

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

На русском языке имеется уже ряд оригинальных и переводных сборников, преследующих, в общем, ту же цель, что и настоящая книга: оживить школьную арифметику введением в нее интересных задач, занимательных упражнений, любопытных теоретических и практических сведений. Знакомым с этой литературой хорошо известно, что большинство подобных книг черпает материал из одного и того же ограниченного фонда, накопленного столетиями; отсюда — близкое сходство этих сочинений, разрабатывающих, с различной детальностью, почти одни и те же темы. Но традиционный инвентарь математических развлечений достаточно уже исчерпан в нашей литературе. Новые книги этого рода должны привлекать новые сюжеты.

«Занимательная арифметика» представляет в большей своей части попытку предложить ряд

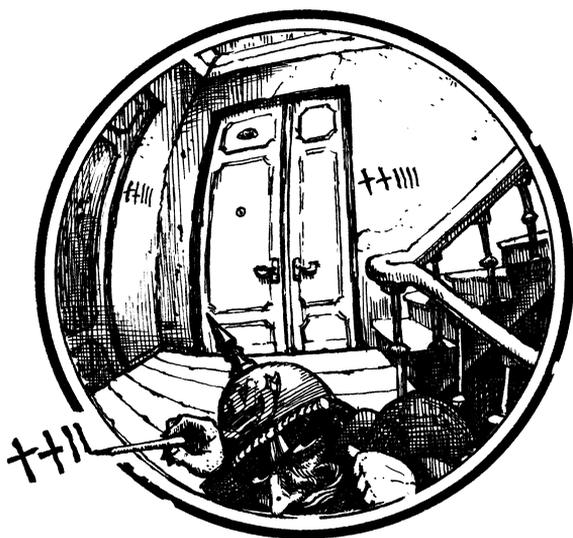
новых, ранее не разрабатывавшихся сюжетов арифметических развлечений. Подыскание новых тем в столь многосторонне обследованной области — дело нелегкое: составитель не может здесь пользоваться коллективным трудом длинного ряда известных и неизвестных собирателей, а предоставлен лишь собственным силам. Поэтому к «Занимательной арифметике», как к первому опыту обновления традиционного материала подобных сборников, не должна прилагаться слишком строгая мерка.

Заботясь о том, чтобы сборник читался легко, не требуя чрезмерного напряжения, составитель избегал запутанных вопросов и включал преимущественно такой материал, который вполне посилен для большинства читателей.

Хотя книга имеет в виду читателей, знакомых лишь с элементами арифметики, в ней найдутся страницы, небезынтересные, быть может, и для более сведущих.

Я. И. Перельман

Глава первая



СТАРОЕ И НОВОЕ О ЦИФРАХ И НУМЕРАЦИИ

1. ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

В марте 1917 г. жители Ленинграда (тогда Петрограда) были немало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися неизвестно как у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные значения. Те, которые мне пришлось видеть, имели форму черточек, чередующихся с крестами.

Пошли зловещие слухи о грабительских шайках, помечающих квартиры будущих жертв. Комиссар Временного правительства по г. Петрограду, успокаивая население, утверждал, что «таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами»; он приглашал жителей эти знаки стирать и уничтожать, «а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению».

Таинственные черточки и зловещие кресты появились также у дверей моей квартиры и квартир моих соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне, однако, разгадать нехитрый и совсем нестрашный секрет этой тайнописи. Своими соображениями я поделился с согражданами, поместив в газете следующую заметку.

ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

«В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, бесполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное значение. Я говорю о знаках такого типа:

+ | | + + | | | | + + + | | |

Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у всех входных дверей данного дома, причем в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание, естественно, внушает тревогу жильцам. Между тем смысл легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир №12, №25 и №33:

+ | | + + | | | | + + + | | |
12 25 33

Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки — единицы; так оказалось во всех без исключения случаях, которые мне приходилось наблюдать. Свообразная нумерация эта, очевидно, принадлежит дворникам-китайцам¹, не понимающим наших цифр. Появились эти знаки, конечно, давно, но только в дни Февральской революции обратили на себя внимание граждан»².

¹ Их было много тогда в Петрограде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для 10 имеет как раз указанную форму креста (китайцы не употребляют наших «арабских» цифр).

² Читателю наших дней покажется, вероятно, очень странным, что знаки эти оставались до дней Февральской революции незаме-

Таинственные знаки такого же очертания, но только не с прямыми, а с *косыми* крестами, обнаружены были и в таких домах, где дворниками служили пришедшие из деревень русские крестьяне. Здесь уже не трудно было выяснить истинных авторов «тайнописи», вовсе не подозревавших, что их безыскусственные обозначения номеров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

2. СТАРИННАЯ НАРОДНАЯ НУМЕРАЦИЯ

Откуда взяли петроградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты — десятки, палочки — единицы?

Конечно, не придумали этих знаков в городе, а привезли их из родных деревень. «Нумерация» эта давно уже в широком употреблении и понятна была каждому, даже неграмотному, крестьянину. Восходит она, без сомнения, к глубокой древности и употребительна не только у нас. Не говоря уже о родстве с китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с римской: и в римских цифрах палочки означают единицы, косые кресты — десятки.

Любопытно, что эта народная нумерация была некогда у нас даже узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были

ченными. Напомню, однако, что большинство живших в квартирах с двумя входами пользовались обычно парадной лестницей и впервые вышли на черную в дни революции, когда парадные двери были закрыты.

вестись сборщиками податей записи в податной тетради. «Сборщик, — читаем мы в старом «Своде законов», — принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам, или через писаря, записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и знаками. Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком □

рубель ○

десять копеек ×

копейку |

четверть —

Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

□□○○○○○○○○○○○○××××××| | | | | | | | ≡

В другом месте того же тома «Свода законов» находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысячи рублей — в виде шестиконечной звезды с крестом в ней и для ста рублей — в виде колеса с 8 спицами. Но обозначения для рубля и десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

Вот текст закона об этих так называемых «ясачных знаках»:

«Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами, было показываемо особыми знаками число внесенных рублей и копе-

ек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания¹. Употребляемые в квитанции знаки означают:

звезда — тысяча рублей,
колесо — сто рублей,
квадрат — десять рублей,
крест — один рубль,
десять перечеркнутых палочек — десять копеек,
одна палочка — копейку.

Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями. Например, 1232 руб. 24 коп. изображают так:

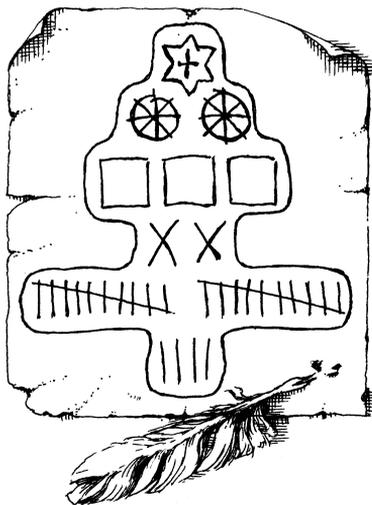


Рис. 1. Старинная запись на квитанции в уплате подати («ясака»). Эта запись означает сумму 1232 руб. 24 коп.

¹ Это показывает, что описанные знаки были в широком употреблении среди населения.

Как видите, употребляемые нами арабские и римские цифры — не единственный способ обозначения чисел. В старину применялись у нас, да еще и теперь кое-где по деревням применяются другие системы письменного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но и это еще не все способы изображения чисел, какие были в употреблении: многие купцы, например, имели свои секретные знаки для числовых обозначений — так называемые торговые «меты». О них побеседуем сейчас подробнее.

3. СЕКРЕТНЫЕ ТОРГОВЫЕ «МЕТЫ»

В дореволюционное время на вещах, купленных у офеней¹ или в частных магазинах, особенно провинциальных, можно было зачастую заметить непонятные буквенные обозначения вроде

а ве *в уо.*

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец обозначал на товаре, но так, однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникал в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называл покупателю цену с запросом.

¹ Офеня — бродячий торговец, продававший по деревням галантерею, книжки, лубочные картинки. — *Примеч. ред.*

Система обозначений была весьма проста. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах «трудолюбие» и «правосудие». Первая буква слова обозначала 1, вторая — 2, третья — 3 и т.д.; десятой буквою обозначался ноль. С помощью этих условных букв-цифр торговец обозначал на товарах их цену, храня в строгом секрете «ключ» к своей системе прибылей.



Рис. 2.

Если, например, выбрано было слово

п р а в о с у д и е,
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

то цена 4 руб. 75 коп. обозначалась так:

в уо.

Иногда цена на товаре писалась в виде дроби; например, на одной из купленных мною книг имеется обозначение

о е
т р о

Это значит, что при ключе «трудолюбие» надо запросить 1 руб. 25 коп., сама по себе же книга стоила 50 коп.

4. ШАШКИ ВМЕСТО ЦИФР

После только что сказанного легко сообразить, что числа можно изображать не только с помощью цифр, но и с помощью любых иных знаков или даже предметов: карандашей, перьев, линеек, резинок и т. п., — надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже, ради курьеза, с помощью таких цифр-предметов изображать действия над числами: складывать, вычитать, умножать, делить.

В одном зарубежном шахматном журнале была предложена задача: раскрыть истинный смысл следующего примера деления чисел, в котором почти все цифры заменены пешками (на нашем *рис. 3* — шашками). Из 28 цифр известны только две: одна (8) в частном и другая (1) в остатке.

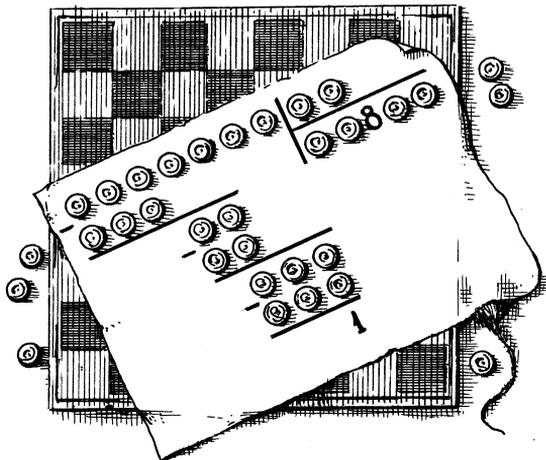


Рис. 3. Нелегко догадаться, какие цифры заменены здесь шашками.

Казалось бы, доискаться значения прочих 26 цифр, обозначенных кружками, немыслимо. Между тем это сравнительно несложная задача для каждого, кто отчетливо представляет себе смысл отдельных операций, входящих в состав действия деления.

Вот какой ход рассуждений приводит нас к цели.

Вторая цифра частного есть, конечно, 0. Это следует из того, что к остатку от первого вычитания снесена не одна цифра, а две. Ясно, что после снесения первой цифры составилось число, меньшее делителя, а в таких случаях очередная цифра частного есть 0.

По сходным основаниям заключаем, что четвертая цифра частного также 0.

Всматриваясь в расположение кружочков, замечаем, что двузначный делитель, будучи умножен на 8, дает число двузначное; когда же его умножают на первую (пока неизвестную) цифру частного, получается число из трех цифр. Значит, эта первая цифра частного больше 8; такой цифрой может быть только 9.

Сходным образом устанавливаем, что и последняя цифра частного есть 9.

Теперь частное определилось: 90 809. Остается раскрыть смысл делителя. Делитель состоит, мы знаем, из двух цифр; кроме того, расположение шашек говорит о том, что это двузначное число при умножении на 8 дает также двузначное число; при умножении же на 9 оно дает произведение, состоящее уже из трех цифр. Что же это за число?

Производим испытания, начиная с наименьшего двузначного числа, 10:

$$10 \times 8 = 80,$$

$$10 \times 9 = 90.$$

Число 10, как видим, не удовлетворяет требуемым условиям: оба произведения двузначные.

Испытываем следующее двузначное число, 11:

$$11 \times 8 = 88,$$

$$11 \times 9 = 99.$$

Число 11 также, очевидно, не годится: оба произведения снова двузначные.

Испытываем 12:

$$12 \times 8 = 96,$$

$$12 \times 9 = 108.$$

Число 12 удовлетворяет всем требованиям. Нет ли еще таких чисел?

Испытаем 13:

$$13 \times 8 = 104,$$

$$13 \times 9 = 117.$$

Оба произведения трехзначные; следовательно, 13 не годится. Ясно, что неподходящими являются и все числа, большие, чем 13.

Итак, единственный возможный делитель — число 12.

Зная делитель, частное и остаток, легко найдем делимое и восстанавливаем весь случай деления:

$$\text{Итак, делимое} = 90\,809 \times 12 + 1 = 1\,089\,709.$$

Окончательно имеем, следовательно, такой пример деления с остатком:

$$\begin{array}{r}
 \underline{1089709} \overline{)12} \\
 \underline{108} \\
 \underline{97} \\
 \underline{96} \\
 \underline{109} \\
 \underline{108} \\
 \underline{1}
 \end{array}$$

Как видим, по двум известным цифрам нам удалось установить смысл 26 неизвестных цифр.

5. АРИФМЕТИКА ЗА ЗАВТРАКОМ

Перед нами ряд действий над числами, обозначенными предметами сервировки стола (*рис. 4*). «Вилка», «ложка», «нож», «кувшинчик», «чайник», «тарелка» — все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т.п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шампольон¹. Но наша задача гораздо легче: вы ведь знаете, что числа здесь хотя и обозначены вил-

¹ Жан Франсуа Шампольон (1790—1832) — французский египтолог, первый расшифровавший древнеегипетские иероглифы, основатель египтологии — науки о языке, истории и культуре Древнего Египта и сопредельных стран. — *Примеч. ред.*