Оглавление

Предисловие 3

Памяти товарища 5

1. Механика 7

1.1. Кинематика 7

1.2. Динамика 32

1.3. Законы сохранения в механике 53

1.4. Статика твердого тела 85

1.5. Механика жидкостей и газов 100

1.6. Механические колебания и волны 120

2. Молекулярная физика и термодинамика 135

2.1. Основы молекулярно-кинетической теории 135

2.2. Элементы термодинамики 157

2.3. Изменение агрегатного состояния вещества. Уравнение теплового баланса 179

2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях 193

2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей 198

3. Электродинамика 202

3.1. Электростатика 202

3.2. Постоянный ток 244

3.3. Магнетизм 274

3.4. Электромагнитная индукция 282

3.5. Электромагнитные колебания и волны 292

4. Оптика 300

4.1. Геометрическая оптика 300

4.2. Элементы физической оптики 353

Предисловие

В настоящее время, наряду с проведением Единого государственного экзамена (ЕГЭ), развиваются и другие формы отбора талантливой молодежи в вузы. К их числу относятся олимпиады и профильные вступительные испытания по дисциплинам, составляющим основу профессиональной деятельности будущих выпускников. В связи с этим возникает необходимость в издании методических пособий, дающих возможность учащимся выпускных классов школ попробовать свои силы при решении задач различного уровня сложности и успешно подготовиться как к олимпиадам, так и к профильным экзаменам.

В последние годы, когда сдача выпускных экзаменов по физике перестала быть обязательной, в большинстве школ стали уделять меньше внимания этому предмету. Отметим также, что количество учебных часов, отводимых для изучения физики в общеобразовательных школах, явно недостаточно для обучения школьников приемам решения задач повышенной сложности. А между тем хорошее знание физики и умение решать задачи важно как для поступающих в МГУ имени М. В. Ломоносова, так и для абитуриентов многих технических университетов. Кроме того, чтобы стать успешно успевающим студентом престижного вуза, нужно иметь достаточно глубокую подготовку по физике, позволяющую освоить весьма сложную вузовскую программу. Настоящее пособие позволит сделать важный шаг в этом направлении.

Предлагаемая книга включает все основные разделы школьного курса физики, соответствующие «Кодификатору элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для Единого государственного экзамена по физике». Освоение этого курса позволит уверенно выполнять задания части II Единого государственного экзамена и физических олимпиад первого и второго уровней.

Многолетняя практика проведения занятий по физике на подготовительных курсах МГУ показала, что уровень первоначальной подготовки отдельных учащихся не позволяет им приобрести в сжатые сроки навыки решения задач в объеме, необходимом для поступления в вуз. Особенно отчетливо это стало проявляться в последние годы, поскольку вместе с ростом конкурса в МГУ и в другие вузы уровень требований по физике для поступающих постоянно повышается. Поэтому возникла необходимость в издании пособия, специально посвященного приемам решения задач. Приведенные в книге решения могут быть положены в основу приобретения навыков правильного, логически последовательного и физически верного построения решения ключевых задач данного курса, что впоследствии пригодится школьникам для выполнения заданий достаточно высокого, профильного уровня. Именно им посвящена настоящая книга. Задачи подобраны так, чтобы наиболее полно ознакомить учащихся со всем арсеналом приемов и способов рассуждения, применяемых при их решении. Само оформление решений соответствует требованиям, предъявляемым жюри олимпиад и экспертами ЕГЭ к работам учащихся.

В каждом разделе пособия помещен блок под заголовком «Дополнительные задачи». Большинство из них относится к задачам комбинированного типа, решение которых требует одновременного привлечения сведений из различных разделов физики. Поэтому дополнительные задачи рекомендуется использовать для повторения пройденного материала и прорабатывать уже после того, как основной курс полностью усвоен. Всего пособие содержит около 770 задач различного уровня сложности — от тренировочных до олимпиадных. Многие задачи публикуются впервые.

В состав комиссии, работавшей на физическом факультете МГУ над подготовкой экзаменационных заданий по физике для поступающих в Московский университет, на протяжении многих лет входили Б. Б. Буховцев, Л. Н. Капцов, В. Л. Кузнецов, Г. Я. Мякишев, С. Ю. Никитин, И. П. Николаев, Н. Б. Подымова, М. С. Полякова, С. В. Попов, А. В. Приезжев, С. С. Чесноков, Л. А. Шенявский, В. И. Шмальгаузен. В основу настоящей книги лег уникальный учебный материал, накопленный благодаря их усилиям.

Предлагаемое пособие может быть рекомендовано учителям физики средних школ, лицеев и гимназий, преподавателям подготовительных курсов, а также школьникам, готовящимся к поступлению в вузы физико-математического и технического профилей.

В. А. Макаров, С. С. Чесноков

Памяти товарища

Константин Николаевич Драбович
(11.10.1942—12.04.2014)

Большой вклад в подготовку материалов этой книги, отбор и редактирование задач внес наш коллега, доцент физического факультета МГУ Константин Николаевич Драбович.

Он родился 11 октября 1942 года в деревне Галиново Шарковщинского района Витебской области Белорусской ССР. Второй ребенок в крестьянской семье, Костя появился на свет во время оккупации Белоруссии немецкими войсками. В его жизнь вмешалась и большая история: в 1945 году семья лишилась отца, и заботы о детях полностью легли на плечи матери. Ликвидация личных хозяйств и вынужденное вступление в колхозы, работа за трудодни и сложные внутрисемейные обстоятельства наложили свой отпечаток на его детство.

Первая его школа находилась в соседней деревне в двух километрах от дома, и преодолевать пешком это расстояние маленький Костя должен был каждодневно, невзирая на погоду и заботясь о том, чтобы сберечь драгоценную обувь. Перейдя для учебы в старших классах в Шарковщинскую среднюю школу, он всерьез заинтересовался радиотехникой, сам собрал ламповый радиоприемник, работающий от аккумуляторных батарей (свет в деревне появился только в 60-х годах). Его способности заметил школьный учитель физики и стал активно помогать ему готовиться к поступлению в вуз.

В 1959 году Константин Николаевич поступил в Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина и окончил его с отличием в декабре 1965 года по специальности «радиофизика». По окончании университета работал по распределению в Институте физики АН БССР. В 1968 году был отозван для обучения в аспирантуре физического факультета МГУ. В 1972 году с блеском защитил диссертацию на актуальную в то время тему: «Теория нестационарного вынужденного комбинационного рассеяния». За последующие годы прошел путь от младшего научного сотрудника до доцента физического факультета МГУ.

К. Н. Драбович был признанным специалистом в области нелинейной спектроскопии. Он впервые предложил использовать многофотонные резонансы и когерентные эффекты для существенного увеличения эффективности преобразования оптического излучения в высшие гармоники. Многие годы он читал студентам блестящие лекции по основам нелинейной оптики и спектроскопии. С энтузиазмом и полной отдачей сил вел занятия со школьниками на подготовительных курсах МГУ, уделял большое внимание методике преподавания физики. Редактируя условия и решения задач, он добивался исчерпывающей ясности в формулировках, не допускающей их неоднозначного толкования.

К сожалению, безвременная кончина не позволила Константину Николаевичу завершить работу над этой книгой и увидеть ее выход в свет.

В. А. Макаров, С. С. Чесноков

1. Механика

1.1. Кинематика

1.1.1. Пассажир метрополитена наблюдает отправление поезда. Находясь на платформе у начала первого вагона, он замечает, что с момента отправления поезда этот вагон прошел мимо него за время $\tau_1 = 5$ с. Считая движение поезда равноускоренным, найти, за какое время τ_2 мимо пассажира пройдет второй вагон.

Решение. Пусть a — ускорение поезда, l — длина вагона. Из кинематических уравнений следуют соотношения: $l = \dfrac{a\tau_1^2}{2}$ (для первого вагона), $2l = \dfrac{a(\tau_1 + \tau_2)^2}{2}$ (для первого и второго вагонов). Исключая из этих соотношений ускорение поезда, получаем квадратное уравнение относительно τ_2, а именно $\tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2 - \tau_1^2 = 0$, откуда $\tau_2 = \tau_1(-1 \pm \sqrt{2})$. Отбрасывая отрицательный корень, получаем: $\tau_2 = \tau_1(\sqrt{2} - 1) \approx 2{,}1$ с.

Ответ. $\tau_2 \approx 2{,}1$ с.

1.1.2. Пуля, летящая со скоростью $v_0 = 400$ м/с, попадает в земляной вал и проникает в него на глубину $l = 20$ см. Какова скорость v_1 пули в момент, когда она находится на глубине $l_1 = 10$ см? Силу сопротивления, действующую на пулю в толще земли, считать постоянной.

Решение. Из кинематического уравнения, связывающего начальную и конечную скорости пули, ее ускорение и перемещение, следует, что: $l = \dfrac{v_0^2}{2a}$, $l_1 = \dfrac{v_0^2 - v_1^2}{2a}$. Исключая из этих соотношений ускорение пули a, получаем: $v_1 = v_0\sqrt{1 - \dfrac{l_1}{l}} \approx 280$ м/с.

Ответ. $v_1 \approx 280$ м/с.

1.1.3. Пассажир, стоящий на перроне, заметил, что первый вагон электропоезда, приближающегося к станции, прошел мимо него в течение $t_1 = 4$ с, а второй — в течение $t_2 = 5$ с. Определить ускорение поезда a, если передний конец поезда остановился на расстоянии $L = 75$ м от пассажира. Движение поезда считать равнозамедленным.

Решение. Пусть l — длина вагона, v_0 — скорость поезда в момент, когда начало первого вагона поравнялось с пассажиром, a — модуль ускорения поезда. Из кинематических уравнений следуют соотношения: $l = v_0 t_1 - \dfrac{at_1^2}{2}$

(для первого вагона), $l = (v_0 - at_1)t_2 - \dfrac{at_2^2}{2}$ (для второго вагона). Кроме того, $v_0 = \sqrt{2aL}$. Объединяя записанные выражения, получаем: $a = \dfrac{8L(t_2 - t_1)^2}{(2t_1t_2 + t_2^2 - t_1^2)^2} \approx 0{,}25$ м/с^2.

Ответ. $a \approx 0{,}25$ м/с^2.

1.1.4. В момент, когда опоздавший пассажир вышел на перрон вокзала, с ним поравнялось начало предпоследнего вагона уходящего поезда. Желая определить, на сколько он опоздал, пассажир измерил время t_1, за которое мимо него прошел предпоследний вагон, и время t_2, за которое мимо него прошел последний вагон. Оказалось, что $t_1 = 9$ с, а $t_2 = 8$ с. Считая, что поезд двигался равноускоренно и длина вагонов одинакова, найти, на какое время τ пассажир опоздал к отходу поезда.

Решение. Пусть l — длина вагона, a — ускорение поезда. В момент, когда пассажир вышел на перрон, перемещение поезда составило величину $x_1 = a\tau^2/2$. За время $\tau + t_1$ поезд переместился на расстояние $x_2 = a(\tau + t_1)^2/2$. Следовательно, для предпоследнего вагона можно записать: $l = x_2 - x_1 = \dfrac{a(\tau + t_1)^2}{2} - \dfrac{a\tau^2}{2}$. Аналогично, для последнего вагона: $l = \dfrac{a(\tau + t_1 + t_2)^2}{2} - \dfrac{a(\tau + t_1)^2}{2} = \dfrac{at_2}{2}(2\tau + 2t_1 + t_2)$. Из этих соотношений вытекает равенство: $(\tau + t_1)^2 - \tau^2 = t_2(2\tau + \tau t_1 + t_2)^2$. Выражая отсюда τ, получаем: $\tau = \dfrac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 63{,}5$ с.

Ответ. $\tau = 63{,}5$ с.

1.1.5. Нарушитель правил дорожного движения промчался на автомобиле мимо поста ГИБДД со скоростью $v_1 = 108$ км/ч. Спустя $t_1 = 20$ с вслед за нарушителем отправился на мотоцикле инспектор ГИБДД и, разгоняясь равноускоренно в течение $t_2 = 40$ с, набрал скорость $v_2 = 144$ км/ч. На каком расстоянии S от поста ГИБДД инспектор догонит нарушителя, двигаясь после разгона со скоростью v_2?

Решение. Пусть a — ускорение инспектора во время разгона, t_3 — промежуток времени, в течение которого инспектор двигался с постоянной скоростью. Из кинематических уравнений следуют соотношения: $a = \dfrac{v_2}{t_2}$, $S = v_1(t_1 + t_2 + t_3)$, $S = \dfrac{at_2^2}{2} + v_2t_3 = \dfrac{v_2t_2}{2} + v_2t_3$. Исключив отсюда t_3, получаем: $S = \dfrac{v_1v_2(2t_1 + t_2)}{2(v_2 - v_1)} = 4800$ м.

Ответ. $S = 4800$ м.

1.1.6. Ракета запущена вертикально вверх с поверхности Земли и на участке разгона имела постоянное ускорение $a = 19{,}6$ м/с^2. Какое время t_0 падала ракета с ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2 после достижения наибольшей в полете высоты, если на участке разгона движение продолжалось в течение времени $\tau = 1$ мин?

Р е ш е н и е. На участке разгона ракета набрала высоту $y_1 = \dfrac{a\tau^2}{2}$ и приобрела скорость $v_1 = a\tau$. Перемещение ракеты с момента отключения двигателя до момента достижения ею максимальной высоты $\Delta y = \dfrac{v_1^2}{2g} = \dfrac{a^2\tau^2}{2g}$. Следовательно, максимальная высота подъема ракеты $h = y_1 + \Delta y = \dfrac{a\tau^2}{2}\left(1 + \dfrac{a}{g}\right)$.

Время падения с этой высоты $t_0 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \dfrac{\tau}{g}\sqrt{a(a+g)} = 2{,}45$ мин.

О т в е т. $t_0 = 2{,}45$ мин.

1.1.7. Подъемный кран опускает бетонную плиту с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. Когда плита находилась на расстоянии $h = 4$ м от поверхности земли, с нее упал небольшой камень. Каков промежуток времени τ между моментами, в которые камень и плита достигли земли? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2, толщиной плиты по сравнению с h пренебречь.

Р е ш е н и е. Пусть t_1 — время падения камня, $t_2 = \dfrac{h}{v}$ — время движения плиты до момента достижения земли. Из кинематического уравнения, описывающего падение камня, следует соотношение: $h = \dfrac{gt_1^2}{2} + vt_1$, или $t_1^2 + \dfrac{2v}{g}t_1 - \dfrac{2h}{g} = 0$. Положительный корень этого уравнения $t_1 = \dfrac{v}{g}\left(\sqrt{1 + \dfrac{2gh}{v^2}} - 1\right)$.

О т в е т. $\tau = t_2 - t_1 = \dfrac{h}{v} - \dfrac{v}{g}\left(\sqrt{1 + \dfrac{2gh}{v^2}} - 1\right) = 3{,}2$ с.

1.1.8. Ракета запущена вертикально вверх и во время работы двигателя имела постоянное ускорение $a = 5g$. Спустя $t_0 = 1$ мин после старта двигатель ракеты отключился. Через какое время τ после отключения двигателя ракета упала на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. На участке разгона ракета набрала высоту $y_0 = \dfrac{at_0^2}{2}$ и приобрела скорость $v_0 = at_0$. Кинематическое уравнение движения ракеты после отключения двигателя имеет вид: $y = y_0 + v_0t - \dfrac{gt^2}{2}$. Полагая $y = 0$, $t = \tau$, получаем квадратное уравнение: $\tau^2 - 2\frac{at_0}{g}\tau - \frac{at_0^2}{g} = 0$. Положительный корень этого уравнения дает: $\tau = \left(\frac{a}{g} + \sqrt{\frac{a}{g}\left(1 + \frac{a}{g}\right)}\right)t_0 \approx 630\text{ с} = 10{,}5$ мин.

Ответ. $\tau = 10{,}5$ мин.

1.1.9. Шарик бросают вертикально вверх со скоростью $v_0 = 5$ м/с. Пролетев расстояние $h = 1{,}05$ м, он упруго ударяется о потолок и падает вниз. Через какое время τ после начала движения шарик упадет на пол, если расстояние от пола до потолка $H = 2{,}25$ м? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Время движения шарика от момента броска до момента соударения с потолком равно $t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g}$, где v_1 — скорость шарика непосредственно перед ударом о потолок, т. е. $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$. Время движения шарика от момента удара о потолок до момента падения на пол равно $t_2 = \frac{v_2 - v_1}{g}$, где $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gH}$ — скорость шарика непосредственно перед ударом о пол. Объединяя записанные выражения и учитывая, что $\tau = t_1 + t_2$, получаем: $\tau = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2(H-h)g}{v_0^2}} - 2\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}\right) = 0{,}8$ с.

Ответ. $\tau = 0{,}8$ с.

1.1.10. В кабине лифта высотой $H = 2{,}5$ м, движущейся с ускорением $a = 0{,}8$ м/с^2, направленным вниз, вертикально вверх бросают маленький шарик с высоты $h = 0{,}5$ м от пола. С какой начальной скоростью v_0 относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

Решение. Пусть в неподвижной системе отсчета, начало которой совмещено с полом кабины в момент броска шарика, а ось Oy направлена вертикально вверх, $y_{\text{ш}}$ и v — координата шарика и его скорость, а $y_{\text{к}}$ и u — координата потолка кабины и ее скорость. Предположим, что скорость кабины в момент броска равна u_0 и направлена вверх. Для координат и скоростей шарика и потолка кабины справедливы кинематические уравнения: $y_{\text{ш}}(t) = h + (v_0 + u_0)t - \frac{gt^2}{2}$, $v(t) = v_0 + u_0 - gt$, $y_{\text{к}}(t) = H + u_0 t - \frac{at^2}{2}$, $u(t) = u_0 - at$, причем начало отсчета времени совпадает с моментом броска шарика. Поскольку шарик после броска поднимается точно до потолка кабины, в этот момент времени t_0 справедливы следующие соотношения: $y_{\text{ш}}(t_0) = y_{\text{к}}(t_0)$, $v(t_0) = u(t_0)$. Объединяя записанные выражения, находим: $v_0 = \sqrt{2(H-h)(g-a)} = 6$ м/с.

Ответ. $v_0 = 6$ м/с.

1.1.11. Два тела начали падать с одной и той же высоты с интервалом $t_0 = 5$ с. Через какое время τ после начала падения второго тела расстояние между телами будет $d = 200$ м? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Кинематические уравнения движения тел имеют вид: $y_1(t) = \dfrac{g(t_0+t)^2}{2}$, $y_2(t) = \dfrac{gt^2}{2}$. Расстояние между телами в момент времени τ равно: $d = x_1(\tau) - x_2(\tau) = \dfrac{g}{2}(t_0^2 + 2t_0\tau)$. Отсюда $\tau = \dfrac{d}{gt_0} - \dfrac{t_0}{2} = 1{,}5$ с.

Ответ. $\tau = 1{,}5$ с.

1.1.12. Два тела скользят навстречу друг другу по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 2\cdot 10^{-4}$ рад. В момент, когда расстояние между ними $S = 130$ см, скорость тела, движущегося вверх, составляет $v_1 = 5$ см/с, а скорость тела, движущегося вниз, — $v_2 = 1{,}5$ см/с. Какие пути S_1 и S_2 пройдут тела до места встречи? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2, трением тел о плоскость пренебречь.

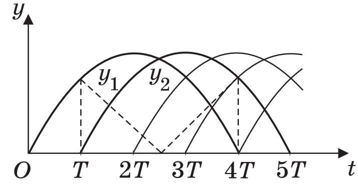
Решение. В координатной системе с началом, совпадающим с положением второго тела в начальный момент времени, и осью Ox, направленной вдоль наклонной плоскости вниз, кинематические уравнения движения тел имеют вид: $x_1(t) = S - v_1t + \dfrac{at^2}{2}$, $x_2(t) = v_2t + \dfrac{at^2}{2}$, где ускорение тел $a = g\sin\alpha \approx g\alpha$. В момент встречи тел $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, откуда $t_0 = \dfrac{S}{v_1+v_2}$. Поскольку $S_1 = S - x_1(t_0)$, $S_2 = x_2(t_0)$, то: $S_1 = \dfrac{v_1S}{v_1+v_2} - \dfrac{g\alpha S^2}{2(v_1+v_2)^2} = 60$ см,

$S_2 = \dfrac{v_2S}{v_1+v_2} - \dfrac{g\alpha S^2}{2(v_1+v_2)^2} = 70$ см.

Ответ. $S_1 = 60$ см; $S_2 = 70$ см.

1.1.13. Жонглер бросает вертикально вверх шарики с одинаковой скоростью через равные промежутки времени. При этом пятый шарик жонглер бросает в тот момент, когда первый шарик возвращается в точку бросания. Найти максимальное расстояние S между первым и вторым шариками, если начальная скорость шариков $v_0 = 5$ м/с. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Зависимости координат первого и второго шариков от времени описываются уравнениями: $y_1 = v_0t - \dfrac{gt^2}{2}$, $y_2 = v_0(t - T) - \dfrac{g(t-T)^2}{2}$, где T — промежуток времени

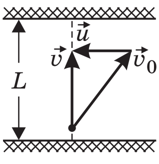


между бросаниями шариков. Время полета каждого из шариков $t_0 = \dfrac{2v_0}{g}$, поэтому $T = \dfrac{t_0}{4} = \dfrac{v_0}{2g}$, причем первый и второй шарики находятся в полете одновременно при $T \le t \le 4T$ (см. рисунок, на котором сплошными линиями изображены зависимости координат шариков от времени). Расстояние между первым и вторым шариками $S = |y_1 - y_2| = \left|v_0T + \dfrac{gT^2}{2} - gTt\right|$. График зависимости этой величины от времени изображен на рисунке штриховой линией. Анализ последнего выражения показывает, что оно достигает максимума при $t = T$ и при $t = 4T$, т. е. в момент бросания второго шарика и в момент возвращения первого шарика в исходную точку. Подставляя в выражение для расстояния между шариками одно из этих значений времени, получаем: $S_{\max} = \dfrac{3v_0^2}{8g} \approx 0{,}94$ м.

Ответ. $S_{\max} \approx 0{,}94$ м.

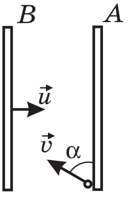
1.1.14. Пловец переплывает реку шириной L по прямой, перпендикулярной берегу, и возвращается обратно, затратив на весь путь время $t_1 = 4$ мин. Проплывая такое же расстояние L вдоль берега реки и возвращаясь обратно, пловец затрачивает время $t_2 = 5$ мин. Во сколько раз α скорость пловца относительно воды превышает скорость течения реки?

Решение. Согласно закону сложения скоростей, скорость пловца относительно неподвижной системы отсчета $\vec{v}$ равна векторной сумме его скорости относительно воды $\vec{v}_0$ и скорости течения $\vec{u}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$. В первом случае, когда пловец пересекает реку по прямой, перпендикулярной берегу, $\vec{v} \perp \vec{u}$ и векторы $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ и $\vec{u}$ образуют прямоугольный треугольник (см. рисунок). Следовательно, в этом случае $v = \sqrt{v_0^2 - u^2}$ и время, за которое пловец переплывает реку туда и обратно, $t_1 = \dfrac{2L}{\sqrt{v_0^2 - u^2}}$. Во втором случае, когда пловец плывет вдоль берега, его скорость в неподвижной системе отсчета равна $v_1 = v_0 + u$ при движении по течению и $v_2 = v_0 - u$ при движении против течения. Следовательно, время, которое пловец затрачивает для того, чтобы проплыть вдоль берега расстояние L и вернуться обратно, $t_2 = \dfrac{L}{v_0 + u} + \dfrac{L}{v_0 - u} = \dfrac{2Lv_0}{v_0^2 - u^2}$. Разрешая полученную систему уравнений, находим: $v_0 = \dfrac{2Lt_2}{t_1^2}$, $u = \dfrac{2L}{t_1^2}\sqrt{t_2^2 - t_1^2}$. Следовательно $\alpha = \dfrac{v_0}{u} = \dfrac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \dfrac{5}{3}$.



Ответ. $\alpha = \dfrac{5}{3}$.

1.1.15. Шарик пренебрежимо малой массы начинает скольжение в горизонтальной плоскости от неподвижной доски A со скоростью $v = 2$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к ней. Доска B, параллельная доске A, движется перпендикулярно плоскости доски A с некоторой скоростью u. Найти u, если время движения шарика от доски A до встречи с доской B в $k = 2$ раза превышает время его движения обратно. Удар шарика о доску B считать упругим. Трением пренебречь.



Р е ш е н и е. Пусть расстояние между досками в начальный момент равно L. По закону сложения скоростей, модуль составляющей относительной скорости шарика, нормальной к доске B, до удара равен $v_{\perp\text{отн}} = v\sin\alpha + u$. Следовательно, время движения шарика до удара о доску B равно $t_1 = \dfrac{L}{v\sin\alpha + u}$. После удара модуль составляющей скорости шарика, нормальной к доске B, станет равным $v\sin\alpha + 2u$. Поэтому время обратного движения шарика до доски A составит $t_2 = \dfrac{L - ut_1}{v\sin\alpha + 2u}$. Используя условие $t_1 = kt_2$, получаем: $u = \dfrac{(k-1)v\sin\alpha}{2} = 0{,}5$ м/с.

О т в е т. $u = 0{,}5$ м/с.

1.1.16. Мяч брошен с поверхности земли под углом $\alpha = 45°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с в направлении вертикальной стенки, расстояние до которой $l = 7$ м. На какой высоте h мяч ударится о стенку? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Из уравнения траектории мяча $y(x) = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ получаем: $h = l\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gl^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \approx 2$ м.

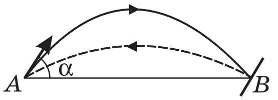
О т в е т. $h \approx 2$ м.

1.1.17. Человек бросает камень через забор высотой $H = 2{,}5$ м. На какое максимальное расстояние S он может отойти от забора, если бросок производится с высоты $h = 2$ м от поверхности земли со скоростью $v_0 = 5$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Р е ш е н и е. Уравнение траектории камня имеет вид: $y(x) = h + \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. Полагая $y = H$, получаем квадратное уравнение относительно x, а именно $x^2 - \dfrac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}x + \dfrac{2v_0^2\cos^2\alpha(H-h)}{g} = 0$. Условию задачи удовлетворяет больший по величине корень этого уравнения.

О т в е т. $S = \dfrac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\left[1 + \sqrt{1 - \dfrac{2g(H-h)}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right] \approx 1{,}81$ м.

1.1.18. Шарик, брошенный из точки A под углом α к горизонту, в точке B, лежащей на одной горизонтали с точкой A, ударяется о гладкую площадку, наклоненную к горизонту. После упругого удара шарик возвращается в исходную точку A, затратив на полет в $k = \sqrt{3}$ раз меньшее время. Найти угол α, под которым тело было брошено из точки A.



Решение. Дальность полета тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью v_0, равна $L = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, а время полета $t_{\text{п}} = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Поскольку модуль скорости шарика при упругом ударе не изменяется, а дальность полета шарика в обе стороны одинакова, справедливо равенство: $\dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}$, где β — угол, который скорость шарика образует с горизонталью после удара. Отсюда следует, что $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ при $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\beta < \dfrac{\pi}{2}$ Этому уравнению удовлетворяют два корня: $\beta = \alpha$ и $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, причем условию задачи соответствует второй корень. Следовательно, $\sin\beta = \cos\alpha$. Поскольку отношение времен полета $k = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, получаем: $\alpha = \operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ$.

Ответ $\alpha = 60^\circ$.

1.1.19. Под каким углом α к горизонту нужно бросить камень, чтобы отношение максимальной высоты подъема камня к дальности его полета составило $n = \sqrt{3}/4$?

Решение. Используя выражения для дальности L и максимальной высоты H полета тела, а именно: $L = 2\dfrac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$, $H = \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$, находим, что $\dfrac{H}{L} = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

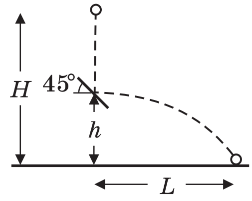
Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}(4n) = 60^\circ$.

1.1.20. Снаряд, вылетевший из пушки под углом $\alpha_1 = 15^\circ$ к горизонту, падает на расстоянии $L_1 = 5$ км. Какой будет дальность полета снаряда L_2 при угле вылета из пушки $\alpha_2 = 45^\circ$? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Пусть v_0 — скорость вылета снаряда из ствола пушки. Используя выражения для дальности полета снаряда, имеем: $L_1 = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_1$, $L_2 = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_2$. Исключая из этих соотношений v_0, получаем: $L_2 = L_1\dfrac{\sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1} = 10$ км.

Ответ. $L_2 = 10$ км.

1.1.21. Маленький шарик падает с высоты $H = 2$ м без начальной скорости. На высоте $h = 0{,}5$ м над землей шарик испытывает абсолютно упругий удар о закрепленную гладкую площадку, наклоненную под углом 45° к горизонту. Найти дальность полета шарика L.



Решение. При упругом соударении шарика с неподвижной гладкой площадкой угол между нормалью к площадке и скоростью $\vec{v}_1$ после удара равен углу между нормалью и скоростью $\vec{v}_0$ перед ударом. По условию задачи, $\alpha = 45°$, поэтому $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_0$ и скорость шарика непосредственно после удара направлена горизонтально. При падении шарика с высоты $H - h$ модуль его скорости $v_0 = \sqrt{2g(H-h)}$. Движение шарика после соударения с площадкой происходит с начальной горизонтальной скоростью $v_1 = v_0$. Дальность полета шарика равна $L = v_1\tau$, где $\tau = \sqrt{2h/g}$ — время падения с высоты h.

Ответ. $L = 2\sqrt{h(H-h)} \approx 1{,}7$ м.

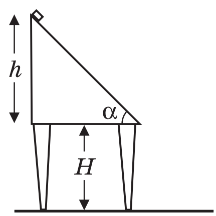
1.1.22. Пушка делает два выстрела с интервалом $\tau = 10$ с. Каким будет расстояние l между снарядами спустя время $t = \tau$ после второго выстрела? Скорость снаряда при выстреле $v_0 = 300$ м/с, ствол пушки направлен под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2, силу сопротивления воздуха при движении снарядов не учитывать.

Решение. Кинематические уравнения, записанные для горизонтальной и вертикальной координат снарядов, имеют вид: $x_1 = (v_0 \cos\alpha)\cdot 2\tau$, $y_1 = (v_0 \sin\alpha)\cdot 2\tau - \dfrac{g(2\tau)^2}{2}$ (для первого снаряда), $x_2 = (v_0\cos\alpha)\cdot\tau$, $y_2 = (v_0\sin\alpha)\cdot\tau - \dfrac{g\tau^2}{2}$ (для второго снаряда). Искомое расстояние $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

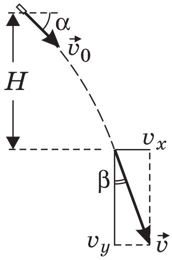
После подстановки получаем: $l = v_0\tau\sqrt{1 - \dfrac{3g\tau}{v_0}\sin\alpha + \left(\dfrac{3g\tau}{2v_0}\right)^2} \approx 1877$ м.

Ответ. $l = 1877$ м.

1.1.23. Маленький брусок соскальзывает без трения с наклонной плоскости высотой $h = 1$ м и с углом при основании $\alpha = 45°$, а затем свободно падает на пол с высоты $H = 1$ м. Найти угол β между направлением скорости и вертикалью в момент удара бруска о пол. Сопротивлением воздуха пренебречь.



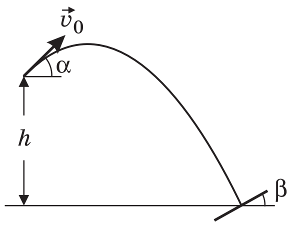
Решение. Брусок, соскальзывающий без трения по наклонной плоскости высотой h, приобретает скорость $v_0 = \sqrt{2gh}$ которая направлена вниз под углом α к горизонту. При свободном падении бруска горизонтальная проекция скорости $v_x = v_0\cos\alpha$ остается неизменной, а вертикальная возрастает и становится к концу падения равной



$v_y = \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gH}$. Искомый угол $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{v_x}{v_y}$ (см. рисунок). После преобразования получаем: $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{h}\cos\alpha}{\sqrt{h\sin^2\alpha + H}} = \arcsin\dfrac{\sqrt{h}\cos\alpha}{\sqrt{h+H}} = 30°$.

Ответ. $\beta = 30°$.

1.1.24. Шарик брошен с башни высотой $h = 4{,}9$ м под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 7$ м/с. При падении на землю шарик упруго ударяется о наклонную плоскость и возвращается в точку бросания по той же траектории. Какой угол β составляет наклонная плоскость с горизонталью? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



Решение. После упругого удара о наклонную плоскость шарик вернется в точку бросания по той же траектории, что и при падении, если плоскость расположена перпендикулярно его скорости $\vec{v}$ перед ударом. Поэтому угол β между наклонной плоскостью и горизонталью равен углу между скоростью шарика в момент падения $\vec{v}$ и вертикалью. Обозначив через $v_x = v_0\cos\alpha$ горизонтальную проекцию скорости шарика, имеем: $\sin\beta = v_x / v$, где v — модуль скорости шарика перед ударом. Согласно закону сохранения энергии, $\dfrac{mv^2}{2} = mgh + \dfrac{mv_0^2}{2}$. Отсюда $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Объединяя записанные выражения, получаем:

$$\beta = \arcsin\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + 2gh / v_0}} = \arcsin 0{,}5 = 30°.$$

Ответ. $\beta = 30°$.

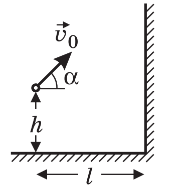
1.1.25. С вершины холма бросили камень под некоторым углом к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. В момент падения камня на склон холма величина угла между направлением скорости камня и горизонтом составила $\beta = 60°$, а разность высот точек бросания и падения $\Delta h = 5$ м. Найти угол α между направлением начальной скорости камня v_0 и горизонтом. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Решение. Горизонтальная проекция скорости камня $v_x = v_0\cos\alpha$ при его падении остается постоянной. Из закона сохранения энергии следует, что модуль скорости камня в момент падения на склон холма равен $v = \sqrt{v_0^2 + 2g\Delta h}$ Учитывая, что $\cos\beta = \dfrac{v_x}{v} = \dfrac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2g\Delta h}}$, находим:

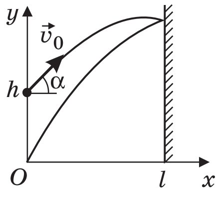
$$\alpha = \arccos\left(\cos\beta\sqrt{1 + \frac{2g\Delta h}{v_0^2}}\right) = 45°.$$

Ответ. $\alpha = 45°$.

1.1.26. Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены так, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к его ногам. Какова должна быть начальная скорость мяча v_0, если бросок производится с высоты $h = 1{,}5$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту? Расстояние от мальчика до стены $l = 6$ м. Удар мяча о стену считать абсолютно упругим, ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

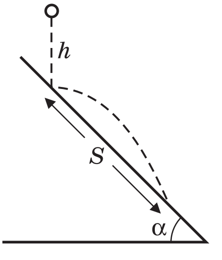


Решение. Для того чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к ногам мальчика, траектория мяча должна иметь вид, изображенный на рисунке. При упругом ударе о неподвижную стенку угол между нормалью к стенке и скоростью мяча перед ударом равен по величине углу между нормалью к стенке и скоростью мяча после удара. Обозначим через t_0 время полета мяча. За это время он проходит по горизонтали путь $2l$. Горизонтальная составляющая скорости мяча равна $v_0 \cos\alpha$ и при полете не меняется по величине, следовательно, $(v_0 \cos\alpha) \cdot t_0 = 2l$ С другой стороны, в момент времени t_0 вертикальная координата мяча должна обратиться в нуль: $h + (v_0 \sin\alpha) \cdot t_0 - \dfrac{gt_0^2}{2} = 0$. Исключая из полученных соотношений t_0, находим: $v_0 = \dfrac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{2g}{h + 2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}} \approx 10$ м/с.

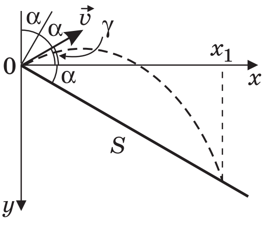


Ответ. $v_0 \approx 10$ м/с.

1.1.27. Маленький шарик падает с высоты $h = 50$ см на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. Найти расстояние S между точками первого и второго соударений шарика с наклонной плоскостью. Соударения считать абсолютно упругими, сопротивлением воздуха пренебречь.



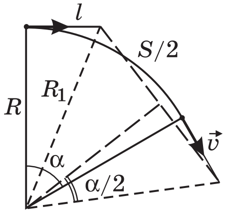
Решение. Из рисунка видно, что угол, который образует с горизонтом скорость шарика $\vec{v}$ после удара о наклонную плоскость, $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. В системе координат, изображенной на рисунке, кинематические уравнения движения шарика после удара имеют вид: $x = (v \sin 2\alpha) \cdot t$, $y = -(v \cos 2\alpha) \cdot t + \dfrac{gt^2}{2}$. Исключая время t, получаем уравнение траектории шарика: $y(x) = -(\mathrm{ctg}\,2\alpha) \cdot x + \dfrac{gx^2}{2v^2 \sin^2\alpha}$. Уравнение наклонной плоскости имеет вид: $y_{\text{пл}}(x) = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$. В точке падения шарика на плоскость выполняется равенство: $y(x_1) = y_{\text{пл}}(x_1)$. Отсюда горизонтальная координата точки падения $x_1 = \dfrac{4v^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$. Поскольку $S = \dfrac{x_1}{\cos\alpha}$, $v = \sqrt{2gh}$, получаем: $S = 8h \sin\alpha = 4h\sqrt{2} \approx 2{,}83$ м.



Ответ. $S \approx 2{,}83$ м.

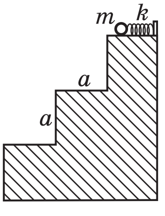
1.1.28. Самолет летит по дуге окружности радиуса $R = 1$ км, сохраняя одну и ту же высоту $h = 1{,}5$ км над горизонтальной поверхностью. С интервалом времени $\tau = 10{,}5$ с ($\approx 10\pi / 3$ с) с него сбрасывают два мешка. На каком расстоянии S друг от друга упадут на землю эти мешки, если скорость самолета $v = 100$ м/с? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Вид сверху на траекторию самолета изображен на рисунке. Горизонтальное перемещение мешка за время падения с высоты h равно $l = v\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Следовательно, расстояние от места падения мешка до центра проекции на поверхность земли окружности, по которой движется самолет, $R_1 = \sqrt{R^2 + l^2}$. Из рисунка видно, что $\dfrac{S}{2} = R_1 \sin\dfrac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \dfrac{v\tau}{R}$. Объединяя записанные выражения, находим: $S = 2\sqrt{R^2 + \dfrac{2hv^2}{g}}\sin\left(\dfrac{v\tau}{2R}\right) \approx 2$ км.

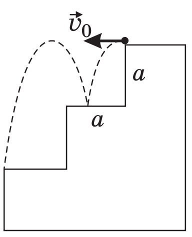


Ответ. $S \approx 2$ км.

1.1.29. Лестница состоит из трех одинаковых гладких ступенек шириной $a = 30$ см и такой же высотой. На верхней ступеньке расположена в плоскости рисунка невесомая пружина жесткостью $k = 30$ Н/м, правым концом прикрепленная к неподвижной стенке, а левым — упирающаяся в лежащий на ступеньке маленький шарик массой $m = 100$ г. Шарик сдвигают вправо, сжимая пружину, после чего отпускают без начальной скорости. До какой максимальной величины Δl_{max} можно сжать пружину, чтобы выпущенный шарик по одному разу ударился о горизонтальную поверхность средней и нижней ступенек? Удар шарика о ступеньку считать абсолютно упругим, трение и сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



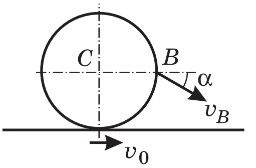
Решение. Сжатая пружина сообщает шарику начальную скорость $\vec{v}_0$, величина которой может быть найдена из закона сохранения энергии: $v_0 = \Delta l\sqrt{k / m}$. По условию задачи, максимальная начальная скорость шарика отвечает случаю, когда шарик отскакивает от средней ступеньки и попадает на самый край нижней ступеньки. Траектория шарика, соответствующая этому случаю, изображена на рисунке. Время падения шарика с высоты a равно $t_1 = \sqrt{2a / g}$. Такое же время шарик будет подниматься до уровня верхней ступеньки. Время падения шарика с высоты верхней ступеньки до удара о нижнюю ступеньку $t_2 = \sqrt{4a / g}$. Полное время движения шарика $t_0 = 2t_1 + t_2 = 2\sqrt{\dfrac{a}{g}}(\sqrt{2} + 1)$. За это



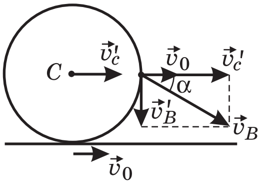
время шарик смещается по горизонтали на расстояние $2a$. Объединяя записанные соотношения, получаем ответ: $\Delta l_{\max} = \sqrt{\dfrac{mga}{k}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \approx 4{,}14$ см.

Ответ. $\Delta l_{\max} = 4{,}14$ см.

1.1.30. Колесо катится без проскальзывания по ленте транспортера, движущейся горизонтально со скоростью $v_0 = 1$ м/с, в направлении движения ленты. Известно, что относительно неподвижного наблюдателя скорость v_B точки B, находящейся на горизонтальном диаметре обода колеса, составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Найти скорость v центра C колеса относительно неподвижного наблюдателя.



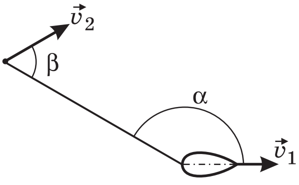
Решение. По закону сложения скоростей, скорость центра колеса относительно неподвижного наблюдателя (абсолютная скорость) равна $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'_c$, где $\vec{v}\,'_c$ — скорость центра колеса относительно ленты транспортера (см. рисунок). Из условия отсутствия проскальзывания следует, что $v'_c = v'_B$, где v'_B — модуль скорости точки B относительно центра колеса. Таким образом, $v = v_0 + v'_c$, $v'_B = v - v_0$. Как видно из рисунка, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v'_B}{v_0 + v'_c} = \dfrac{v - v_0}{v}$. Отсюда



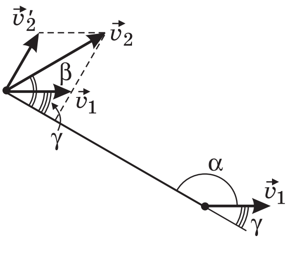
$v = \dfrac{v_0}{1 - \operatorname{tg}\alpha} \approx 2{,}36$ м/с.

Ответ. $v = 2{,}36$ м/с.

1.1.31. Катер, движущийся со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, буксирует спортсмена на водных лыжах. Трос, за который держится спортсмен, составляет с направлением движения катера угол $\alpha = 150°$. Направление движения спортсмена образует с тросом угол $\beta = 60°$. Чему равна величина скорости спортсмена v_2 в этот момент времени?



Решение. По закону сложения скоростей скорость спортсмена относительно неподвижной системы отсчета (его абсолютная скорость) равна $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}\,'_2$, где $\vec{v}\,'_2$ — скорость спортсмена относительно катера (см. рисунок). Поскольку вектор $\vec{v}\,'_2$ перпендикулярен тросу, проекции скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ на направление троса в каждый момент времени равны друг: $v_1 \cos\gamma = v_2 \cos\beta$. Учитывая, что $\gamma = 180° - \alpha$, получаем: $v_2 = v_1 \dfrac{\cos(180° - \alpha)}{\cos\beta} \approx$ ≈ 52 км/ч.



Ответ. $v_2 \approx 52$ км/ч.

Об авторах

Владимир Анатольевич Макаров — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, директор Международного лазерного центра МГУ. Им получены принципиально новые результаты в физике взаимодействия плоских волн, пучков и импульсов в нелинейных средах с пространственной и временной дисперсией. Они позволяют предсказывать, описывать и учитывать эффекты изменения интенсивности и поляризации электромагнитных волн в кристаллах, метаматериалах, жидкостях и жидких кристаллах, способствуют решению задач формирования световых пучков и импульсов с необходимым распределением интенсивности и поляризации.

В. А. Макаров — автор более 200 научных статей в ведущих отечественных и зарубежных журналах и монографии, а также большого числа учебно-методических пособий, предназначенных для школьников, готовящихся к поступлению в МГУ. В составе коллектива он был удостоен премии Президента РФ в области образования (2003 г.) и Ломоносовской премии МГУ за научную работу (2006 г.). В. А. Макарову присвоено Почетное звание «Заслуженный профессор Московского университета».

Сергей Сергеевич Чесноков — кандидат физико-математических наук, доцент физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Его научные интересы лежат в области разработки алгоритмов адаптивного управления световыми пучками в нелинейных турбулентных средах и в лазерных резонаторах, теоретического анализа переноса изображений в турбулентной атмосфере, многократного рассеяния света в мутных средах. Им опубликовано более 200 научных статей и монография. Кроме того, он является автором и соавтором большого числа учебно-методических пособий, предназначенных для школьников, готовящихся к поступлению в МГУ, участвует в разработке программно-аппаратного комплекса для проведения демонстрационных экспериментов по физике в средней школе. С. С. Чеснокову присвоено почетное звание «Заслуженный преподаватель Московского университета».

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

- на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
- для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
- сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН ***Е. И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru