



---

---

# Оглавление



<b>Предисловие автора</b>	10
<b>Глава 1. Действительные числа</b>	11
§1. Необходимые и достаточные условия. Целые и рациональные числа. Метод математической индукции	11
Справочные сведения	11
Примеры с решениями	13
Задачи	18
Ответы	19
§2. Действительные числа, степени и корни, логарифмы. Тожественные преобразования алгебраических выражений	19
Справочные сведения	19
Примеры с решениями	23
Задачи	29
Ответы	30
§3. Последовательность. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Предел последовательности	31
Справочные сведения	31
Примеры с решениями	34
Задачи	39
Ответы	41
§4. Основные формулы тригонометрии. Арксинус, арккосинус и арктангенс числа	42
1. Основные формулы тригонометрии	42
Справочные сведения	42
Примеры с решениями	46
Задачи	53
Ответы	55
2. Арксинус, арккосинус и арктангенс числа	56
Справочные сведения	56
Примеры с решениями	58
Задачи	62
Ответы	63
§5. Числовые неравенства	63
Справочные сведения	63
Примеры с решениями	68
Задачи	73
Ответы и указания	76
<b>Глава 2. Алгебраические уравнения</b>	78
§6. Уравнение и его корни. Преобразование уравнений	78
Справочные сведения	78
Задачи	83
Ответы	83

§ 7. Рациональные уравнения .....	84
Справочные сведения .....	84
Примеры с решениями .....	87
Задачи .....	90
Ответы .....	91
Указания .....	91
§ 8. Иррациональные уравнения. Уравнения, содержащие знак модуля .....	91
Справочные сведения .....	91
Примеры с решениями .....	92
Задачи .....	96
Ответы .....	97
Указания .....	97
<b>Глава 3. Показательные и логарифмические уравнения</b> .....	<b>98</b>
§ 9. Показательные уравнения .....	98
Справочные сведения .....	98
Примеры с решениями .....	98
Задачи .....	100
Ответы .....	101
§ 10. Логарифмические уравнения .....	101
Справочные сведения .....	101
Примеры с решениями .....	102
Задачи .....	108
Ответы .....	109
<b>Глава 4. Тригонометрические уравнения</b> .....	<b>110</b>
§ 11. Простейшие тригонометрические уравнения. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим относительно $\sin x$ , $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ .....	110
Справочные сведения .....	110
Примеры с решениями .....	112
Задачи .....	115
Ответы .....	115
§ 12. Решение уравнений с помощью введения вспомогательного угла, методом замены неизвестного и разложения на множители, с помощью формул понижения степени .....	116
Справочные сведения .....	116
Примеры с решениями .....	119
Задачи .....	125
Ответы .....	126
§ 13. Уравнения, решаемые с помощью оценки их левой и правой частей. Уравнения, содержащие знаки корня и модуля ..	127
Справочные сведения .....	127
Примеры с решениями .....	128
Задачи .....	139
Ответы .....	139
§ 14. Тригонометрические уравнения различных видов .....	140
Примеры с решениями .....	140
Задачи .....	146
Ответы .....	146
Задачи к главе IV .....	147
Ответы .....	150
Указания .....	154

Глава 5. Системы уравнений	156
§ 15. Основные понятия, относящиеся к системам уравнений. Системы линейных уравнений	156
Справочные сведения	156
Примеры с решениями	162
Задачи	167
Ответы	169
Указания	170
§ 16. Системы алгебраических уравнений	170
1. Нелинейные системы уравнений с двумя неизвестными	170
а) Однородные системы	170
б) Симметрические системы	173
в) Другие типы систем	175
Задачи	178
Ответы	179
Указания	179
2. Иррациональные системы с двумя неизвестными	181
Задачи	184
Ответы	185
Указания	185
3. Алгебраические системы с тремя неизвестными	185
Справочные сведения	186
Примеры с решениями	188
Задачи	194
Ответы	195
Указания	196
§ 17. Задачи на составление и решение уравнений	199
1. Задачи на движение	200
Справочные сведения	200
Примеры с решениями	200
2. Задачи на сплавы и смеси	210
Справочные сведения	210
Примеры с решениями	210
3. Задачи на совместную работу	212
Примеры с решениями	212
Задачи	214
Ответы	217
§ 18. Системы показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений	217
1. Системы показательных уравнений	217
Примеры с решениями	217
2. Системы, содержащие логарифмы с постоянными основаниями	220
Примеры с решениями	220
3. Системы, содержащие логарифмы с переменными основаниями	225
Примеры с решениями	225
Задачи	227
Ответы	228
Указания	229
4. Системы тригонометрических уравнений	230
Примеры с решениями	230

Задачи .....	240
Ответы .....	240
Указания .....	241
<b>Глава 6. Алгебраические неравенства</b> .....	<b>243</b>
§ 19. Основные понятия, связанные с решением неравенств .....	243
Справочные сведения .....	243
Примеры с решениями .....	246
Задачи .....	250
Ответы .....	251
§ 20. Квадратный трехчлен и квадратные неравенства .....	251
Справочные сведения .....	251
Примеры с решениями .....	255
Задачи .....	263
Ответы .....	264
§ 21. Рациональные неравенства .....	264
1. Метод интервалов .....	264
Примеры с решениями .....	264
2. Расположение корней квадратного трехчлена на числовой оси .....	269
Справочные сведения .....	269
Примеры с решениями .....	273
Задачи .....	274
Ответы .....	275
§ 22. Иррациональные неравенства .....	275
Справочные сведения .....	275
Примеры с решениями .....	276
Задачи .....	283
Ответы .....	284
<b>Глава 7. Показательные, логарифмические и тригонометрические нера-</b> <b>венства</b> .....	<b>285</b>
§ 23. Показательные неравенства .....	285
Справочные сведения .....	285
Примеры с решениями .....	286
Задачи .....	290
Ответы .....	290
§ 24. Логарифмические неравенства .....	290
1. Логарифмические неравенства с постоянными основаниями .....	291
Справочные сведения .....	291
Примеры с решениями .....	291
2. Логарифмические неравенства с переменными основаниями .....	301
Справочные сведения .....	301
Примеры с решениями .....	301
Задачи .....	308
Ответы .....	310
§ 25. Тригонометрические неравенства .....	311
Примеры с решениями .....	311
Задачи .....	320
Ответы .....	320

Глава 8. Системы неравенств с двумя переменными	322
§ 26. Неравенства и системы линейных неравенств с двумя переменными	322
1. Прямая на плоскости	322
Справочные сведения	322
2. Угол между прямыми	323
3. Линейные неравенства с двумя переменными	324
4. Системы линейных уравнений и неравенств с двумя переменными	326
Справочные сведения	326
Примеры с решениями	327
5. Уравнения, неравенства и системы неравенств с двумя переменными, содержащие знак модуля	330
Примеры с решениями	330
Задачи	334
Ответы	335
§ 27. Нелинейные системы неравенств с двумя переменными	335
Примеры с решениями	336
Задачи	342
Ответы	343
Глава 9. Планиметрия	344
§ 28. Треугольник	344
Справочные сведения	344
Примеры с решениями	347
Задачи	362
Ответы	368
§ 29. Четырехугольник	368
Справочные сведения	368
Примеры с решениями	370
Задачи	384
Ответы	388
§ 30. Окружность и круг	389
Справочные сведения	389
Примеры с решениями	391
Задачи	401
Ответы	407
§ 31. Комбинации геометрических фигур	407
Примеры с решениями	407
Задачи	424
Ответы	428
Глава 10. Прямые и плоскости в пространстве	429
§ 32. Справочный материал по стереометрии	429
§ 33. Сечения многогранников	449
Справочные сведения	449
Примеры с решениями	450
§ 34. Вычисление углов в пространстве	461
1. Угол между прямыми	461
Справочные сведения	461
Примеры с решениями	462

2. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью	466
Справочные сведения	467
Примеры с решениями	467
Справочные сведения	469
Примеры с решениями	469
3. Двугранные углы	473
Справочные сведения	473
Примеры с решениями	473
§ 35. Вычисление расстояний в пространстве	482
1. Расстояние между двумя точками	482
Справочные сведения	482
Примеры с решениями	482
2. Расстояние от точки до прямой	485
Справочные сведения	485
Примеры с решениями	486
3. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями	486
Примеры с решениями	488
4. Расстояние между скрещивающимися прямыми	494
Справочные сведения	494
Примеры с решениями	495
<b>Глава 11. Многогранники</b>	<b>500</b>
§ 36. Треугольная пирамида	500
1. Объем пирамиды	500
Справочные сведения	500
Примеры с решениями	500
2. Пирамида и сфера	508
Справочные сведения	508
Примеры с решениями	509
3. Разные задачи	515
Примеры с решениями	515
§ 37. Четырехугольная и шестиугольная пирамиды	530
Примеры с решениями	530
§ 38. Призма	543
Примеры с решениями	543
<b>Глава 12. Круглые тела, комбинации геометрических тел</b>	<b>559</b>
§ 39. Конус, цилиндр и сфера	559
Справочные сведения	559
1. Конус и сфера. Цилиндр и сфера	559
Примеры с решениями	559
2. Сфера, прямая и плоскость	564
Справочные сведения	564
Примеры с решениями	565
§ 40. Комбинации круглых тел и многогранников	568
1. Цилиндр и многогранник. Конус и многогранник	568
Примеры с решениями	568
2. Комбинации многогранников	581
Примеры с решениями	581
Задачи к главам 10–12	585

Первый уровень .....	585
Второй уровень .....	587
Третий уровень .....	594
Ответы .....	600
<b>Глава 13. Производная и интеграл</b> .....	<b>603</b>
§ 41. Производная и ее применение к исследованию функций .....	603
Справочные сведения .....	603
Примеры с решениями .....	606
Задачи .....	618
Ответы .....	621
§ 42. Интеграл и его приложения .....	622
Справочные сведения .....	622
Примеры с решениями .....	624
Задачи .....	630
Ответы .....	632
<b>Глава 14. Задачи с параметрами. Разные задачи</b> .....	<b>633</b>
§ 43. Уравнения и системы уравнений с параметрами .....	633
Примеры уравнений с параметрами .....	633
Примеры систем уравнений с параметрами .....	650
Задачи .....	666
Ответы .....	672
§ 44. Неравенства и системы неравенств с параметрами .....	672
Примеры с решениями .....	673
Задачи .....	692
Ответы .....	694
§ 45. Делимость целых чисел, сравнения, целочисленные решения уравнений .....	694
Примеры с решениями .....	694
Задачи .....	701
Ответы .....	702
§ 46. Элементы комбинаторики .....	702
Справочные сведения .....	702
Примеры с решениями .....	703
Задачи .....	704
Ответы .....	705
§ 47. Разные задачи по алгебре .....	705
Примеры с решениями .....	705
Задачи .....	708
Ответы .....	709

---

---

# Предисловие автора



Книга предназначена для тех, кто, обладая знаниями основ школьного курса математики, стремится систематизировать эти знания и успешно сдать вступительные экзамены в вуз.

Каждый раздел пособия содержит необходимый справочный материал и подробно разобранные примеры, взятые из практики вступительных экзаменов в вузы, предъявляющие достаточно высокие требования к математической подготовке абитуриентов. Кроме того, в пособие включены задачи для самостоятельной работы учащихся, расположенные в порядке возрастания трудности. Ко всем этим задачам даны ответы, а к некоторым наиболее трудным — краткие указания. Для удобства пользования книгой ответы приводятся сразу после условий задач параграфа (главы).

В пособие также включены образцы вариантов вступительных экзаменов таких вузов, как МГУ, МФТИ, МГИЭМ, МИРЭА, и др.

Автор стремился подобрать примеры с тем расчетом, чтобы в каждом разделе пособия был предоставлен набор ключевых задач и методов их решения, имея в виду конечную цель: способствовать формированию умений и навыков, необходимых не только для успешной сдачи вступительных экзаменов, но и для повышения уровня математической культуры учащихся.

Работа над пособием, по мнению автора, окажется особенно эффективной, если учащийся сначала попытается самостоятельно решить разобранный в тексте пример, а затем сравнит свое решение с тем, которое приводится в книге.

В работе над пособием автор опирался на многолетний опыт создания учебников и учебных пособий для средней и высшей школы, участия в организации и проведении вступительных экзаменов в Московском физико-техническом институте, чтения лекций по телевидению для поступающих в вузы и на курсах повышения квалификации учителей средних школ.

В седьмое издание включены задачи МФТИ 2003–2013 гг., новые разделы — делимость целых чисел и элементы комбинаторики. Добавлены задачи в §§ 43 и 44 (задачи с параметрами), среди которых — задачи ЕГЭ.

*М. И. Шабунин*

## Действительные числа



### § 1. Необходимые и достаточные условия.

#### Целые и рациональные числа.

#### Метод математической индукции

#### Справочные сведения

#### 1. Прямые и обратные теоремы. Необходимые и достаточные условия.

а) Формулировка каждой теоремы содержит условие теоремы и заключение. Поменяв местами в формулировке некоторой теоремы условие и заключение, получим формулировку теоремы, обратной данной.

б) Пусть  $A$  — некоторое высказывание, т.е. утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Тогда всякое высказывание  $B$ , из которого следует  $A$ , называется *достаточным условием* для  $A$ , а всякое высказывание  $C$ , которое следует из  $A$ , называется *необходимым условием* для  $A$ . В этих случаях пишут:  $B \Rightarrow A$ ,  $A \Rightarrow C$ .

в) Если высказывания  $M$  и  $N$  таковы, что каждое из них следует из другого ( $M \Rightarrow N$ ,  $N \Rightarrow M$ ), то говорят, что каждое из этих высказываний является *необходимым и достаточным условием* другого, и пишут  $M \Leftrightarrow N$ . Тот факт, что  $M \Leftrightarrow N$ , выражают также следующими формулировками:

- для справедливости  $M$  необходимо и достаточно, чтобы имело место  $N$ ;
- $M$  справедливо тогда и только тогда, когда выполняется  $N$ ;
- $M$  имеет место в том и только в том случае, если справедливо  $N$ .

#### 2. Делимость целых чисел.

а) Множество натуральных чисел обозначают буквой  $\mathbf{N}$ , а множество целых чисел — буквой  $\mathbf{Z}$ . Если  $n$  — натуральное число, то пишут  $n \in \mathbf{N}$ , а если  $k$  — целое число, то пишут  $k \in \mathbf{Z}$ .

Натуральное число  $a$  записывают так:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$$

или в виде суммы

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  — цифры соответствующих разрядов.

- б) Если  $r$  — остаток от деления натурального числа  $a$  на натуральное число  $m$ , то

$$a = mq + r,$$

где  $r$  может принимать одно из значений  $0, 1, \dots, m - 1$ ;  $q$  — целое неотрицательное число.

В том случае, когда  $r = 0$ , говорят, что  $a$  делится на  $m$ .

- в) Если  $r$  — остаток от деления натурального числа  $a$  на натуральное число  $m$ , то:

– остаток от деления на  $m$  числа  $na$ , где  $n \in \mathbf{N}$ , равен остатку от деления на  $m$  числа  $nr$ ;

– остаток от деления на  $m$  числа  $a^k$ , где  $k \in \mathbf{N}$ , равен остатку от деления на  $m$  числа  $r^k$ .

- г) Если  $r_1$  и  $r_2$  — остатки от деления на натуральное число  $m$  натуральных чисел  $a$  и  $b$  соответственно, то остатки от деления на  $m$  чисел  $a + b$ ,  $a - b$  и  $ab$  совпадают с остатками от деления на  $m$  чисел  $r_1 + r_2$ ,  $r_1 - r_2$  и  $r_1 r_2$  соответственно.

- д) Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, полученное из данного отбрасыванием всех цифр, кроме двух последних, делится на 4.

- е) Натуральное число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9).

### 3. Метод математической индукции.

Метод доказательства, называемый *методом математической индукции*, основан на следующем принципе, который является одной из аксиом арифметики натуральных чисел.

Предложение  $A(n)$ , зависящее от натуральной переменной  $n$ , считается истинным для всех  $n \in \mathbf{N}$ , если выполнены следующие два условия:

- а) предложение  $A(n)$  истинно для  $n = 1$ ;
- б) из предположения, что  $A(n)$  истинно для  $n = k$  (где  $k$  — любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения  $n$ , т. е. для  $n = k + 1$ .

Этот принцип называется *принципом математической индукции*.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства: во-первых, проверяют истинность высказывания  $A(1)$ , и, во-вторых, предположив истинность высказывания  $A(k)$ , пытаются доказать, что истинно высказывание  $A(k + 1)$ . Если это удастся доказать (при любом натуральном  $k$ ), то предложение  $A(n)$  считается истинным для всех значений  $n$ .

#### 4. Рациональные числа.

а) Рациональное число  $a$  можно записать в виде

$$a = \frac{p}{q}, \quad \text{где } p \in \mathbf{Z}, \quad q \in \mathbf{N},$$

а сумма и произведение рациональных чисел  $a = \frac{p}{q}$  и  $b = \frac{p_1}{q_1}$  определяются равенствами

$$a + b = \frac{pq_1 + qp_1}{qq_1}, \quad ab = \frac{pp_1}{qq_1}.$$

б) Любое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби, используя алгоритм деления уголком.

Например,  $\frac{3}{8} = 0,375$ ;  $-\frac{27}{11} = -2,4545\dots = -2,(45)$ .

Обратно, зная бесконечную периодическую десятичную дробь, можно найти соответствующее этой дроби рациональное число, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

$$\text{Например, } 2,4(31) = 2,4 + \frac{31}{10^3} + \frac{31}{10^5} + \dots = 2,4 + \frac{31}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} =$$

$$= 2 \frac{427}{990} = \frac{2407}{990}. \text{ Этот же результат можно получить и другим способом. Пусть } x = 2,4(31), \text{ тогда } 10^3x = 2431,(31), 10x = 24,(31), \text{ откуда } 990x = 2431 - 24 = 2407, x = \frac{2407}{990}.$$

### Примеры с решениями

**Пример 1.** Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме Пифагора.

*Решение.* Условие  $M$  теоремы Пифагора можно записать в виде следующего высказывания:

$$M \equiv \{\text{в треугольнике } ABC \text{ угол } C \text{ — прямой}\},$$

а заключение  $N$  этой теоремы формулируется так:

$$N \equiv \{c^2 = a^2 + b^2\},$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — стороны, лежащие против углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно.

Справедлива также теорема, обратная теореме Пифагора: если  $c^2 = a^2 + b^2$ , то угол  $C$  — прямой.

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться либо теоремой косинусов, либо третьим признаком равенства треугольников (по трем сторонам).

**Пример 2.** Выяснить, какое из утверждений  $A$  и  $B$  следует из другого, используя символы  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ :

- 1)  $A \equiv \{\text{четырёхугольник } Q \text{ — ромб}\},$   
 $B \equiv \{\text{диагонали четырёхугольника } Q \text{ взаимно перпендикулярны}\};$
- 2)  $A \equiv \{\text{произведение чисел } x \text{ и } y \text{ равно нулю}\},$   
 $B \equiv \{\text{хотя бы одно из чисел } x, y \text{ равно нулю}\}.$

*Решение.* 1) Здесь  $A \Rightarrow B$ , но из  $B$  не следует  $A$ .

2) В этом случае  $A \Rightarrow B$  и  $B \Rightarrow A$ , т.е.  $A \Leftrightarrow B$ .

**Пример 3.** Доказать, что число  $a = n^3 + 17n$  делится на 6 при любом натуральном числе  $n$ .

*Доказательство.* Эту задачу можно решить, применив метод математической индукции. Приведем другой способ решения. Заметим, что натуральное число делится на 6 тогда и только тогда, когда на 6 делится число  $a + 6k$ , где  $k$  — целое число. В частности, число  $a$  делится на 6, если число  $b = a - 18n = n^3 - n$  делится на 6. Но  $b = n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$  — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно делится на 3 и по крайней мере одно делится на 2. Поэтому число  $b$  делится на 6, откуда следует, что число  $a$  также делится на 6.

**Пример 4.** Найти последнюю цифру числа  $a = 432^{283}$ .

*Решение.* Последняя цифра у числа  $a$  такая же, как и у числа  $2^{283}$ . Выпишем последовательные степени двойки:

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64 \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что последние цифры этих чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа  $2^k$  такая же, как у числа  $2^p$ , где  $p$  — одно из чисел 1, 2, 3, 4, а разность  $k - p$  кратна четырем. Так как  $283 = 280 + 3$ , где 280 делится на 4, то последняя цифра числа  $2^{283}$  — восьмерка ( $2^3 = 8$ ).

*Замечание.* Если рассматривать последовательные натуральные степени числа 3 (или числа 7), то можно заметить, что последние цифры получаемых чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа  $3^{214}$  такая же, как у числа  $3^2$ , т.е. девятка, так как  $214 = 53 \cdot 4 + 2$ .

Аналогично, последняя цифра числа  $7^{365}$  — семерка, так как  $365 = 91 \cdot 4 + 1$ .

**Пример 5.** Доказать, что число  $a = (x + 7y + 3)^5(5x + 3y + 2)^4$  делится на 16 при любых целых  $x$  и  $y$ .

*Доказательство.* Если числа  $x$  и  $y$  — оба четные или оба нечетные, то  $5x + 3y + 2$  — четное число, и поэтому  $(5x + 3y + 2)^4$  делится на  $2^4 = 16$ . Если же одно из чисел  $x, y$  — четное, а другое — нечетное, то  $x + 7y + 3$  — четное число и поэтому  $(x + 7y + 3)^5$  делится на  $2^5$  и, значит, делится на 16.

**Пример 6.** Найти остаток от деления числа  $a$  на  $m$ , если:

- 1)  $a = 37^{51} \cdot 49^{15}$ ,  $m = 3$ ;
- 2)  $a = 2^{127} + 18^{21}$ ,  $m = 17$ .

*Решение.* 1) Заметим, что если натуральное число  $n$  не делится на 3, т.е.  $n = 3p \pm 1$ , где  $p \in \mathbb{N}$ , то  $n^2 = 3q + 1$ , где  $q \in \mathbb{N}$ . Поэтому остаток от деления на 3 числа  $n^2$  равен 1, если  $n$  не делится на 3. Числа 37 и 49 не делятся на 3 и, следовательно, остаток от деления на 3 каждого из чисел  $37^{50} = (37^2)^{25}$ ,  $49^{14}$  равен 1, а остаток от деления на 3 числа  $a$  совпадает с остатком от деления на три числа  $b = 37 \cdot 49 = (36 + 1)(48 + 1)$ , т.е. равен 1.

2) Так как  $2^4 = 16 = 17 - 1$ ,  $18 = 17 + 1$ , а  $127 = 4 \cdot 31 + 3$ , то остаток от деления на 17 числа  $a$  совпадает с остатком от деления на 17 числа  $b = 2^3 \cdot (-1)^{31} + 1^{21} = -8 + 1 = -7$ , т.е. равен 10, поскольку  $-7 = 17(-1) + 10$ .

*Ответ.* 1) 1; 2) 10.

**Пример 7.** Доказать, что натуральное число

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма

$$s = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n,$$

т.е. сумма цифр этого числа, взятых с чередующимися знаками.

*Доказательство.* Остаток от деления на 11 чисел  $10^{2k}$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , равен 1, так как  $10^{2k} = \underbrace{99 \dots 99}_{2k \text{ цифр}} + 1$ , а остаток от деления на 11

чисел  $10^{2k+1}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , равен  $-1$ , так как  $10 = 11 - 1$ ,  $10^{2k+1} = 10^{2k}(11 - 1)$ , а остаток от деления на 11 числа  $10^{2k}$  равен 1.

Итак, остаток от деления на 11 числа  $a$  равен  $s$ .

**Пример 8.** Доказать, что если число  $a \in \mathbb{N}$  не делится на 5, то число  $a^4 - 1$  делится на 5.

*Доказательство.* Пусть  $r$  — остаток от деления  $a$  на 5. Так как  $a$  не делится на 5, то  $a = 5k + r$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r$  — одно из чисел 1, 2, 3, 4. Из равенства  $a^4 = (5k + r)^4 = 5p + r^4$ , где  $p \in \mathbb{N}$ , следует, что

остаток от деления  $a^4$  на 5 равен остатку от деления  $r^4$  на 5. Так как  $1^4 = 1$ ,  $2^4 = 5 \cdot 3 + 1$ ,  $3^4 = 5 \cdot 16 + 1$ ,  $4^4 = 5 \cdot 31 + 1$ , то остаток от деления  $r^4$  на 5 при  $r = 1, 2, 3, 4$  равен 1. Поэтому остаток от деления  $a^4 - 1$  на 5 равен нулю, т.е. число  $a^4 - 1$  делится на 5, если  $a$  не делится на 5.

**Пример 9.** Методом математической индукции доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1)$$

*Доказательство.* При  $n = 1$  равенство (1) является верным ( $1 = 1$ ). Нужно доказать, что из предположения о том, что является верным равенство (1), следует справедливость равенства

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \quad (2)$$

полученного из (1) заменой  $n$  на  $n+1$ .

Прибавляя к обеим частям (1) слагаемое  $(n+1)^2$ , имеем

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \quad (3)$$

Преобразуя правую часть (3), получаем

$$\frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Таким образом, равенство (2) является верным, и поэтому формула (1) доказана для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

Дадим другое доказательство формулы (1), используя символ  $\sum_{k=1}^n a_k$ , которым обозначается сумма  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , т.е.

$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Воспользуемся тождеством

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1. \quad (4)$$

Полагая в (4)  $x = 1, 2, \dots, n$  и складывая получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n. \quad (5)$$

Левая часть (5) равна  $(n+1)^3 - 1$ , а  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ . Поэтому из (5) получаем

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2} n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

откуда следует равенство (1).

**Пример 10.** Доказать, что для любых  $a, b$  и при любом  $n \in \mathbb{N}$  справедлива формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (6)$$

где

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k. \quad (7)$$

Правую часть формулы (6) называют *разложением бинома*, числа  $C_n^k$  — *биномиальными коэффициентами*, слагаемое  $C_n^k a^{n-k} b^k$  —  $k$ -м членом разложения бинома.

*Доказательство.* Воспользуемся методом математической индукции. При  $n = 1$  формула (6) верна, так как ее правая часть равна левой:  $C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$ .

Предполагая справедливым равенство (6), докажем, что верна формула

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k. \quad (8)$$

Умножая обе части равенства (6) на  $(a+b)$ , получаем

$$(a+b)^{n+1} = A_n + B_n,$$

где

$$A_n = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^{n+1-k} b^k,$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Следовательно,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}. \quad (9)$$

Сравнивая правые части равенств (8) и (9), заключаем, что для доказательства формулы (8) достаточно показать, что

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \quad (10)$$

Используя (7), находим

$$C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-2))}{(k-1)!} = \frac{kn(n-1)\dots(n-(k-2))}{k!}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-(k-2))}{k!} (n-(k-1)+k) = \\ &= \frac{(n+1)((n+1)-1)\dots((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Равенство (10) доказано и поэтому справедливо равенство (8). Итак, формула (6) верна при любом  $n \in \mathbf{N}$ .

Отметим, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))(n-k)!}{k!(n-k)!},$$

т. е.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (11)$$

Поэтому формулу (6) можно записать в виде

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k, \quad \text{где } 0! = 1.$$

Из (11) следует, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad (12)$$

## Задачи

- Выяснить, какое из утверждений  $A$  и  $B$  следует из другого, используя символы  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ :
  - $A \equiv \{\text{каждое из чисел } a, b \text{ делится на } 5\}$ ,  $B \equiv \{\text{сумма } a + b \text{ делится на } 5\}$ ;
  - $A \equiv \{\text{последняя цифра числа } a \text{ четная}\}$ ,  $B \equiv \{\text{число } a \text{ делится на } 4\}$ ;
  - $A \equiv \{\text{треугольник } ABC \text{ — равнобедренный}\}$ ,  $B \equiv \{\text{две медианы треугольника } ABC \text{ равны между собой}\}$ ;
  - $A \equiv \{\text{из отрезков, длины которых равны } a, b, c, \text{ можно составить треугольник}\}$ ,  $B \equiv \{\text{положительные числа } a, b, c \text{ связаны неравенствами } a + b > c, b + c > a, c + a > b\}$ .
- Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a^2 + b^2$  делится на 3. Следует ли отсюда, что каждое из чисел  $a, b$  делится на 3?
- Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.
- Доказать, что при любом натуральном  $n$  сумма  $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 6.
- Доказать, что при любом натуральном  $n$  число  $a$  делится на  $m$ , если:
  - $a = 7^n + 3^{n+1}$ ,  $m = 4$ ;
  - $a = 21^n + 4^{n+2}$ ,  $m = 17$ ;
  - $a = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ ,  $m = 19$ ;
  - $a = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ ,  $m = 11$ .
- Доказать, что если натуральное число  $\overline{abc}$  делится на 37, то и число  $\overline{cab}$  делится на 37.
- Пусть  $x$  и  $y$  — такие натуральные числа, что число  $7x + 5y$  делится на 13. Доказать, что число  $41x + 46y$  также делится на 13.
- Найти последнюю цифру числа  $a$ , если:
  - $a = 2^{587}$ ;
  - $a = 3^{375}$ ;
  - $a = 7^{158}$ ;
  - $a = 26^{78} + 4^{50}$ ;
  - $a = 72^{129} + 43^{425}$ ;
  - $a = 43^{43} - 17^{17}$ .
- Доказать, что число  $10^{25} + 10^{17} - 164$  делится на 18.
- Найти остаток от деления числа  $a$  на  $m$ , если:
  - $a = 25^{26} + 29^{27}$ ,  $m = 3$ ;
  - $a = 2^{367} + 43$ ,  $m = 17$ .

11. Доказать, что  $n^5 - n$  делится на 5 при любом  $n \in \mathbf{N}$ .
12. Доказать, что произведение  $(5m + 3n + 9)^3(m + 7n + 2)^4$  делится на 8 при любых натуральных  $m$  и  $n$ .
13. Представить рациональное число  $a$  в виде бесконечной периодической десятичной дроби, если:
- 1)  $a = \frac{14}{99}$ ;    2)  $a = \frac{601}{495}$ .
14. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь  $a$  в виде  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  — натуральные числа, не имеющие общих делителей:
- 1)  $a = 2, (13)$ ;    2)  $a = 1, 3(18)$ .
15. Методом математической индукции доказать, что при всех  $n \in \mathbf{N}$  справедливо равенство:
- 1)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ ;
- 2)  $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ .

## Ответы

1. 1)  $A \Rightarrow B$ . 2)  $B \Rightarrow A$ ; 3)  $A \Leftrightarrow B$ ; 4)  $A \Leftrightarrow B$ .    2. Да.
8. 1) 6; 2) 7; 3) 9; 4) 2; 5) 5; 6) 0.    10. 1) 0; 2) 1.    13. 1) 0,(15); 2) 1,2(14).
14. 1)  $\frac{211}{99}$ ; 2)  $\frac{29}{22}$ .

## § 2. Действительные числа, степени и корни, логарифмы. Тождественные преобразования алгебраических выражений

### Справочные сведения

#### 1. Множество действительных чисел.

- а) *Иррациональное число* — бесконечная десятичная непериодическая дробь. Рациональные числа, представимые бесконечными периодическими десятичными дробями, и иррациональные числа образуют *множество действительных чисел*  $\mathbf{R}$ .
- б) Арифметические действия и правила сравнения для действительных чисел определяются так, что свойства этих действий, а также свойства равенств и неравенств оказываются такими же, как и для рациональных чисел. Правила сравнения и операции над действительными числами подробно изучаются в курсе высшей математики.

в) *Модулем* действительного числа  $a$  называется неотрицательное число (обозначается  $|a|$ ) такое, что

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

## 2. Возведение в целую степень.

а) Определение степени.

Если  $a$  — действительное число ( $a \in \mathbf{R}$ ),  $n$  — натуральное число ( $n \in \mathbf{N}$ ), то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad n \text{ раз}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0,$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0.$$

б) Свойства степени.

Если  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $m$  и  $n$  — целые числа ( $m \in \mathbf{Z}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ), то

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

$$(a^n)^m = a^{nm},$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

в) Степень суммы и разности.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

г) Разность и сумма степеней.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots + b^{2k}).$$

## 3. Разложение многочлена на множители.

а) Если  $x = a$  — корень многочлена  $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ , где  $c_n \neq 0$ , т.е.  $P_n(a) = 0$ , то  $P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x)$ , где  $Q_{n-1}(x)$  — многочлен степени  $n - 1$ .

б) Если  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

#### 4. Производные пропорции.

а) Если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то  $\frac{m_1a + m_2b}{n_1a + n_2b} = \frac{m_1c + m_2d}{n_1c + n_2d}$  при условии, что  $n_1a + n_2b \neq 0$ .

б) Если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m_1a + m_2c}{m_1b + m_2d}$  при условии, что  $m_1b + m_2d \neq 0$ .

в) Если  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ , то  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_na_n}{m_1b_1 + m_2b_2 + \dots + m_nb_n}$  при условии, что  $m_1b_1 + m_2b_2 + \dots + m_nb_n \neq 0$ .

#### 5. Действия с корнями (радикалами).

а) Арифметический корень  $n$ -й степени из числа  $a$  (обозначается  $\sqrt[n]{a}$ ,  $n \geq 2$ ) — неотрицательное число,  $n$ -я степень которого равна  $a$ , т.е. если  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbf{N}$  ( $n \geq 2$ ), то

$$\sqrt[n]{a} \geq 0, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Если  $n = 2$ , то арифметический корень из числа  $a$  обозначается  $\sqrt{a}$  и называется *арифметическим квадратным корнем*.

б) Свойства арифметического корня ( $n \in \mathbf{N}$ ,  $m \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ ).

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0;$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad a \geq 0;$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad a \geq 0.$$

в) Для любого  $a \in \mathbf{R}$  справедливо равенство

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$$

и, в частности,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

г) Если  $a < 0$ , то

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

д) Формула «сложного радикала». Если  $a \geq 0$ ,  $a^2 - b \geq 0$ , то

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

## 6. Степень с рациональным и действительным показателем.

а) Степень с рациональным показателем определяется равенством

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где } a > 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

б) Свойства степени с рациональным показателем ( $p, q$  — рациональные числа,  $a > 0, b > 0$ ).

$$a^p a^q = a^{p+q},$$

$$a^p : a^q = a^{p-q},$$

$$(a^p)^q = a^{pq},$$

$$(ab)^p = a^p b^p,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

в) Степень с действительным иррациональным показателем  $x$  и основанием  $a$ , где  $a > 0$ , определяется как действительное число (обозначается  $a^x$ ), являющееся пределом последовательности  $\{a^{r_n}\}$ , где  $\{r_n\}$  — последовательность рациональных чисел такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ . При этом для степени с любым действительным показателем справедливы те же свойства, которыми обладает степень с рациональным показателем. Это доказывается в курсе высшей математики.

## 7. Логарифмы.

а) *Логарифм числа  $b$ , где  $b > 0$ , по основанию  $a$ , где  $a > 0, a \neq 1$*  (обозначается  $\log_a b$ ), — показатель степени, в которую нужно возвести число  $a$ , чтобы получить число  $b$ , т.е.

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство называют *основным логарифмическим тождеством*.

Логарифм числа  $a$  по основанию 10 называют *десятичным* и обозначают  $\lg a$ , а логарифм числа  $a$  по основанию  $e$  называют *натуральным* и обозначают  $\ln a$ .

б) Свойства логарифмов.

Если  $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, r \in \mathbf{R}$ , то

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^r = r \log_a b.$$

В частности,

$$\log_a a^r = r.$$

в) Формула перехода к новому основанию.

Если  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $c > 0$ ,  $c \neq 1$ , то

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Эта формула называется *формулой перехода* от логарифма по основанию  $a$  к логарифму по основанию  $c$ . Частные случаи формулы перехода:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad b \neq 1;$$

$$\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad \alpha \neq 0.$$

## Примеры с решениями

**Пример 1.** Упростить выражение

$$A = \left( \frac{a^6 + b^6}{a^4 - b^4} + \frac{a^2 b^4 - a^4 b^2}{a^4 + b^4 - 2a^2 b^2} \right) : (a - b) - b.$$

*Решение.* Используя формулы для суммы кубов, разности квадратов и квадрата разности, получаем  $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2 b^2 + b^4)$ ,  $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ .

Сократив числитель и знаменатель первой дроби на  $a^2 + b^2$ , а второй дроби — на  $a^2 - b^2$ , находим

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{a^4 - a^2 b^2 + b^4}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \right) : (a - b) - b = \\ &= \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2)(a - b)} - b = (a + b) - b = a. \end{aligned}$$

*Ответ.*  $a$ .

**Пример 2.** Упростить выражение

$$A = \frac{8}{1 + a^8} + \frac{4}{1 + a^4} + \frac{2}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 - a}$$

и найти его значение при  $a = 2^{-\frac{1}{16}}$ .

*Решение.* Сумма двух последних дробей равна  $\frac{2}{1 - a^2}$ , а сумма трех последних дробей равна  $\frac{4}{1 - a^4}$ . Следовательно,

$$A = \frac{8}{1 + a^8} + \frac{8}{1 - a^8} = \frac{16}{1 - a^{16}}. \quad \text{Если } a = 2^{-\frac{1}{16}}, \text{ то } A = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32.$$

*Ответ.*  $\frac{16}{1 - a^{16}}; 32$ .

**Пример 3.** Вычислить сумму

$$S = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 101}.$$

*Решение.* В этой задаче речь идет не о приближенном значении суммы, которое можно получить с помощью таблиц или других вычислительных средств, а о точном значении суммы, т.е. о записи  $S$  в виде отношения двух натуральных чисел.

Ключевой момент решения задачи — представление дроби  $\frac{1}{(2K+1)(2K+3)}$  в виде разности двух дробей, т.е. использование равенства

$$\frac{1}{(2K+1)(2K+3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2K+1} - \frac{1}{2K+3} \right).$$

Применяя это равенство, получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right). \end{aligned}$$

Все слагаемые полученной суммы, за исключением первого и последнего, попарно взаимно уничтожаются и поэтому

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{101} \right) = \frac{98}{2 \cdot 3 \cdot 101} = \frac{49}{303}.$$

*Ответ.*  $S = \frac{49}{303}$ .

*Замечание.* Метод, использованный в этой задаче, можно применить для вычисления суммы

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}},$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  — последовательные отличные от нуля члены арифметической прогрессии.

**Пример 4.** Доказать, что равенство

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc, \tag{1}$$

где  $a, b, c$  — положительные числа, является верным тогда и только тогда, когда

$$a = b = c. \tag{2}$$

*Решение.* Воспользуемся равенством

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc. \tag{3}$$

Это равенство справедливо для любых чисел  $a, b, c$ , в чем нетрудно убедиться, произведя действия в левой части (3).

Если  $a, b, c$  — положительные числа, то из (1) и (3) следует, что должно выполняться равенство

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0, \quad (4)$$

которое можно записать в виде

$$\frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] = 0. \quad (5)$$

Но равенство (5) для действительных чисел  $a, b$  и  $c$  выполняется (является верным) только в том случае, когда выполняются условия (2).

*Замечание.* Из (3)–(5) следует, что для любых чисел  $a, b, c$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \\ &= \frac{1}{2} (a+b+c) [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Если  $a, b, c$  — неотрицательные числа, то правая часть (6) — неотрицательное число, и поэтому

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc. \quad (7)$$

Полагая в (7)  $a^3 = x, b^3 = y, c^3 = z$ , получаем неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{xyz},$$

связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое неотрицательных чисел  $x, y, z$ .

**Пример 5.** Доказать, что если три действительных числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}, \quad (1)$$

то по крайней мере два из этих чисел равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т.е. выполняется хотя бы одно из условий

$$a = -b, \quad b = -c, \quad c = -a. \quad (2)$$

*Решение.* Умножив обе части равенства (1) на  $abc(a+b+c)$ , приведем его к виду

$$(ab+bc+ac)(a+b+c) - abc = 0. \quad (3)$$

Раскрыв скобки в левой части (3), получим

$$a^2b + 2abc + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 = 0. \quad (4)$$

Разложим левую часть  $S$  равенства (4) на множители:

$$\begin{aligned} S &= a^2(b+c) + ab(b+c) + ac(b+c) + bc(b+c) = \\ &= (b+c)(a^2 + ab + ac + bc) = (b+c)(a+b)(a+c). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

и поэтому выполняется хотя бы одно из условий (2).

*Замечание.* Полученный результат позволяет сформулировать следующее утверждение: если действительные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  связаны условием (1), то при любом натуральном  $k$  справедливо равенство

$$\frac{1}{a^{2k+1}} + \frac{1}{b^{2k+1}} + \frac{1}{c^{2k+1}} = \frac{1}{a^{2k+1} + b^{2k+1} + c^{2k+1}}.$$

**Пример 6.** Сократить дробь

$$A = \frac{a^3 - 3a - 2}{a^3 + a^2 - 4a - 4}.$$

*Решение.* Так как числитель  $P(a)$  и знаменатель  $Q(a)$  дроби  $A$  обращаются в нуль при  $a = -1$ , то многочлены  $P(a)$  и  $Q(a)$  делятся на  $a + 1$ . Разложим эти многочлены на множители. Получим  $P(a) = a^3 - a - 2(a + 1) = a(a - 1)(a + 1) - 2(a + 1) = (a + 1)(a^2 - a - 2) = (a + 1)(a - 2)(a + 1)$ ,  $Q(a) = a^2(a + 1) - 4(a + 1) = (a + 1)(a - 2)(a + 2)$ . Следовательно,  $A = \frac{a + 1}{a + 2}$ .

*Ответ.*  $A = \frac{a + 1}{a + 2}$ .

**Пример 7.** Упростить выражение

$$A = \sqrt{a + 2 - 2\sqrt{a + 1}} + \sqrt{a + 5 + 4\sqrt{a + 1}}.$$

*Решение.* Выражение имеет смысл при  $a \geq -1$ . Заметив, что  $a + 2 - 2\sqrt{a + 1} = a + 1 - 2\sqrt{a + 1} + 1 = (\sqrt{a + 1} - 1)^2$ ,  $a + 5 + 4\sqrt{a + 1} = (\sqrt{a + 1} + 2)^2$ , и применив формулу  $\sqrt{b^2} = |b|$ , получим

$$A = |\sqrt{a + 1} - 1| + \sqrt{a + 1} + 2.$$

Если  $\sqrt{a + 1} \geq 1$ , то  $a \geq 0$  и тогда  $A = 2\sqrt{a + 1} + 1$ . Если  $0 \leq a + 1 < 1$ , т. е.  $-1 \leq a < 0$ , то  $A = 1 - \sqrt{a + 1} + \sqrt{a + 1} + 2 = 3$ .

*Ответ.*

$$A = \begin{cases} 2\sqrt{a + 1} + 1, & \text{если } a \geq 0, \\ 3, & \text{если } -1 \leq a < 0. \end{cases}$$

**Пример 8.** Упростить выражение

$$A = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

*Решение.* Умножив числители и знаменатели дробей на  $\sqrt{2}$ , запишем  $A$  в следующем виде:

$$A = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}.$$

Так как  $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ ,  $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ , то имеем

$$A = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} + \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, получаем

$$A = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1) + (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{2} = \sqrt{2}.$$

*Ответ.*  $\sqrt{2}$ .

*Замечание.* Тот же результат можно получить, применив формулу «сложного» радикала, в силу которой имеет место

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}.$$

**Пример 9.** Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}.$$

*Решение.* Обозначим  $\sqrt[3]{2} = a$ , тогда  $a^3 = 2$ ,  $A = \frac{1}{1 + a + 2a^2} = \frac{1}{a^2 + (1 + a + a^2)}$ . Умножая числитель и знаменатель полученной дроби на  $a - 1$  и применяя формулу разности кубов, запишем  $A$  в следующем виде:

$$A = \frac{a - 1}{a^2(a - 1) + a^3 - 1} = \frac{a - 1}{3 - a^2} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3 - \sqrt[3]{4}}.$$

Снова применяя формулу разности кубов, получаем

$$A = \frac{(\sqrt[3]{2} - 1)(9 + 3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16})}{23} = \frac{7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 3}{23}.$$

*Ответ.*  $\frac{7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 3}{23}$ .

**Пример 10.** Доказать, что

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

*Доказательство.* Пусть  $a = 20 + 14\sqrt{2}$ ,  $b = 20 - 14\sqrt{2}$ ,  $A = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ . Применяя формулу куба суммы и учитывая, что  $a + b = 40$ ,  $ab = 400 - 196 \cdot 2 = 8$ , получаем

$$A^3 = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = 40 + 6A.$$

Таким образом, левая часть  $A$  рассматриваемого равенства является корнем уравнения

$$x^3 - 6x - 40 = 0.$$

Это уравнение имеет корень  $x = 4$ , а его левую часть можно записать в виде  $(x - 4)(x^2 + 4x + 10)$ . Так как уравнение  $x^2 + 4x + 10 = 0$  не имеет действительных корней, а левая часть равенства  $A$  — действительное число, то  $A = 4$ .

**Пример 11.** Вычислить:

$$1) A = 5^{2 - \log_5 9}; \quad 2) B = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 8 - \log_{\frac{1}{3}} 12 + \log_{\frac{1}{3}} 54.$$

*Решение.* 1) Применяя свойства степени и основное логарифмическое тождество, получаем

$$A = 5^2 \cdot (5^{\log_5 9})^{-1} = \frac{25}{9}.$$

2) Используя свойства логарифмов, находим

$$B = \log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{8^{\frac{1}{3}} \cdot 54}{12} \right) = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{3} \right)^{-2} = -2.$$

*Ответ.* 1)  $\frac{25}{9}$ ; 2)  $-2$ .

**Пример 12.** Доказать, что:

$$1) a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad \text{если } a > 0, b > 0, c > 0, b \neq 1;$$

$$2) \frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b, \quad \text{если } a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, \\ ab \neq 1; c \neq 1.$$

*Доказательство.* 1) Пусть  $A$  и  $B$  — соответственно левая и правая части равенства. Тогда  $\log_b A = \log_b c \cdot \log_b a$ ,  $\log_b B = \log_b a \cdot \log_b c$ . Так как  $\log_b A = \log_b B$ , то  $A = B$ .

2) Используя формулу перехода, получаем

$$\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = \frac{\log_c ab}{\log_c a} = 1 + \frac{\log_c b}{\log_c a} = 1 + \log_a b.$$

Следовательно, левая часть равенства совпадает с правой.

**Пример 13.** Выразить  $\log_{600} 900$  через  $a$  и  $b$ , где  $a = \log_5 2$ ,  $b = \log_2 3$ .

*Решение.* Применяя формулу перехода и свойства логарифмов, получаем

$$\begin{aligned} \log_{600} 900 &= \frac{\log_2 900}{\log_2 600} = \frac{\log_2(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2)}{\log_2(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)} = \frac{2 + 2\log_2 3 + 2\log_2 5}{3 + \log_2 3 + 2\log_2 5} = \\ &= \frac{2 \left( 1 + b + \frac{1}{a} \right)}{3 + b + \frac{2}{a}} = \frac{2(1 + a + ab)}{2 + 3a + ab}. \end{aligned}$$

*Ответ.*  $\frac{2(1 + a + ab)}{2 + 3a + ab}$ .



### **ШАБУНИН Михаил Иванович**

Доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики МФТИ, автор свыше двухсот научных и учебно-методических работ, один из авторов учебников алгебры для 7–11 классов средней школы, учебников и сборников задач по математическому анализу и теории функций комплексного переменного для студентов вузов, автор многих пособий для абитуриентов.

Заслуженный работник высшей школы РФ, лауреат премии Правительства Российской Федерации в области образования за 2002 год, член Научно-методического Совета по математике Министерства образования и науки РФ, заслуженный профессор МФТИ.

В пособии представлены:

- Теория
- Примеры с решениями
- Задачи с ответами и указаниями
- Варианты вступительных экзаменов

ISBN 978-5-00101-199-6



9 785001 011996