АЛГЕБРА

Числа, корни и степени

Целые и рациональные числа

Натуральными числами называют числа, используемые для счёта (1; 2; 3; ...).

Целыми числами называют натуральные числа, нуль (0) и целые отрицательные числа, то есть числа, противоположные натуральным (–1; –2; –3; ...).

Свойства действий над целыми числами

Свойства сложения

$$m + n = n + m;$$
$$(m + n) + l = m + (n + l);$$
$$n + 0 = n;$$
$$m + (-m) = 0.$$

Свойства вычитания

$$m - (n + l) = m - n - l;$$
$$(m + n) - l = (m - l) + n = m + (n - l);$$
$$m - (n - l) = (m - n) + l = (m + l) - n;$$
$$m - 0 = m;\ 0 - m = -m;$$
$$n - m = -(m - n).$$

Свойства умножения

$$mn = nm;$$
$$(mn)l = m(nl);$$
$$(m + n)l = ml + nl;$$
$$(m - n)l = ml - nl;$$
$$m \cdot 1 = m;$$
$$m \cdot 0 = 0;$$
$$m \cdot \frac{1}{m} = 1.$$

Свойства деления

$$(m \cdot n) : l = m \cdot (n : l) = (m : l) \cdot n;$$
$$(m + n) : l = m : l + n : l;$$
$$(m - n) : l = m : l - n : l;$$
$$m : (n \cdot l) = (m : n) : l = (m : l) : n;$$
$$m : (n : l) = (m : n) \cdot l = (m \cdot l) : n.$$

На нуль делить нельзя!

Множество натуральных чисел обозначается N, множество целых чисел — Z.

Натуральное число, не равное 1, называется **простым**, если оно делится без остатка только на себя и на 1.

Натуральное число, отличное от 1 и не являющееся простым, называется **составным**.

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители.

Наименьшим общим кратным натуральных чисел $n_1; n_2; \ldots; n_k$ (обозначение: НОК$\{n_1; n_2; \ldots; n_k\}$) называется наименьшее натуральное число, делящееся на все эти числа без остатка.

Наибольшим общим делителем (обозначение: НОД$\{n_1; n_2; \ldots; n_k\}$) называется наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка все указанные числа.

Числа m и n называются **взаимно простыми**, если НОД$\{m; n\} = 1$.

Рациональное число — это дробь вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Число m называется **числителем**, n — **знаменателем**.

Дробь $\frac{m}{n}$ называется **несократимой**, если числа m и n взаимно просты. В противном случае дробь можно сократить, разделив числитель и знаменатель на их НОД.

Дробь $\frac{m}{n}$ называется **правильной**, если $-n < m < n$. В противном случае дробь **неправильная**. Неправильную дробь можно записать, выделив целую часть. Для этого следует разделить m на n с остатком:

$$\frac{m}{n} = p + \frac{q}{n},$$

где p — **частное**, q — **остаток**, $0 \leqslant q < n$.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество R **действительных** чисел.

Иррациональное число представляет собой бесконечную десятичную непериодическую дробь.

Сокращение дробей

$$\frac{km}{kn} = \frac{m}{n}.$$

Сложение и вычитание дробей:

с одинаковыми знаменателями $\frac{k}{n} \pm \frac{l}{n} = \frac{k \pm l}{n}$,

с разными знаменателями $\frac{k}{m} \pm \frac{l}{n} = \frac{kp \pm ls}{r}$,

где r = НОК$\{m; n\}$; $p = \frac{r}{m}$; $s = \frac{r}{n}$.

В частности, если знаменатели взаимно просты, то

$$\frac{k}{m} \pm \frac{l}{n} = \frac{kn \pm lm}{mn}.$$

Умножение и деление дробей: $\frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$; $\quad \frac{k}{l} : \frac{m}{n} = \frac{kn}{lm}$.

Если среди дробей есть целое число r, то его представляют в виде $\frac{r}{1}$.

Все свойства действий над целыми числами сохраняются для рациональных чисел. Кроме того,

$$\frac{p}{-q} = \frac{-p}{q} = -\frac{p}{q}; \qquad \frac{-p}{-q} = \frac{p}{q}.$$

Проценты

Процентом от величины называется сотая часть этой величины:

$$1\,\% \cdot x = \frac{x}{100}.$$

Процент от величины: $p\,\% \cdot x = \frac{p \cdot x}{100}$.

Степени и корни

Число b называется ***n*-й степенью** числа a (где число n — натуральное), если оно получено умножением числа a на себя n раз:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Число a называется **основанием** степени, число n — **показателем** степени.

При чётном n $(-a)^n = a^n$, а при нечётном n $(-a)^n = -a^n$.

Если $a \neq 0$, то, по определению, $a^0 = 1$; 0^0 не определено; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ при $a \neq 0$; 0^{-n} не определено.

$$a^1 = a; \; a^0 = 1; \; a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \; a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Свойства степени

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \quad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \frac{b^p}{a^p}.$$