УДК 517.977.5+94
ББК 22.18+22.1г
К93

Курзенев, В. А.

К93 В поисках оптимального / В. А. Курзенев, В. Д. Матвеенко. — СПб.: БХВ-Петербург, 2019. — 208 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-4102-2

В жизни каждому приходится принимать целенаправленные решения. Всегда желательно, чтобы эти решения были наилучшими в соответствующей ситуации. Сегодня сложилась научная дисциплина «Исследование операций», в основу которой положен принцип оптимальности, отражающий смысл какого-либо максимума или минимума, и где строго научный, математический подход применяется к широкому кругу социологических, экономических, управленческих и других вопросов. На доступном широкому кругу читателей элементарном уровне в книге изложены основные этапы развития понятия оптимальности. Отражена выдающаяся роль русской, советской и российской математических школ в теории и практике оптимальных методов. Особое место отводится оптимальности при различных ограничениях, включая ограничения на ресурсы в экономике, на конкуренцию.

Для широкого круга читателей,
в том числе интересующихся историей математики

УДК 517.977.5+94
ББК 22.18+22.1г

Подписано в печать 11.04.19.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Отпечатано в ОАО "Можайский полиграфический комбинат",
143200, г. Можайск, ул. Мира, д. 93

ISBN 978-5-9775-4102-2

Оглавление

Предисловие....................5

ГЛАВА 1. Сначала была геометрия....................9

1.1. Что знает осел?....................9
1.2. Дидона, Штейнер и другие....................19
1.3. «Диоптрика» и «Геометрия»....................32
1.4. Малая война математики....................44

ГЛАВА 2. Период бури и натиска....................55

2.1. Братья из Базеля....................55
2.2. Петербургский академик....................69
2.3. Что-то из ничего....................79

ГЛАВА 3. Задачи ставит практика....................97

3.1. Годичный акт....................99
3.2. Выход в пространство....................106
3.3. Задача фанерного треста....................126
3.4. Когда согласья нет....................145
3.5. Наука побеждать....................155
3.6. Управлять оптимально!....................167
3.7. Что такое «хорошо»?....................184

ПРИЛОЖЕНИЕ. Список упоминаемых имен....................199

Предисловие

Перед вами книга на серьезную тему, но в необычном жанре. Ее можно рассматривать как введение в дисциплину «Теория оптимальности» и как научно-популярное издание. В книге минимум формул, зато достаточное количество иллюстрационного материала. А речь идет о совершенно понятных вещах, связанных с поиском лучших вариантов при принятии решений в различных областях. По существу, поиск наилучших вариантов всегда интересовал человечество, особенно в условиях ограничений на ресурсы. И, конечно же, главным помощником в этом поиске является математика, ее методы. Не зря математиков называют искателями и служителями истины. Известны слова Галилея о роли математики, как «языка, на котором написана Книга вселенной». Многие выдающиеся умы отмечали эту роль. Например, основатель кибернетики Н. Винер как-то сказал: «Высшее назначение математики… состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает».

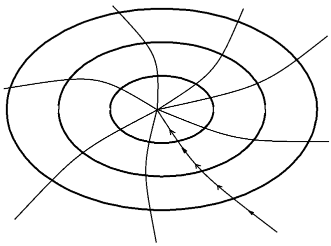
Немало практических задач по поиску оптимальных (наилучших) решений известно с глубокой древности. Именно о таких задачах идет речь в *первой главе* книги. Но решение таких задач сопровождалось и новыми разработками математических методов, а по существу — развитием математики, созданием математического анализа. Большой вклад в разработку новых методов, стимулированных задачами на экстремум, внесли французские математики П. Ферма и Р. Декарт. Основоположниками нового исчисления (дифференциального и интегрального) стали выдающийся немецкий философ, математик, физик Г. В. Лейбниц и английский физик и математик И. Ньютон. Соответственно, *первая глава* посвящена развитию основных идей, контактам и взаимоотношениям математиков XVII века.

Бурное развитие математики и ее приложений к экстремальным и изопериметрическим задачам пришлось на XVIII и XIX века. Это обсуждается во *второй главе*. Существенно расширилась область приложений, включающая в том числе технические и инженерные направления. Здесь необходимо отметить братьев из Базеля Якоба и Иоганна Бернулли и выдающегося математика XVIII века петербургского академика швейцарца Леонарда Эйлера, вклад которого в развитие методов поиска оптимальности переоценить невозможно. Именно он заложил основы вариационного исчисления. Начало XIX века в части поиска оптимальности отмечено работами французского математика Ж. Лагранжа по задачам на условный экстремум. Середина XIX века выдвинула на передний план петербургскую математическую школу во главе с академиком П. Л. Чебышевым. Эта математическая школа имела ярко выраженную направленность на тесную связь теории и практики. Поэтому методам поиска оптимальности при ограничениях на ресурсы ее последователями придавалось особое значение.

Третья глава посвящена развитию методов оптимальности применительно к разнообразным практическим задачам в XX и в начале XXI века. Рассказана история появления линейного программирования Л. В. Канторовича, стимулированного решением практической задачи фанерного треста. Именно академику Л. В. Канторовичу принадлежит заслуга широкого применения и внедрения линейного программирования и других математических методов в экономике в нашей стране. Развитие методов оптимальности показано в динамике. После становления в развитии линейного программирования появилось стохастическое программирование. Следующим шагом стало динамическое программирование американского математика Р. Беллмана. Параллельно с этими методами Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном из США были предложены игровые методы, где понятие оптимальности стало множественным. Последние методы уже разработаны и применимы для экономики, социологии и других общественных наук. Интересные разработки выполнены академиком В. Л. Макаровым в части оптимального выбора маршрута развития системы. И, наконец, показано, что проблема поиска оптимальности, включая формулировку критериев, находится в постоянном развитии и все еще далека от завершения, несмотря на многолетний исторический путь.

Инициатором появления этой книги стал незабвенный Владимир Дмитриевич Матвеенко, безвременно ушедший из жизни в расцвете сил и творческого таланта. Доктора физико-математических наук, профессора НИУ ВШЭ В. Д. Матвеенко не стало в сентябре 2018 года. Владимир Дмитриевич уговорил меня принять участие в написании такой книги для молодежи, которую он любил и всячески поддерживал. В основу книги включены его и частично мои материалы, мне пришлось также взять на себя подготовку и редактирование всех материалов.

Доктор технических наук, профессор В. А. Курзенев



ГЛАВА 1

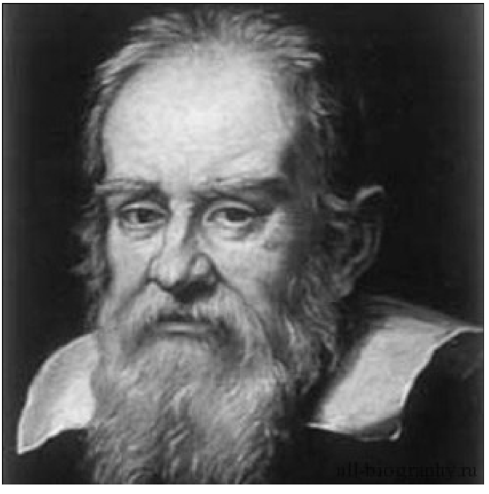
Сначала была геометрия

«Теперь отходи!» — седовласый Учитель махнул рукой, как будто показывая рабу, куда именно надлежит отойти. Мальчишка-раб испуганно попятился, прижимая к груди широкий и плоский медный сосуд, на дне которого покоился принадлежащий хозяину золотой перстень. «Стой! — закричал старец, как только кольца не стало видно за стенками сосуда. — Воду!» Другой раб, пожилой нубиец, был наготове с кувшином воды и по этой команде принялся наполнять сосуд, который держал мальчик. Ученики ахнули — они снова увидели перстень. Стенка сосуда перестала быть препятствием. Конечно, это не они приобрели магическую способность видеть сквозь стенки, а лучи света изменили свое направление. Но ведь учитель говорил, что испускаемые глазом лучи не огибают углов?! Ученики повернулись к Евклиду, ожидая объяснений, но тот только развел руками: «Может быть кто-то из вас объяснит это до конца».

1.1. Что знает осел?

Осел — доброе, сильное и трудолюбивое животное. Иногда он бывает не сдержан, иногда упрям, но в особой глупости Осла не упрекнешь. Если бы бедный Осел знал, сколько сказано о нем несправедливых слов. Прямо по И. А. Крылову: «Осел мой глупостью в пословицу вошел». Ладно бы обвинения ослиной глупости возводили только баснописцы. Нет, французский философ Буридан, например, лет шестьсот назад провел с ослом знаменитый мысленный эксперимент: поместил его в середине отрезка прямой между двумя охапками сена. Говорят, бедняга до сих пор вертит головой и не может выбрать, с какой охапки начать.

Не обошлось без Осла и в величайшем математическом сочинении древности — «Началах» Евклида. На протяжении более двадцати веков «Начала» были образцом строгого, логически завершенного изложения. Исходя из 23 определений и нескольких аксиом (пяти постулатов и восьми «общих понятий»), Евклид дал логические доказательства примерно пятисот предложений — практически всех, что были известны греческим математикам того времени. Доказательства неопровержимые в силу очевидности каждого их шага.



Евклид (325—265 гг. до н. э.)

А что значит «очевидно»? То, что ясно одному, совсем не очевидно для другого. Нужно какое-то универсальное мерило очевидности, арбитр, который судил бы об убедительности доказательства. И вот в новом для себя судейском качестве в пятнадцатитомнике Евклида иногда является Осел. Вот как доказывает

Евклид, что сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны. В одну вершину треугольника помещается Осел, в другую кладется охапка сена. Осел идет к сену по прямой, обходить две стороны треугольника не приходит в голову даже Ослу. Откуда и следует доказываемое утверждение.

Все ясно? Кому как... Через два тысячелетия после Евклида крупнейший немецкий математик Давид Гильберт вновь обратился к проблеме строгого логического построения и обоснования геометрии. В работе Гильберта места для ослов и иных животных уже не нашлось. Проведенное им полное исследование проблемы кратчайшего расстояния на плоскости можно найти в 46-м томе одного из наиболее авторитетных научных журналов Acta Eruditorum и в дополнении к фундаментальному труду Гильберта «Основания геометрии».

А что все-таки приходит в голову Ослу, бредущему к приготовленной ему мудрецами охапке сена? Ответов можно предложить, по крайней мере, три. Первые два апеллируют к разумности осла: Осел а) ленится и хочет пройти поменьше, б) торопится и хочет поскорее попасть к сену. Конечно, при постоянной скорости Осла решения этих задач о наименьшем расстоянии и наименьшем времени совпадают.

Третий ответ исходит, наоборот, из полной неразумности Осла. Сам Осел ни над какими вопросами не задумывается, он просто смотрит на свою цель. И идет туда, куда смотрит.

А луч света распространяется по прямой. Это свойство было хорошо известно Евклиду. Фактически, оно входит в число постулатов его «Оптики» — сочинения, аналогичного «Началам» и по замыслу (изложить все накопленные знания), и по структуре (постулаты и предложения).

Но предположение о неразумности Осла неизбежно ведет к следующему вопросу. А почему луч света прямолинеен? И «разумный» Осел дает сразу два объяснения. С одной стороны, свет проходит наименьшее расстояние между двумя точками (принцип наименьшего расстояния). С другой стороны, свет «старается» пройти расстояние за наименьшее время (принцип наименьшего времени).

При постоянной скорости света (как и при постоянной скорости Осла) эти два принципа совпадают. В других случаях они могут приводить к совершенно разным результатам. Но вряд ли древние греки знали об этом существенном различии, ведь они привыкли воспринимать пространство и время как своеобразное единство и даже свою основную меру длины — греческий стадий — определяли как расстояние, которое человек проходит спокойным шагом в течение восхода Солнца (т. е. в течение примерно двух минут от появления над горизонтом верхнего края Солнца до появления его нижнего края).

Справедливости ради скажем, что даже один принцип наименьшего расстояния дал многое. Он помог изучить свойства отражения света. Формуле «угол падения равен углу отражения» учил еще Евклид. В «Оптике» он показывает, как можно определить высоту предмета с помощью плоского зеркала. Этот способ был незаменим в пасмурный день, когда не срабатывал стандартный способ определения высоты по тени.

Закон отражения доказал в I в. н. э. Герон Александрийский. Если луч света идет из точки A в точку B, отражаясь от зеркала в точке P (рис. 1), то, по принципу наименьшего расстояния, он движется из A в B по кратчайшему пути. У точки B есть «зазеркальный двойник» — ее отражение B'. Двигаясь по маршруту APB, луч проходит точно такое же расстояние, как если бы он шел по маршруту APB'. А кратчайшим маршрутом APB' будет отрезок прямой, соединяющий точки A и B'. Доказав равенство треуголь-

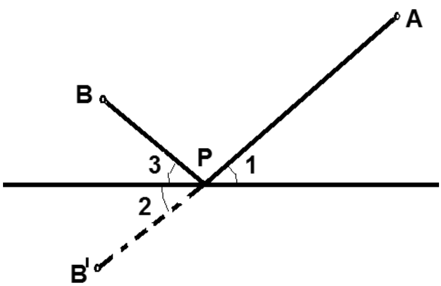


РИС. 1

ников, приходим к выводу, что угол падения равен углу отражения.

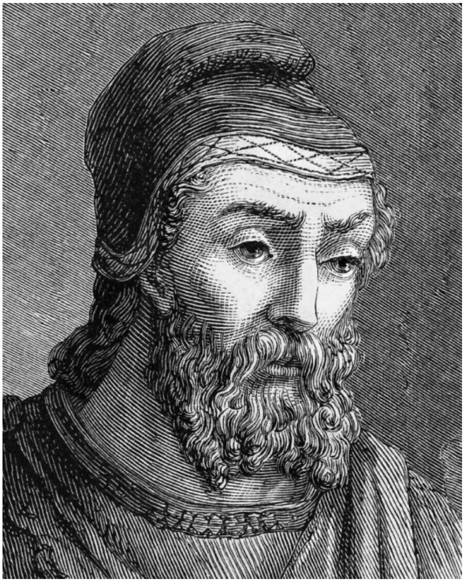
Позднее обнаружились новые следствия принципа наименьшего расстояния. Что будет, если поместить источник света в фокус эллиптического зеркала? Какой из треугольников, вписанных в остроугольный треугольник, имеет наименьший периметр? Для какой точки сумма расстояний от трех заданных точек минимальна? Ответы на эти совершенно разные вопросы можно получить с помощью закона отражения.

А вот явление преломления света объяснить с помощью принципа наименьшего расстояния так и не удавалось, хотя было ясно, что кратчайший путь может и не быть прямолинейным.

Если бы сено и Осел располагались не на плоскости, а на сфере, то лежащая на той же сфере кратчайшая линия (так называемая *геодезическая*), приводящая Осла к желанному продукту, была бы уже не отрезком прямой, а дугой большого круга сферы. *Большим кругом* называют пересечение сферы с плоскостью, проходящей через центр. Например, одним из больших кругов является экватор.

Шаровидная форма Земли хорошо была известна древнегреческим математикам. Пифагор объяснял ее тем, что «шар — совершеннейшее из тел». Аристотель в IV в. до н. э. впервые попытался доказать шаровидность Земли, наблюдая за фазами Луны. Веком позже александриец Эратосфен измерил отрезок геодезической и вычислил радиус Земли. Можно предположить, что к хитроумному плану этого измерения причастен и великий Архимед. Архимед был другом Эратосфена, имел с ним встречи и переписку и был сам заинтересован в вычислении земного радиуса, поскольку занимался тогда постройкой первого «планетария» — механической масштабной модели Вселенной, пригодной для решения астрономических задач. Вполне возможно, что Архимед и Эратосфен учились непосредственно у Евклида.

Для вычисления земного радиуса Эратосфен воспользовался двумя географическими особенностями города Сиены (Асуана). Во-первых, Сиена лежит строго на юге от Александрии, т. е. эти города находятся на одной геодезической. Во-вторых, в день лет-



Архимед (287—212 гг. до н. э.)

него солнцестояния отражение Солнца здесь видно даже на дне самых глубоких колодцев, значит, Солнце стоит в зените. Оставалось измерить в этот день высоту Солнца в Александрии, примерно определить с помощью попутного верблюжьего каравана расстояние от Сиены до Александрии и провести вычисление земного радиуса по правилам сферической геометрии. Тут Эратосфен использовал число π, которое с большой точностью вычислил Архимед. Поразительно, что в результате всей этой сложной процедуры Эратосфен ошибся всего на 100 км.

Другое «применение» геодезической сферы некоторым образом связано со знаменитым пятым постулатом «Начал», который фактически эквивалентен утверждению о том, что две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекутся (рис. 2). Постулаты плоскостной геометрии Евклида заключают в себе многовековой опыт математических и философских размышлений о реальных пространственных формах. В природе нет плоскостей как таковых, как нет точек и прямых. Точка, которую изображает мелом на доске учитель, так же далека от математической точки, как и

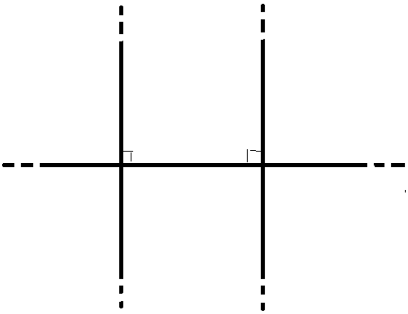


РИС. 2

точки, которые отмечают в тетрадях ученики. Бесконечная плоскость, как и точка, — это плод логических построений, первоначальной основой которых было представление о видимой части земной поверхности до линии горизонта. Источник постулатов Евклида — тоже земная сфера. Аналогом прямой служит дуга большого круга (геодезическая). Что же касается вопроса о параллельности, то сфера обладает такими свойствами:

- через концы отрезка геодезической AB можно провести только по одной перпендикулярной ему геодезической (рис. 3);
- эти две геодезические пересекаются.

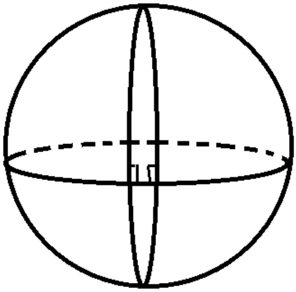


РИС. 3

Заменим слово «геодезическая» словом «прямая». Первое утверждение находится в полном согласии с V постулатом Евклида, а второе утверждение ему противоречит. Остальные постулаты

Евклида полностью соответствуют опыту сферического «землемерия». Уже это отчасти объясняет изначальную неудовлетворенность математиков V постулатом. После выяснения невозможности получить V постулат из остальных встал естественный вопрос: каким постулатом можно его заменить, чтобы возникла иная непротиворечивая система аксиом? Ответ давали все те же наблюдения за геодезическими на сфере: в альтернативном варианте теории надо было предположить, что параллельные пересекаются. Таким путем были построены неевклидовы геометрии (первую подобную работу выполнил Н. И. Лобачевский в 1829—30 гг.).

«Задачу Осла» можно поставить и в еще более общем виде, чем для плоскости и сферы: для данной поверхности найти кратчайшую линию, соединяющую две точки. Такую линию тоже называют геодезической. Например, представим себе, что сено и Осел находятся в точках на стеклянном кубе. Осел сено видит, но добраться до него может только по поверхности куба. Чтобы найти кратчайший путь, Ослу понадобилось бы построить плоскую развертку куба (рис. 4), тогда задача свелась бы к уже известной ему задаче о кратчайшем пути на плоскости.

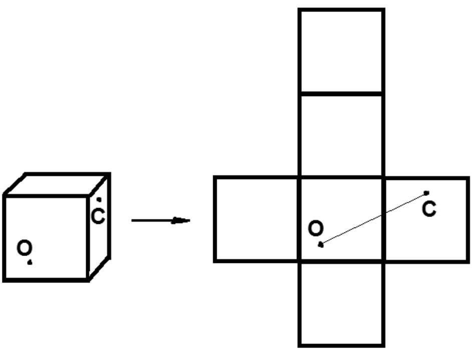


РИС. 4

Тот же метод развертывания Осел мог бы применить и для построения геодезической на поверхности прямого кругового цилиндра. Цилиндр надо разрезать по образующей (т. е. по прямой на поверхности) — как показано на рис. 5.