3. Общие сведения о неравенствах с одной переменной	216
11.4. Числовые промежутки	218
11.5. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств	219

11.6. Квадратные неравенства	222
<i>Примеры заданий № 17</i>	<i>224</i>
§ 12. Числовые последовательности	230
12.1. Понятие последовательности	230
12.2. Способы задания последовательности . . .	231
12.3. Арифметическая прогрессия	234
12.4. Сумма n первых членов арифметической прогрессии	235
12.5. Геометрическая прогрессия. Формула сложных процентов	236
12.6. Сумма n первых членов геометрической прогрессии	240
12.7. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы	240
<i>Примеры заданий № 18</i>	<i>241</i>
§ 13. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики	245
13.1. Комбинаторные задачи. Перебор вариантов	245
13.2. Комбинаторные правила суммы и произведения	247
13.3. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков	249
13.4. Статистика. Статистические характеристики	251

13.5. Частота и вероятность случайного события	253
13.6. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности	255
13.7. Представление о геометрической вероятности	257
<i>Примеры заданий № 19</i>	259
Ответы к примерам заданий	267

ВВЕДЕНИЕ

На основной государственный экзамен (ОГЭ) по математике выносятся темы, рассматриваемые в курсах математики 5–6 классов, алгебры и геометрии 7–9 классов. Основой подготовки к ОГЭ является организация систематического повторения материала, изученного в 5–9 классах. Существует целый ряд способов реализации этой задачи. Например, можно использовать школьные учебники. Неудобства такого подхода очевидны: во-первых, надо иметь под рукой все школьные учебники по математике соответствующих этапов её изучения; во-вторых, поиск необходимого материала может привести к немалой потере времени. Гораздо удобнее использовать пособие, в котором в краткой форме изложены базовые факты: определения, теоремы, формулы, свойства математических объектов и т. п. Именно такую книгу вы держите в руках. Она представляет собой справочник для подготовки к ОГЭ по математике по разделам «Арифметика» и «Алгебра».

Это пособие содержит не только теоретический материал, необходимый для решения вариантов ОГЭ, но и значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач.

Данный справочник выполняет также и свою традиционную роль — позволяет быстро найти нужную информацию: какими свойствами обладает степень с целым показателем, чему равна сумма n первых членов геометрической прогрессии, как найти дробь от числа и т. п.

Справочник соответствует содержанию курсов математики 5–6 классов и алгебры 7–9 классов основной школы. Материал разбит на параграфы. Их

содержание отвечает кодификатору, на основании которого формируются задания для проведения ОГЭ по математике.

Понятно, что для успешного написания ОГЭ необходимо уметь решать задачи. Поэтому в справочник включён обширный дидактический материал. Каждый параграф содержит одну или две (в зависимости от объёма материала) проверочные работы в рубрике «Примеры заданий». Такое название рубрики связано с тем, что большинство представленных в ней задач аналогичны или близки по содержанию и форме к заданиям, предлагавшимся в разные годы на ОГЭ по математике.

Большинство проверочных работ состоит из двух частей. Задания второй части более сложные. Поэтому советуем приступать к их решению после того, как будут выполнены задания первой части.

Некоторые задания первой части представляют собой задачи, решение которых заключается в выборе одного правильного ответа из четырёх предложенных. Для таких задач в рубрике «Ответы к примерам заданий» указан номер правильного ответа.

Желаем вам успешной сдачи основного государственного экзамена по математике.

В связи с возможными изменениями в формате и количестве заданий рекомендуем в процессе подготовки к экзамену обращаться к материалам сайта официального разработчика экзаменационных заданий — Федерального института педагогических измерений: www.fipi.ru.

§ 1. Натуральные числа

1.1. Десятичная запись натуральных чисел

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т. д., используемые при счёте предметов, называют **натуральными**.

Все натуральные числа, записанные в порядке возрастания, образуют **ряд натуральных чисел** (или натуральный ряд). Первым числом натурального ряда является число 1, вторым — число 2, третьим — число 3 и т. д.

В натуральном ряде за каждым числом следует ещё одно число, большее предыдущего на единицу. Поэтому в натуральном ряде нет последнего числа. Следовательно, среди натуральных чисел есть наименьшее число — это число 1, но нет наибольшего.

Натуральные числа записывают с помощью специальных знаков, которые называют **цифрами**. Этим цифр десять:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

В записи числа в зависимости от места, занимаемого цифрой, она может обозначать разные числа. Например, в числе 172 цифра 7 обозначает число семьдесят, а в числе 7549 — обозначает число семь тысяч.

Место, занимаемое цифрой в записи числа, называют **разрядом**.

Если считать справа налево, то первое место в записи числа называют **разрядом единиц**, второе —

разрядом десятков, третье — **разрядом сотен** и т. д. Например, в числе 7049 имеем 9 единиц разряда единиц, 4 единицы разряда десятков, 0 единиц разряда сотен и 7 единиц разряда тысяч.

Запись натуральных чисел, которой мы пользуемся, называют **десятичной**. Такое название связано с тем, что десять единиц каждого разряда составляют одну единицу следующего старшего разряда.

1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем

Если по двум данным числам по некоторому правилу определяют третье число, то этот процесс в математике называют **действием**.

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями**.

В равенстве $a + b = c$ числа a и b называют **слагаемыми**, число c и запись $a + b$ — **суммой**.

В равенстве $a - b = c$ число a называют **уменьшаемым**, число b — **вычитаемым**, число c и запись $a - b$ — **разностью**.

В равенстве $a \cdot b = c$ числа a и b называют **множителями**, а число c и запись $a \cdot b$ — **произведением**.

В равенстве $a : b = c$ число a называют **делимым**, число b — **делителем**, число c и запись $a : b$ — **частным**.

Арифметические действия обладают следующими свойствами.

1. **Переместительное свойство сложения**. От перестановки слагаемых сумма не меняется:

$$a + b = b + a.$$

2. **Сочетательное свойство сложения**. Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к

первому числу прибавить сумму второго и третьего чисел:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3. Переместительное свойство умножения. От перестановки множителей произведение не меняется:

$$ab = ba.$$

4. Сочетательное свойство умножения. Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел:

$$(ab)c = a(bc).$$

5. Распределительное свойство умножения относительно сложения. Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Степенью числа a с натуральным показателем n , бóльшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \text{ где } n > 1.$$

Степенью числа a с показателем 1 называют само это число:

$$a^1 = a.$$

Например, $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Вторую степень числа называют **квадратом числа**. Например, запись a^2 читают « a в квадрате». Третью степень числа называют **кубом числа** и запись a^3 читают « a в кубе».