СОДЕРЖАНИЕ

Глава I. **Физические основы механики** 5
I.1. Кинематика материальной точки 5
I.1.А. Основные формулы 5
I.1.Б. Примеры решения задач 6
I.1.В. Задачи для самостоятельной работы 14
I.2. Динамика материальной точки и тела, движущегося поступательно 18
I.2.А. Основные формулы 18
I.2.Б. Примеры решения задач 20
I.2.В. Задачи для самостоятельной работы 26
I.3. Работа. Мощность. Энергия. Закон сохранения энергии 30
I.3.А. Основные формулы 30
I.3.Б. Примеры решения задач 31
I.3.В. Задачи для самостоятельной работы 34
I.4. Динамика твердого тела 40
I.4.А. Основные формулы 40
I.4.Б. Примеры решения задач 42
I.4.В. Задачи для самостоятельной работы 46
I.5. Релятивистская механика 51
I.5.А. Основные формулы 51
I.5.Б. Примеры решения задач 52
I.5.В. Задачи для самостоятельной работы 54

Часть II. **Основы термодинамики и статистической физики** 57
II.1. Законы идеальных газов. Молекулярно-кинетическая теория газов 57
II.1.А. Основные формулы 57
II.1.Б. Примеры решения задач 59
II.1.В. Задачи для самостоятельной работы 60
II.2. Физические основы термодинамики 63
II.2.А. Основные формулы 63
II.2.Б. Примеры решения задач 65
II.2.В. Задачи для самостоятельной работы 67

Часть III. **Основы классической теории электромагнетизма** 74
III.1. Закон Кулона. Взаимодействие заряженных тел. Напряженность электрического поля. Электрическое смещение. Теорема Остроградского—Гаусса 74
III.1.А. Основные формулы 74
III.1.Б. Примеры решения задач 76
III.1.В. Задачи для самостоятельной работы 84

III.2. Потенциал. Энергия системы электрических зарядов. Работа по перемещению заряда в поле. Электрический диполь. Электроемкость. Конденсаторы. Энергия заряженного проводника. Энергия электрического поля 89
III.2.А. Основные формулы 89
III.2.Б. Примеры решения задач 92
III.2.В. Задачи для самостоятельной работы 101
III.3. Постоянный электрический ток. Проводимость 106
III.3.А. Основные формулы 106
III.3.Б. Примеры решения задач 108
III.3.В. Задачи для самостоятельной работы 114
III.4. Магнитное поле постоянного тока. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле. Закон полного тока. Магнитный поток 121
III.4.А. Основные формулы 121
III.4.Б. Примеры решения задач 124
III.4.В. Задачи для самостоятельной работы 134
III.5. Электромагнетизм. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле. Электромагнитная индукция. Индуктивность. Энергия магнитного поля. Уравнения Максвелла 141
III.5.А. Основные формулы 141
III.5.Б. Примеры решения задач 143
III.5.В. Задачи для самостоятельной работы 153

Часть IV. **Колебания и волны** 161
IV.1. Колебательное движение 161
IV.1.А. Основные формулы 161
IV.1.Б. Примеры решения задач 164
IV.1.В. Задачи для самостоятельной работы 174
IV.2. Волновые процессы 182
IV.2.А. Основные формулы 182
IV.2.Б. Примеры решения задач 185
IV.2.В. Задачи для самостоятельной работы 190

Часть V. **Основы волновой оптики** 196
V.1. Интерференция 196
V.1.А. Основные формулы 196
V.1.Б. Примеры решения задач 197
V.1.В. Задачи для самостоятельной работы 202
V.2. Дифракция света 205
V.2.А. Основные формулы 205
V.2.Б. Примеры решения задач 207
V.2.В. Задачи для самостоятельной работы 210
V.3. Поляризация света 213
V.3.А. Основные формулы 213
V.3.Б. Примеры решения задач 214
V.3.В. Задачи для самостоятельной работы 216

Часть VI. **Основы квантовой механики** 219
VI.1. Тепловое излучение 219
VI.1.А. Основные формулы 219
VI.1.Б. Примеры решения задач 221
VI.1.В. Задачи для самостоятельной работы 223

VI.2. Квантовая природа света 225
VI.2.А. Основные формулы 225
VI.2.Б. Примеры решения задач 226
VI.2.В. Задачи для самостоятельной работы 229
VI.3. Волновые свойства микрочастиц 231
VI.3.А. Основные формулы 231
VI.3.Б. Примеры решения задач 232
VI.3.В. Задачи для самостоятельной работы 236
VI.4. Простейшие случаи движения микрочастиц 239
VI.4.А. Основные формулы 239
VI.4.Б. Примеры решения задач 242
VI.4.В. Задачи для самостоятельной работы 247
VI.5. Строение атома 250
VI.5.А. Основные формулы 250
VI.5.Б. Примеры решения задач 253
VI.5.В. Задачи для самостоятельной работы 259

Часть VII. **Основы теории строения вещества. Физика микромира** 263
VII.1. Элементы физики твердого тела. Тепловые свойства кристаллов. Квантовая теория электронов в металле 263
VII.1.А. Основные формулы 263
VII.1.Б. Примеры решения задач 266
VII.1.В. Задачи для самостоятельной работы 271
VII.2. Физика атомного ядра 275
VII.2.А. Основные формулы 275
VII.2.Б. Примеры решения задач 279
VII.2.В. Задачи для самостоятельной работы 285

Часть VIII. **Варианты типовых расчетов** 290
VIII.1. Типовой расчет по теме «Физические основы механики» 290
VIII.2. Типовой расчет по теме «Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамики» 301
VIII.3. Типовой расчет по теме «Электростатика» 309
VIII.4. Типовой расчет по теме «Постоянный ток. Магнитное поле». 318
VIII.5. Типовой расчет по теме «Колебания и волны» 325
VIII.6. Типовой расчет по теме «Оптика. Тепловое излучение. Кванты света» 332
VIII.7. Типовой расчет по теме «Основы квантовой механики» 340
VIII.8. Типовой расчет по теме «Классическая и квантовая статистика. Основы строения вещества» 348

Приложение. **Справочный материал** 359

Ответы 369
I. Физические основы механики 369
II. Основы термодинамики и статистической физики 371
III. Основы классической теории электромагнетизма 372
IV. Колебания и волны 375
V. Основы волновой оптики 377
VI. Основы квантовой механики 378
VII. Основы теории строения вещества 379

ПРЕДИСЛОВИЕ ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемый вашему вниманию сборник упражнений и задач по физике входит в состав учебно-методического комплекта, включающего также учебник «Основы физики» в двух томах. Авторский коллектив комплекта — д-р физ.-мат. наук Н. П. Калашников и д-р физ.-мат. наук М. А. Смондырев — авторитетные ученые и преподаватели высшей школы. Николай Павлович постарался подобрать в сборник самые яркие и оригинальные упражнения и задачи, иллюстрирующие основные физические законы и помогающие уяснить физический смысл и масштабы физических явлений. Михаил Александрович внес значительный вклад в разработку методических рекомендаций по решению задач. Ясность, четкость и доступность методического аппарата — основные и несомненные достоинства сборника.

Издательство выражает искреннюю признательность консультантам задачника — канд. физ.-мат. наук Ирине Яковлевне Ицхоки и канд. физ.-мат. наук Андрею Станиславовичу Ольчаку за их мудрые и полезные советы.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Систематическое решение физических задач — необходимое условие успешного изучения курса физики. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти основные физические законы, прививает навыки практического применения теоретических знаний, знакомит с характерными масштабами явлений и порядками физических величин, встречающихся на практике.

При решении физических задач полезно придерживаться определенного порядка действий:

1. Слева записать исходные данные задачи вместе с их числовыми значениями, искомые в задаче величины и табличные значения используемых физических параметров.
2. Выразить исходные данные в Международной системе единиц (СИ). Исключение из этого правила допускается лишь для однородных величин, входящих в ответ в виде отношения: в таком случае они могут быть выражены в любой (но в одной и той же) системе единиц.
3. Сделать чертеж, схему или рисунок с обозначениями исходных данных в соответствии с условием задачи.
4. Установить физические законы, отвечающие содержанию задачи. Записать, из какого закона (законов), определения или физического соотношения можно найти искомую величину.
5. Решить задачу в общем виде, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии.
6. Проверить размерности. Полученные единицы измерений должны совпадать с размерностями искомых в задаче величин.
7. Произвести вычисления.
8. Привести в ответе числовое значение с сокращенным наименованием единицы измерения.

Часть I

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

I.1. Кинематика материальной точки

I.1.A. Основные формулы

- Положение материальной точки в пространстве в момент времени t определяется радиус-вектором $\vec{r}$ (рис. 1).
- Средняя скорость $\langle \vec{v} \rangle = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ (см. рис. 1).

  Средняя путевая скорость $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, где Δs — путь, пройденный точкой за интервал времени Δt (см. рис. 1).
  Мгновенная скорость $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.
- Мгновенное ускорение $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

  При криволинейном движении ускорение можно представить как сумму нормальной $\vec{a}_n$ и тангенциальной $\vec{a}_\tau$ составляющих (рис. 2): $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Абсолютные значения этих ускорений

$$a_n = \frac{v^2}{R}\,; \quad a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

  где R — радиус кривизны в данной точке траектории.
- Движение с постоянным ускорением

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,.$$

  Проекция радиус-вектора $\vec{r}$ на ось x имеет вид

$$r_x(t) = x(t) = x_0 + v_{0,x}t + \frac{a_x t^2}{2}\,.$$

  Скорость точки при равнопеременном движении $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$.

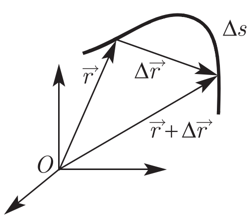


Рис. 1. Положение материальной точки в пространстве в момент времени t

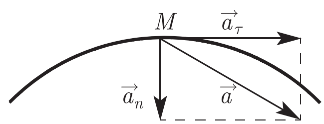


Рис. 2. Мгновенное ускорение при криволинейном движении

- При вращательном движении твердого тела вокруг фиксированной оси роль перемещения $\Delta\vec{r}$ играет вектор малого поворота на угол $\Delta\vec{\varphi}$. Он направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта.
- Угловая скорость $\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$.
- Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$.
- Равнопеременное вращение тела вокруг неподвижной оси
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\,; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$
Здесь знак вектора для угловых скорости и ускорения опущен, так как эти векторы коллинеарны, а ω и ε понимаются в алгебраическом смысле (с учетом их знаков).
- Связь угловых величин с линейными: путь, пройденный точкой по дуге окружности радиусом R, равен $\Delta s = R\Delta\varphi$, линейная скорость этой точки $v = \omega R$, тангенциальное ускорение точки $a_\tau = \varepsilon R$, нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, полное ускорение $a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.
- Частота вращения ν связана с угловой скоростью соотношением $\omega = 2\pi\nu$; период вращения (время одного оборота) $T = \dfrac{1}{\nu}$.

I.1.Б. Примеры решения задач

Пример 1. Автомобиль первую половину времени движется с постоянной скоростью $v_1 = 72$ км/ч, а вторую половину времени — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Найти среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$ автомобиля.

Решение. Введем обозначения: t_0 — момент начала движения, t_1 — момент смены скорости, t_2 — момент окончания движения. По условию $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$, а полное время движения равно $(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) = t_2 - t_0 = 2(t_1 - t_0) = 2(t_2 - t_1)$. На первом этапе будет пройден путь $s_1 = v_1(t_1 - t_0) = v_1(t_2 - t_0)/2$, на втором — путь $s_2 = v_2(t_2 - t_1) = v_2(t_2 - t_0)/2$. Полный пройденный путь равен сумме этих путей:
$$s = s_1 + s_2 = \frac{v_1 + v_2}{2}\,(t_2 - t_0).$$
Согласно определению средней путевой скорости находим:
$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_2 - t_0} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{72 + 40}{2} = 56 \text{ км/ч}.$$

Пример 2. Решить аналогичную задачу, т. е. определить среднюю путевую скорость, если автомобиль двигался с той же скоростью v_1 первую половину пути (а не времени), а его вторую половину со скоростью v_2.

Решение. В этом случае $s_1 = s_2 = s/2$. Время движения на первом участке пути $t_1 - t_0 = s_1/v_1 = s/(2v_1)$; на втором участке $t_2 - t_1 = s_2/v_2 = s/(2v_2)$. Полное время движения
$$t_2 - t_0 = (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0) = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = s\,\frac{v_1 + v_2}{2v_1 v_2}\,,$$
откуда средняя скорость движения
$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_2 - t_0} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2\cdot 72\cdot 40}{72 + 40} = 51{,}4 \text{ км/ч}.$$

Пример 3. Положение объекта на прямой линии (ось x) в зависимости от времени дается уравнением $x = at + bt^2 + ct^3$, где $a = 3$ м/с, $b = -4$ м/с^2, $c = 1$ м/с^3. Найти среднюю скорость объекта на временно́м интервале от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 4$ с. Сравнить полученное значение с мгновенными скоростями v_1 и v_2 в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

Решение. Координата объекта в момент времени $t_1 = 2$ с равна $x_1 = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = -2$ м. Аналогично, в момент времени $t_2 = 4$ с объект находится в точке с координатой $x_2 = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^3 = 12$ м. Перемещение $\Delta x = x_2 - x_1 = 14$ м произошло за время $\Delta t = t_2 - t_1 = 2$ с. Средняя скорость объекта на данном временно́м интервале равна $\langle v \rangle = \Delta x / \Delta t = 7$ м/с.

Для определения мгновенной скорости $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ берем производную по времени: $v = a + 2bt + 3ct^2$, откуда $v_1 = 3 - 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = -1$ м/с и $v_2 = 3 - 2 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 4^2 = 19$ м/с.

Пример 4. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x = A + Bt + Ct^2$, где $A = 5$ м, $B = 4$ м/с, $C = -1$ м/с^2. Найти: 1) максимальное значение координаты $x(t)$; 2) момент времени T, когда точка возвращается в то же место, где она была в начальный момент $t = 0$; 3) среднюю скорость $\langle v_x \rangle$ за интервал времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с; 4) среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$ за тот же интервал времени.

Построить графики зависимости от времени координаты x и пути s, пройденного точкой с момента $t = 0$.

Решение.

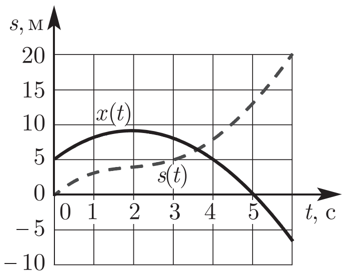
1) В момент $t = 0$ значение координаты равно $x(0) = A = 5$ м. Зависимость скорости от времени дается линейным уравнением $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct$. В начальный момент времени скорость $v(0) = B = 4$ м/с положительна, т. е. точка движется в направлении возрастания координаты x и ее координата увеличивается. Скорость же с течением времени падает и в момент $t_{\max} = -\dfrac{B}{2C} = 2$ с обращается в нуль, а затем становится отрицательной. Это значит, что в момент $t_{\max}$ точка остановилась, а затем стала двигаться в направлении уменьшения координаты x. Стало быть, в момент времени $t_{\max}$ координата точки достигла своего максимального значения:

$$x_{\max} = A + Bt_{\max} + Ct_{\max}^2 = A - \frac{B^2}{4C} = 9 \text{ м}.$$

2) По условию задачи координаты точки в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ совпадают, т. е. $A = A + BT + CT^2$. Отсюда $T = -\dfrac{B}{C} = 4$ с.

3) Теперь находим положение точки в данные моменты времени t_1 и t_2: $x_1 = x(t_1) = A + Bt_1 + Ct_1^2 = 8$ м; $x_2 = x(t_2) = A + Bt_2 + Ct_2^2 = -7$ м. Зная изменение координаты $\Delta x = x_2 - x_1 = -15$ м за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1 = 5$ с, определяем среднюю скорость за этот интервал времени:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -3 \text{ м/с}.$$



t	0	1	2	3	4	5	6
x	5	8	9	8	5	0	–7
s	0	3	4	5	8	13	20

Рис. 3

4) График зависимости координаты от времени $x(t)$ представляет собой в данном случае параболу, обращенную выпуклостью вверх (коэффициент C отрицателен) и с вертикальной осью симметрии. Трех из уже найденных пар координат $(0,5)$, $(4,5)$, $(2,9)$ достаточно для построения графика (сплошная линия на рис. 3). Видно, что в момент t_1 точка находится на восходящей ветви параболы, а в момент t_2 — на ее нисходящей ветви. Поэтому пройденный точкой путь Δs складывается из двух частей: $\Delta s_1 = x_{\max} - x_1 = 1$ м на отрезке времени от t_1 до $t_{\max}$ и $\Delta s_2 = x_{\max} - x_2 = 9 - (-7) = 16$ м на отрезке времени от $t_{\max}$ до t_2. Полный пройденный путь равен $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 17$ м, откуда средняя путевая скорость $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 17/5 = 3{,}4$ м/с. Заметим, что величина $v_{\text{ср}}$ всегда положительна.

К произвольному моменту времени $t \leqslant t_{\max}$ точка проходит путь $s(t) = x(t) - x(0) = Bt + Ct^2$. Эта часть графика представляет собой ту же параболу, все точки которой смещены вниз на величину $A = 5$ м. Если же произвольный момент времени $t \geqslant t_{\max}$, то пройденный путь складывается из пути $x_{\max} - x(0)$, пройденного за время от $t = 0$ до $t_{\max}$, и пути $x_{\max} - x(t)$, пройденного за время от $t_{\max}$ до t. В результате для моментов времени $t \geqslant t_{\max}$ получаем следующее выражение для пройденного пути:

$$s(t) = 2x_{\max} - x(0) - x(t) = \frac{-B^2}{2C} - Bt - Ct^2.$$

График этой части представляет собой отражение относительно прямой $x = 9$ нисходящей ветви графика $x(t)$, все точки которой после отражения смещены по вертикали так, что обе найденные ветви графика $s(t)$ совпадают в точке $t_{\max}$. Подставляя числовые значения коэффициентов A, B, C, выражения для обеих ветвей функции $s(t)$ можно объединить в одно: $s(t) = 4 + (t-2)|t-2|$. Зависимость пройденного пути $s(t)$ от времени изображена на рис. 3 пунктирной линией.

Проверим наши вычисления средней путевой скорости. К моменту $t_1 = 1$ с пройденный путь равен $s(t_1) = 4 - 1 = 3$ м, к моменту $t_2 = 6$ с он составляет $s(t_2) = 20$ м. Поэтому путь, пройденный за интервал времени между t_1 и t_2, равен $\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = 17$ м, что совпадает с полученным ранее результатом и приводит, естественно, к той же самой средней скорости.

Пример 5. Материальная точка движется по прямой согласно уравнению

$$x(t) = A_1 t + A_2 t^3; \quad A_1 = 4 \text{ м/с}; \quad A_2 = -2 \text{м/с}^3.$$

Найти положение, скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Положение точки $x(2) = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3 = -8$ м, ее скорость $v(t) = \dot{x}(t) = A_1 + 3A_2t^2$, поэтому $v(2) = 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2^2 = -20$ м/с. Ускорение $a(t) = \dot{v}(t) = 6A_2t$, отсюда $a(2) = -6 \cdot 2 \cdot 2 = -24$ м/с^2.

Пример 6. Автомобиль движется по прямой из пункта A в пункт B, преодолевая это расстояние за время $T = 1$ ч. Известно, что скорость автомобиля меняется по закону $v(t) = v_0 \sin\left(\frac{\pi}{T}\, t\right)$, где время t отсчитывается с момента выезда из пункта A, а максимальная скорость автомобиля $v_0 = 80$ км/ч. Определить среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$ автомобиля и расстояние S между пунктами A и B.

Решение. Поскольку на заданном интервале времени скорость автомобиля всегда положительна, средняя путевая скорость в этой задаче совпадает со средней скоростью. Если отсчитывать расстояния от пункта A, то в момент времени t удаление автомобиля составит

$$x(t) = \int\limits_0^t \mathrm{d}t v(t) = v_0 \int\limits_0^t \sin\left(\frac{\pi}{T}\, t\right) \mathrm{d}t = \frac{v_0 T}{\pi} \left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right).$$

Удаление в начальный момент равно нулю: $x(0) = 0$ м; удаление в момент прибытия в пункт B равно $x(T) = 2v_0T/\pi$. Отсюда следует, что расстояние между пунктами равно $S = x(T) - x(0) = 2v_0T/\pi \approx$ $\approx 50{,}9$ км, а средняя путевая скорость $v_{\text{ср}} = S/T = 2v_0/\pi \approx 50{,}9$ км/ч.

Пример 7. Автомобиль движется по прямой из пункта A в пункт B, расстояние между которыми $S = 1$ км. Скорость автомобиля меняется в зависимости от пройденного пути s по закону $v(s) = v\sqrt{\frac{s}{S}}$, где $v = 72$ км/ч — скорость автомобиля в конце пути. Определить скорость автомобиля v_1 через время $t_1 = 1$ мин после начала движения, полное время в пути T и среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$.

Решение. Мгновенная скорость определяется как $v(s) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$. Поскольку скорость задана как функция расстояния, разделим переменные $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/v(s)$, после чего проинтегрируем это соотношение:

$$t = \int\limits_0^s \frac{\mathrm{d}s}{v(s)} = \frac{\sqrt{S}}{v} \int\limits_0^s \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}} = \frac{2\sqrt{sS}}{v}.$$

Отсюда находим s и v как функции времени:

$$s(t) = \frac{v^2t^2}{4S}; \quad v(t) = \dot{s}(t) = \frac{tv^2}{2S}.$$

Поскольку $t_1 = 1$ мин $= (1/60)$ ч, то легко определяем скорость $v_1 = v(t_1) = 72^2(1/60)/(2 \cdot 1) = 43{,}2$ км/ч. Из соотношения $s(T) = S$ находим полное время в пути: $T = 2S/v = 2/72 = 1/36$ ч $= 1$ мин 40 с. Средняя путевая скорость $v_{\text{ср}} = S/T = v/2 = 36$ км/ч.

Пример 8. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 19{,}6$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту.

Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) наименьшую скорость тела во время движения; 2) координаты точки, в которой угол между направлениями скорости и ускорения $\beta = 45^\circ$; 3) тангенциальное и нормальное ускорения в начале и конце траектории, а также в ее высшей точке.

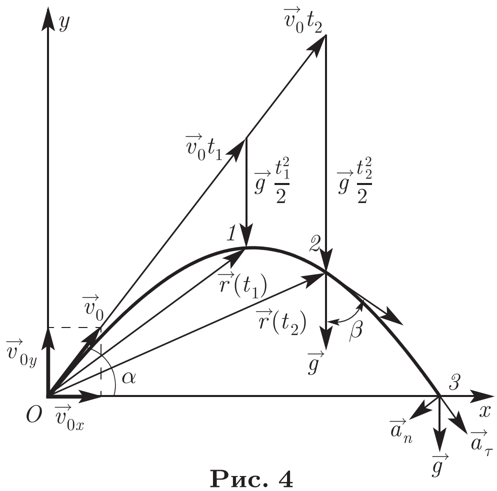


Рис. 4

Решение. Введем координатные оси, направленные по горизонтали (Ox) и вертикали (Oy), поместим начало координат в ту точку, где находилось тело в начальный момент времени (рис. 4). Движение в поле сил тяжести происходит с постоянным ускорением $\vec{g}$ ($g_x = 0$; $g_y = -g$).

Скорость и перемещение тела определяются уравнениями

$$\vec{r}\,(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\,; \quad \vec{v}\,(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

В любой момент времени t радиус-вектор $\vec{r}$ можно представить как сумму двух векторов: перемещения $\vec{v}_0 t$ в отсутствие силы тяжести и перемещения $\vec{g}t^2/2$ свободного падения в отсутствие начальной скорости.

Начальную скорость $\vec{v}_0$ разложим на две составляющие:

$$\vec{v} = \{v_0 \cos\alpha; \quad v_0 \sin\alpha\}$$

и запишем уравнения движения тела в проекциях на координатные оси:

$$x = v_0 t \cos\alpha; \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Соответственно для скорости имеем уравнения

$$v_x = v_0 \cos\alpha; \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

т. е. движение в горизонтальном направлении происходит с постоянной скоростью, а движение в вертикальном направлении является равнопеременным. В момент времени $t_1 = \frac{v_0}{g}\sin\alpha$ вертикальная составляющая скорости обращается в нуль (точка *1* на рис. 4). Это и есть точка наивысшего подъема тела. В ней тело имеет наименьшую скорость $v_{\min} = v_x = v_0 \cos\alpha$. Подставляя числовые значения, находим $v_{\min} = 9{,}8$ м/с.

Поскольку ускорение направлено вертикально вниз, котангенс угла между скоростью и ускорением выражается как $\operatorname{ctg}\beta = -\dfrac{v_y}{v_x}$. Учитывая указанную зависимость компонент скорости от времени, находим момент времени, в который угол между скоростью и ускорением равен β:

$$t_\beta = \frac{v_0}{g}\,(\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{ctg}\beta).$$

Подставляя этот момент времени в уравнения перемещения тела, получаем зависимость координат от β:

$$x_\beta = \frac{v_0^2}{g}\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{ctg}\beta);$$

$$y_\beta = \frac{v_0^2}{2g}\,(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \operatorname{ctg}^2\beta).$$

Используя исходные числовые значения, находим координаты точки *2*, в которой $\beta = 45^\circ$: $x_2 = 26{,}8$ м, $y_2 = 9{,}8$ м.

Полное ускорение в любой точке траектории равно по модулю g и направлено вниз. Тангенциальное ускорение всегда направлено по касательной к траектории параллельно скорости. В высшей точке траектории (точка *1* на рис. 4) тангенциальное ускорение равно нулю ($a_\tau = a_x = 0$). Соответственно $a_n = g$. В конечной точке траектории (точка *3* на рис. 4) из треугольника ускорений $\vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{g}$ получаем

$$a_\tau = g\sin\alpha = 8{,}5\ \text{м/с}^2; \quad a_n = g\cos\alpha = 4{,}9\ \text{м/с}^2.$$

Такие же соотношения справедливы и для начальной точки траектории (точка O на рис. 4).

Пример 9. Автомашина начинает движение с нулевой скоростью по прямому пути сначала с ускорением $a = 5$ м/с^2, затем движется равномерно и, наконец, замедляется до остановки с тем же по модулю ускорением a. Полное время движения $\tau = 25$ с. Средняя путевая скорость оказалась равной $v_{\text{ср}} = 72$ км/ч. Сколько времени T автомашина двигалась равномерно? Найти скорость равномерного движения.

Решение. Обозначим через T' время, в течение которого автомобиль двигался равноускоренно. За это время он прошел расстояние $s_1 = aT'^2/2$ и набрал скорость $v_0 = aT'$. Двигаясь равнозамедленно, автомобиль затратит такое же время T', чтобы его скорость уменьшилась до нуля, и пройдет такой же путь $s_3 = aT'^2/2$.

Полное время движения $\tau = T + 2T'$, откуда $T' = (\tau - T)/2$. Длина участка равномерного движения

$$s_2 = v_0 T = aT'T.$$

Складывая s_1, s_2, s_3 и подставляя выражение для времени ускорения T', получаем полный пройденный путь

$$s = \frac{a\,(\tau - T)^2}{4} + \frac{aT\,(\tau - T)}{2} = \frac{a\,(\tau^2 - T^2)}{4}\,.$$

Разделив s на полное время движения, найдем среднюю путевую скорость:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{\tau} = \frac{a(\tau^2 - T^2)}{4\tau}.$$

Отсюда искомое время равномерного движения

$$T = \tau\sqrt{1 - \frac{4v_{\text{ср}}}{a\tau}}.$$

Подставим сюда значения a, τ и $v_{\text{ср}} = 72$ км/ч $= 72 \cdot 1000/(60 \cdot 60) =$ $= 20$ м/с:

$$T = 25\sqrt{1 - \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 25}} = 15 \text{ с}.$$

Скорость равномерного движения равна

$$v_0 = a(\tau - T)/2 = 5(25 - 15)/2 = 25 \text{ м/с}.$$

Пример 10. Тормозящий автомобиль движется по прямой. Абсолютная величина ускорения зависит от его текущей скорости по закону $a = a_0\sqrt{v/v_0}$, где начальные (при $t = 0$) значения скорости и ускорения автомобиля равны $v_0 = 90$ км/ч и $a_0 = 10$ м/с^2. Какой путь s пройдет автомобиль до остановки? За какое время T этот путь будет пройден?

Решение. Сначала найдем зависимость скорости автомобиля от времени. Поскольку автомобиль тормозит и a — абсолютная величина ускорения, имеем

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -a = -a_0\sqrt{\frac{v}{v_0}}.$$

Преобразуем, а затем проинтегрируем это уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}} = -\frac{a_0}{\sqrt{v_0}}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}} = -\frac{a_0}{\sqrt{v_0}}\int \mathrm{d}t + c \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{v} = -\frac{a_0}{\sqrt{v_0}}\,t + 2\sqrt{v_0}.$$

Значение произвольной постоянной интегрирования (второе слагаемое в правой части) выбрано так, чтобы удовлетворялось начальное условие $v = v_0$ при $t = 0$. Отсюда скорость

$$v = v_0\left(1 - \frac{a_0 t}{2v_0}\right)^2.$$

При $t = 2v_0/a_0$ она обращается в нуль, поэтому до остановки пройдет время

$$T = \frac{2v_0}{a_0} = \frac{2 \cdot 25}{10} = 5 \text{ с}$$

(здесь используется значение $v_0 = 90$ км/ч $= 25$ м/с). Пройденный путь находим по общей формуле

$$S = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t = v_0 \int_0^{2v_0/a_0} \left(1 - \frac{a_0 t}{2v_0}\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Выполняя замену переменных $x = 1 - a_0 t/(2v_0)$, приводим интеграл к виду

$$s = \frac{2v_0^2}{a_0}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{2v_0^2}{3a_0} = \frac{2 \cdot 25^2}{3 \cdot 10} \approx 41{,}7 \text{ м}.$$

Пример 11. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте $h = 630$ км над поверхностью и облетает Землю за время $T = 97$ мин. Найти скорость v спутника и ускорение свободного падения g_h на этой высоте.

Решение. Зная период обращения спутника вокруг Земли $T = 97 \cdot 60 = 5{,}82 \cdot 10^3$ с, находим его угловую скорость $\omega = 2\pi/T = 1{,}08 \cdot 10^{-3}\text{с}^{-1}$. Радиус орбиты $R = R_{♁} + h = 7000$ км $= 7 \cdot 10^6$ м. Отсюда находим скорость $v = \omega R = 7560$ м/с и нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = 8{,}16$ м/с^2. Поскольку спутник вращается равномерно, его нормальное ускорение совпадает с полным, которое и есть ускорение свободного падения g_h на этой высоте.

Решив эту задачу, можно сделать вывод: отношение ускорений свободного падения на высоте $h = 630$ км и на поверхности Земли $g_h/g = 8{,}16/9{,}81 = 0{,}83$ совпадает с отношением обратных квадратов радиуса орбиты и радиуса Земли $(R_{♁}/R)^2 = (6370/7000)^2 = 0{,}83$. Отсюда можно сделать вывод, что ускорение свободного падения обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли. Мы только что повторили открытый Ньютоном закон всемирного тяготения.

Пример 12. Вращается диск радиусом $r = 20$ см. Зависимость угла поворота от времени описывается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад, $B = -1$ рад/с, $C = 0{,}1$ рад/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени $t = 10$ с.

Решение. Угловую скорость диска находим дифференцированием:

$$\omega\,(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = B + 3Ct^2.$$

Нормальное ускорение

$$a_n(t) = \omega^2(t) r = r(B + 3Ct^2)^2.$$

В момент $t = 10$ с

$$a_n(10) = 0{,}2(-1 + 3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^2)^2 = 168{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Линейная скорость точек на краю диска

$$v(t) = \omega(t) r = r(B + 3Ct^2).$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r6Ct.$$

В момент $t = 10$ с оно равно

$$a_\tau(10) = 0{,}2 \cdot 6 \cdot 0{,}1 \cdot 10 = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение в тот же момент времени

$$a(10) = \sqrt{a_\tau^2(10) + a_n^2(10)} = \sqrt{1{,}2^2 + 168{,}2^2} \approx 168{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Пример 13. Маховик начал вращаться равноускоренно и за время $t = 10$ с достиг частоты вращения $\nu = 300$ об/мин. Определить угловое ускорение ε маховика и число оборотов N, которое он сделал за это время.

Решение. Так как движение равноускоренное, то угловая скорость зависит от времени по линейному закону $\omega(t) = \varepsilon t$ (в момент $t = 0$ маховик начал вращение). Разделив ее на угол 2π, соответствующий одному обороту, получим, что в момент t скорость вращения диска составляет $\nu(t) = \varepsilon t/(2\pi)$ оборотов в единицу времени. Нам дано значение $\nu(10) = 300$ об/мин $= 5$ об/с. Тогда

$$\varepsilon = \frac{2\pi\nu}{t} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5}{10} = 3{,}14 \text{ рад/с}^2.$$

Если $N(t)$ — число оборотов, которые диск совершил к моменту времени t, то производная этой функции $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ и дает нам частоту вращения диска $\nu(t)$. Отсюда, обозначая переменную интегрирования через t', имеем

$$N(t) = \int\limits_0^t \nu(t')\mathrm{d}t' = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_0^t t'\,\mathrm{d}t' = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} = \frac{\nu t}{2}\,.$$

К моменту $t = 10$ с тело совершит $N(10) = 5 \cdot 10/2 = 25$ оборотов.

I.1.B. Задачи для самостоятельной работы

Задача I.1.1. Три четверти пути тело двигалось со скоростью $v_1 = 2$ м/с, остаток пути — со скоростью $v_2 = 10$ м/с. Чему равна средняя путевая скорость $v_{\text{ср}}$?

Задача I.1.2. Две трети пути автомобиль движется со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, четверть пути — со скоростью $v_2 = 10$ км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью $v_3 = 100$ км/ч. Чему равна средняя путевая скорость $v_{\text{ср}}$ автомобиля?

Задача I.1.3. Машина прошла половину пути со скоростью $v_1 = 60$ км/ч. На оставшейся части пути она половину времени двигалась со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. С какой скоростью v_3 машина должна преодолеть последнюю часть пути, чтобы средняя путевая скорость оказалась равной $v_{\text{ср}} = 75$ км/ч?

Задача I.1.4. Точка двигалась в течение времени $t_1 = 15$ с со скоростью $v_1 = 5$ м/с, в течение $t_2 = 10$ с со скоростью $v_2 = 8$ м/с и в течение $t_3 = 6$ с со скоростью $v_3 = 20$ м/с. Чему равна средняя путевая скорость $v_{\text{ср}}$ точки?

Задача I.1.5. Движение точки по прямой задано уравнением $x = 2t - 0{,}5t^2$. Определить среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$ точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

Задача I.1.6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = 6t - 0{,}125t^3$. Определить среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$ точки в интервале времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

Задача I.1.7. Корабль проходит расстояние $s_1 = 50$ км на восток за 45 мин, а затем поворачивает на юг и преодолевает расстояние

$s_2 = 100$ км за 1,5 ч. Определить: 1) величину вектора перемещения корабля; 2) величину вектора средней скорости; 3) среднюю путевую скорость.

Задача I.1.8. За 3,5 ч воздушный шар снесло на $s_1 = 21{,}5$ км к северу, затем на $s_2 = 9{,}7$ км к востоку, причем высота его подъема увеличилась на $h = 2{,}88$ км. Найти: 1) величину вектора его средней скорости; 2) угол β вектора средней скорости с горизонтальной плоскостью.

Задача I.1.9. Предполагается, что самолет, имеющий скорость $v = 550$ км/ч, должен лететь по прямой под углом $\varphi = 33{,}0°$ к северу от направления на восток. Однако с севера дует постоянный ветер со скоростью $v_1 = 120$ км/ч. В каком направлении должен лететь самолет?

Задача I.1.10. Определить время полета самолета между двумя пунктами, находящимися на расстоянии $s = 500$ км, если скорость самолета относительно воздуха $v_0 = 100$ м/с, а скорость встречного ветра, направленного под углом $\alpha = 30°$ к прямой, соединяющей эти пункты, равна $v_1 = 30$ м/с. Во сколько раз уменьшится время полета, если ветер будет попутным, а его скорость будет направлена под углом $\alpha = 30°$ к направлению движения? Под каким углом к направлению движения должна быть направлена скорость самолета в обоих случаях?

Задача I.1.11. Велосипедист начал движение и в течение времени $t_1 = 5$ с ехал с ускорением $a = 1$ м/с^2, затем в течение следующих $t_2 = 6$ с двигался равномерно и последние 25 м — равнозамедленно до остановки. Найти среднюю скорость на всем пути.

Задача I.1.12. По прямолинейному шоссе ACD едет машина, которой необходимо за кратчайшее время добраться из пункта A в пункт B, расположенный в поле на расстоянии $l = 500$ м от дороги (рис. 5, *а*). Известно, что скорость машины по полю в $n = 2$ раза меньше скорости машины по шоссе. На каком расстоянии s от точки D следует свернуть с шоссе? Проанализировать роль расстояния L между пунктами A и D, находящимися на шоссе (рис. 5, *б*).

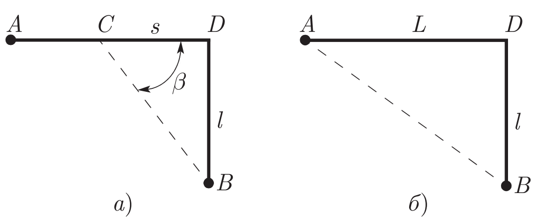


Рис. 5

Задача I.1.13. Зависимость пройденного точкой пути от времени задана уравнением $s = 0{,}14t^2 + 0{,}01t^3$ (здесь и далее в подобных задачах время измеряется в секундах, расстояние — в метрах). Определить: 1) через какое время t_1 ускорение точки будет равно $a = 1$ м/с^2; 2) мгновенную скорость v_1 в этот момент времени; 3) среднюю путевую скорость $v_{ср}$ за промежуток времени от $t = 0$ до t_1.

Задача I.1.14. Положение объекта на прямой линии в зависимости от времени задается уравнением $x = at + bt^2 + ct^3$, где $a = -8$ м/с, $b = 6$ м/с^2, $c = -1$ м/с^3. Найти среднюю скорость $\langle v \rangle$ объекта на временно́м интервале от $t_0 = 0$ с до $t_2 = 2$ с. Сравнить ее со средними скоростями $\langle v_1 \rangle$ на интервале от $t_0 = 0$ с до $t_1 = 1$ с и $\langle v_2 \rangle$ на интервале от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 2$ с.

Задача I.1.15. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = 4t + 8t^2 - 16t^3$ и $x_2 = 2t - 4t^2 + t^3$. В какой момент времени t_1 ускорения этих точек будут одинаковыми? Найти скорости v_1 и v_2 точек в этот момент.

Задача I.1.16. Движение двух материальных точек выражается уравнениями $x_1 = 20 + 4t - 4t^2$, $x_2 = 2 + t + 0{,}5t^2$. В какой момент времени t_1 скорости этих точек будут одинаковыми? Определить скорости v_1 и v_2 и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент.

Задача I.1.17. Зависимость пройденного телом пути s от времени t задается уравнением $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. Найти расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения.

Задача I.1.18. Замаскированный полицейский автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 80 км/ч, обогнал лихач, также движущийся с некоторой постоянной скоростью. Полисмен немедленно после обгона нажал на акселератор и, двигаясь с постоянным ускорением 2 м/с^2, догнал лихача через 6 с после обгона. Какова была скорость лихача?

Задача I.1.19. Замаскированный полицейский автомобиль, движущийся с постоянной скоростью $v_1 = 80$ км/ч, обогнал лихач, несущийся со скоростью 102 км/ч. Ровно через $\Delta t = 1$ с после обгона полисмен нажал на акселератор. Если ускорение полицейского автомобиля равно 2 м/с^2, то сколько времени понадобится полицейским, чтобы догнать лихача (будем полагать, что он движется с постоянной скоростью, а полицейский автомобиль способен разогнаться до достаточно большой скорости)?

Задача I.1.20. Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 50$ км/ч, врезается в дерево; передняя часть автомобиля деформируется, а тело водителя перемещается на $l = 0{,}7$ м и останавливается. Выразить среднее ускорение водителя во время этого столкновения в единицах величин, кратных ускорению свободного падения $g = 9{,}80$ м/с^2.

Задача I.1.21. В тот момент, когда опоздавший пассажир вбежал на платформу перрона, мимо него за время t_1 прошел предпоследний вагон. Последний вагон прошел мимо пассажира за время t_2. На какое время t_0 опоздал пассажир к отходу поезда? Поезд двигался равноускоренно без начальной скорости.

Задача I.1.22. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ м/с^2. Определить полное ускорение a точки на участке кривой с радиусом кривизны $R = 3$ м, если точка движется на этом участке со скоростью $v = 2$ м/с.

Задача I.1.23. Уравнение вращения колеса радиусом $R = 0{,}5$ м имеет вид $\varphi = At + Bt^5$, где $A = 2$ рад/с, $B = 0{,}5$ рад/с^5. Определить полное ускорение точки на ободе колеса в момент $t = 1$ с.

Задача I.1.24. Точка начинает движение по окружности радиусом $R = 10$ м. Пройденный ею путь зависит от времени по закону $s = At + Bt^3$, где $A = 8$ м/с, $B = 1$ м/с^3. Определить скорость и полное ускорение точки в момент $t = 2$ с.

Задача I.1.25. По истечении времени $t = 2$ с после начала равноускоренного вращения вектор ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением линейной скорости этой точки. Найти угловое ускорение колеса.

Задача I.1.26. За время t колесо поворачивается на угол φ, зависящий от времени по закону $\varphi = 5{,}0t + 3{,}0t^2 - 4{,}5t^4$, причем φ измеряется в радианах, а t — в секундах. Определить: 1) среднюю скорость колеса; 2) среднее угловое ускорение за промежутки времени от $t = 2{,}0$ с до $t = 3{,}0$ с; 3) выражение для мгновенной угловой скорости ω; 4) выражение для мгновенного углового ускорения ε; 5) значения мгновенной угловой скорости и мгновенного углового ускорения в момент времени $t = 3{,}0$ с.

Задача I.1.27. Колесо диаметром 40 см вращается с постоянным ускорением так, что за 3,6 с частота вращения возрастает от 80 до 300 об/мин. Вычислить: 1) угловое ускорение колеса; 2) радиальную и тангенциальную составляющие вектора линейного ускорения точки на ободе колеса через 2,0 с после начала ускоренного движения колеса.

Задача I.1.28. Два резиновых диска расположены рядом друг с другом так, что их края соприкасаются. Первый диск радиусом $R_1 = 3{,}0$ см начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}88$ рад/с^2 и заставляет вращаться второй диск радиусом $R_2 = 5{,}0$ см, причем второй диск вращается относительно первого диска без проскальзывания. Определить: 1) за какой промежуток времени второй диск достигает угловой скорости 33 об/мин, если в начальный момент он находился в покое; 2) угловое ускорение второго диска.

Задача I.1.29. Колеса автомобиля совершили 55 оборотов за промежуток времени, в течение которого скорость равномерно уменьшилась от 80 км/ч до 55 км/ч. Диаметр колеса равен 1,0 м. 1) Определить, чему было равно угловое ускорение колеса. 2) Если автомобиль продолжает замедляться в том же темпе, то сколько времени ему понадобится до полной остановки?

Задача I.1.30. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав $N = 50$ полных оборотов, оно изменило частоту вращения от $\nu_0 = 4$ с$^{-1}$ до $\nu_1 = 6$ с$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε колеса.

Задача I.1.31. Колесо, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, достигло угловой скорости $\omega = 125{,}6$ рад/с после того, как сделало $N = 314$ полных оборотов. Найти угловое ускорение колеса.

Задача I.1.32. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Через промежуток времени $t = 0{,}5$ с после начала движения полное ускорение точек на ободе колеса стало равно $a = 13{,}6$ м/с^2. Найти радиус колеса.

Задача I.1.33. Пуля пущена с начальной скоростью $v_0 = 200$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Определить максимальную высоту H подъема, дальность s полета, радиус R кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача I.1.34. Самолет, пролетая над зенитной батареей на высоте $H = 1$ км, начинает пикировать с выключенным двигателем на цель со скоростью $v_1 = 540$ км/ч, направленной под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Самолет сбивают из орудия выстрелом, произведенным в тот момент, когда он находился над батареей. Скорость снаряда при вылете из ствола орудия $v_2 = 600$ м/с. Определить, на каком расстоянии от батареи, считая по горизонтальному направлению, снаряд попал в самолет.

Задача I.1.35. Тело брошено со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории через $t = 1$ с.

Задача I.1.36. На большой горизонтальной поверхности закреплена маленькая пушка, которая выстреливает снаряд со скоростью $v_0 = 50$ м/с. На расстоянии $l = 50$ м от пушки находится вертикальная стена высотой $h = 25$ м. Поставлена задача, чтобы снаряд упал как можно дальше за стеной. Под каким углом α к горизонту следует стрелять и как далеко улетит снаряд за стену? ($g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать.)

Задача I.1.37. Тело брошено под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в начальный момент движения.

Задача I.1.38. Спортсмен толкает ядро с начальной скоростью $v_0 = 14{,}0$ м/с под углом $\alpha = 41°$ к горизонту. Вычислить расстояние s, пройденное ядром по горизонтали. Ядро отрывается от руки спортсмена на высоте $h = 2{,}2$ м над землей. (Ускорение свободного падения равно 9,8 м/с^2.)

Задача I.1.39. Центр воздушного шара радиусом R покоится на высоте $h = 3R$ над поверхностью земли. С какой минимальной начальной скоростью v_0, под каким углом α и с какого расстояния S надо бросить с горизонтальной поверхности земли камушек, чтобы он перелетел через шар? Камушек не должен испытывать столкновения, изменяющие направление его движения.

I.2. Динамика материальной точки и тела, движущегося поступательно

I.2.A. Основные формулы

- Второй закон Ньютона

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

где $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ — геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; $\vec{p} = m\vec{v}$ — ее импульс; n — количество сил, действующих на точку.

Если масса постоянна, то второй закон Ньютона классической механики может быть выражен формулой

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

- Если неизвестен точный закон, по которому изменяется полная сила $\vec{F}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i(t)$, действующая на тело, то можно использовать понятие средней силы $\left\langle \vec{F} \right\rangle$ за какой-то промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ от момента t_1 до момента t_2:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Тогда уравнение второго закона Ньютона можно записать в виде

$$\Delta\vec{p} = \langle \vec{F} \rangle\,\Delta t,$$

где $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ — изменение импульса за тот же промежуток времени.

- Сила, действующая на материальную точку, движущуюся по кривой, может быть разложена на две составляющие — тангенциальную и нормальную.

Тангенциальная (или касательная) сила

$$\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{\tau},$$

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Нормальная (или центростремительная) сила

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = m\,\frac{v^2}{R}\,\vec{n},$$

где R — радиус кривизны траектории; $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к траектории.

- Сила трения скольжения

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N\vec{e}_v,$$

где μ — коэффициент трения скольжения; N — абсолютная величина силы нормального давления; $\vec{e}_v$ — единичный вектор в направлении скорости тела.

- Сила упругости

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\Delta l = -k(x - x_0),$$

где k — коэффициент жесткости; x — координата незакрепленного конца пружины; x_0 — она же для нерастянутой пружины. Знак «минус» показывает, что сила направлена в сторону, обратную деформации.

- Сила гравитационного взаимодействия

$$\vec{F} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r}\,,$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}^2}$ — гравитационная постоянная; $r = \left|\vec{r}_{12}\right|$; $\vec{r}_{12}$ — радиус-вектор тела 2 относительно тела 1. Знак «минус» указывает на притяжение тел.

- Закон сохранения импульса: *полный импульс замкнутой системы есть величина постоянная*, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const}\,.$$

- Применение закона сохранения импульса к соударению двух тел:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

где $\vec{v}_i$, $\vec{u}_i$ $(i = 1,\, 2)$ — скорости тел 1 и 2 до и после соударений соответственно.

- При неупругом ударе, когда тела слипаются после соударения, их общая скорость $\vec{u}$ становится равной

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{I.2.1}$$

I.2.Б. Примеры решения задач

Пример 14. В лифте на пружинных весах подвешено тело массой $m = 10$ кг. Определить показания весов в трех случаях: 1) лифт покоится (или движется равномерно); 2) ускорение лифта направлено вертикально вверх и 3) вертикально вниз. Ускорение лифта $a = 2$ м/с^2.

Решение. На тело действуют две силы: сила земного тяготения $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Определить показания весов значит найти силу веса P тела, т. е. силу, с которой тело действует на пружину. Но по третьему закону Ньютона она равна абсолютному значению и противоположна по направлению силе реакции опоры $\vec{N}$, т. е. $\vec{P} = -\vec{N}$.

Теперь остается составить уравнение второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{P},$$

откуда

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

1) Когда тело покоится (или движется равномерно), $\vec{a} = 0$ и сила тяжести уравновешивается силой реакции опоры: $\vec{P} = m\vec{g}$, или $P = mg$.
2) Если лифт движется вверх с ускорением a, то направления $\vec{g}$ и $\vec{a}$ противоположны, так что $P = m(g + a)$. Иными словами, весы покажут бóльший вес тела (перегрузка), чем в состоянии покоя.
3) Если лифт движется вниз с ускорением $a \leqslant g$, то направления $\vec{g}$ и $\vec{a}$ одинаковы, так что $P = m(g - a)$. Здесь весы покажут меньший вес, чем в состоянии покоя. При свободном падении, когда лифт движется вниз с ускорением $a = g$, получаем $P = 0$ (состояние невесомости). При опускании лифта с еще бóльшим ускорением вес

становится отрицательным ($P < 0$): в этом случае тело не растягивает, а сжимает пружину весов.

Подставляя числовые данные, находим: 1) $P = 98$ Н; 2) $P = 118$ Н; 3) $P = 78$ Н.

Пример 15. Лифт состоит из кабины, мотора, приводящего ее в движение, и противовеса (рис. 6). Масса кабины с нагрузкой $m = 1000$ кг, масса противовеса $M = 1400$ кг. Лифт поднимается с ускорением $a = 2$ м/с^2. Пренебрегая трением, массой троса и блоков и считая трос нерастяжимым, найти натяжения T_1 и T_2 троса. Чему равна сила T, действующая на мотор? Как изменятся силы, если лифт начнет опускаться с тем же ускорением?

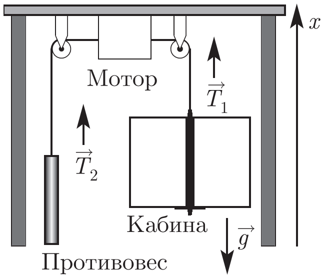


Рис. 6

Решение. Нерастяжимость троса означает, что длина его части между кабиной и противовесом остается неизменной. Следовательно, кабина и противовес движутся как единое целое — модули их скоростей и ускорений совпадают. Роль блоков сводится только к изменению направления действия сил и движения. Выберем положительное направление оси координат. На кабину (противовес) действует сила натяжения троса $T_1 (T_2)$ и сила притяжения $-mg$ $(-Mg)$, так что они движутся с ускорением a $(-a)$. Имеем два уравнения движения:

$$ma = T_1 - mg; \qquad -Ma = T_2 - Mg, \tag{I.2.2}$$

откуда

$$\begin{aligned} T_1 &= m(a+g) = 1000(2+9{,}8) = 11\,800 \text{ Н};\\ T_2 &= M(g-a) = 1400(9{,}8-2) = 10\,920 \text{ Н}. \end{aligned} \tag{I.2.3}$$

Со стороны противовеса на мотор действует сила T_2, направленная влево, а со стороны кабины — сила T_1, направленная вправо. Результирующая сила $T = T_1 - T_2 = 880$ Н направлена вправо.

Чтобы найти силы при движении кабины вниз, достаточно изменить знак ускорения a в формулах (I.2.3):

$$\begin{aligned} T_1 &= m(g-a) = 1000(9{,}8-2) = 7800 \text{ Н};\\ T_2 &= M(a+g) = 1400(2+9{,}8) = 16\,520 \text{ Н};\\ T &= T_1 - T_2 = -8720 \text{ Н}. \end{aligned} \tag{I.2.4}$$

Отрицательный знак у силы, стремящейся сдвинуть мотор, означает, что она направлена в противоположную сторону по сравнению с предыдущим случаем.

Замечание. Часто предлагаемая задача о двух грузах на блоках отличается от решенной нами отсутствием мотора. Если трением и массой блоков можно пренебречь, то это приводит к равенству сил натяжения по обе стороны от троса.

Пример 16. На шероховатой горизонтальной поверхности расположены $n = 10$ одинаковых кубов массой $m = 5$ кг каждый (рис. 7). Коэффициент трения о поверхность $\mu = 0{,}15$.

С какой силой T_1 надо тянуть первый куб, чтобы система двигалась с ускорением $a = 3$ м/с^2? Чему равны при этом натяжения тросов, соединяющих кубы? Предполагается, что тросы нерастяжимы и их массой можно пренебречь.

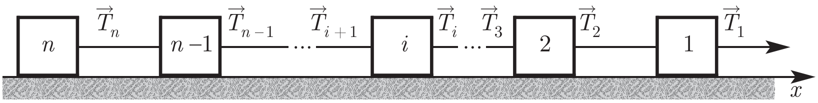


Рис. 7

Решение. Обозначения даны на рис. 7. На куб с номером i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в положительном направлении оси координат действует сила T_i, а в отрицательном — сила T_{i+1} (кроме последнего куба). Кроме того, на каждый куб в отрицательном направлении оси действует сила трения μmg. Записываем уравнения движения для каждого куба:

$$\begin{gathered} ma = T_1 - T_2 - \mu mg; \\ ma = T_2 - T_3 - \mu mg; \\ \ldots \\ ma = T_i - T_{i+1} - \mu mg; \\ \ldots \\ ma = T_{n-1} - T_n - \mu mg; \\ ma = T_n - \mu mg. \end{gathered} \tag{I.2.5}$$

Начинаем решать уравнения с последнего: $T_n = m(a + \mu g)$. Подставляя это решение в предпоследнее уравнение, находим $T_{n-1} = 2m(a + \mu g)$. Повторяя процедуру, получаем $T_i = (n + 1 - i)m(a + \mu g)$ и при $i = 1$ имеем $T_1 = nm(a + \mu g)$. Подставляем числовые значения: $T_n = 5(3 + 0{,}15 \cdot 9{,}8) = 22{,}35$ Н; $T_i = 22{,}35(11 - i)$Н; $T_1 = 223{,}5$ Н.

Пример 17. Невесомый блок укреплен на верхней кромке наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$ (рис. 8). Через блок перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найти: 1) ускорение a, с которым движутся грузы; 2) натяжение T нити. Массу блока считать пренебрежимо малой, а нить — нерастяжимой и не проскальзывающей относительно блока. Коэффициент трения первого груза о наклонную плоскость $\mu = 0{,}1$, трением в блоке пренебречь.

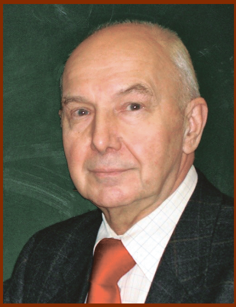
Решение. Прежде всего надо уяснить роль введенных условий. Нерастяжимость нити означает одинаковость перемещений грузов, что ведет к одинаковости абсолютных величин их ускорений. Поскольку массой блока пренебрегаем и трение в нем с нитью отсутствует, силы натяжения обоих концов нити одинаковы.

Теперь составим уравнения второго закона Ньютона для каждого груза. На первый груз действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 8).

Предлагаемый сборник упражнений и задач входит в состав учебно-методического комплекта для естественнонаучных и инженерно-технических специальностей вузов вместе с учебником «Основы физики» в двух томах.

Структура пособия построена по классическому принципу. В начале каждой темы приводятся основные уравнения и формулы, далее дается подробный разбор решения нескольких стандартных и наиболее интересных для практики задач. Основную часть пособия занимают задачи для самостоятельной работы. Также предлагаются варианты типовых расчетов по темам. Задачник сопровождается справочным материалом и ответами.

КАЛАШНИКОВ Николай Павлович



Профессор, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой общей физики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (НИЯУ МИФИ).

Автор более 380 научных трудов и 14 монографий.
С 2012 г. директор агентства по аккредитации образовательных программ инженерных специальностей.

Основные направления научных исследований профессора Калашникова – ядерная физика, взаимодействия быстрых заряженных частиц с веществом, физика твердого тела в экстремальных состояниях.

СМОНДЫРЕВ Михаил Александрович

Профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ, Дубна), профессор Московского авиационного института (Национального исследовательского университета).

В сферу научных интересов входят вопросы теории элементарных частиц и твердого тела. Автор и переводчик целого ряда научно-популярных книг и статей.

Лауреат премии Ленинского комсомола и премий ОИЯИ – Международной межправительственной научно-исследовательской организации.