






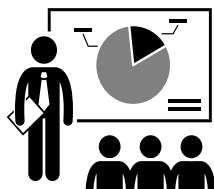




# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
 АЛГЕБРА .....	5
Числа, корни и степени.....	5
Основы тригонометрии .....	20
Логарифмы .....	30
Преобразование выражений .....	35
 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.....	57
Уравнения .....	57
Неравенства.....	91
 ФУНКЦИИ.....	117
Определение и график функции .....	117
Элементарное исследование функции.....	125
Основные элементарные функции .....	133
 НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА .....	147
Производная .....	147
Исследование функций .....	161
Первообразная и интеграл.....	177
 ГЕОМЕТРИЯ .....	187
Планиметрия.....	187
Прямые и плоскости в пространстве .....	204
Многогранники.....	216
Тела и поверхности вращения .....	230
Измерения геометрических фигур .....	239
Координаты и векторы.....	267
 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....	286
Элементы комбинаторики .....	286
Элементы статистики.....	291
Элементы теории вероятностей.....	294
 ЗАДАЧИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ .....	299

# ВВЕДЕНИЕ



Перед вами самый удобный справочник, который поможет школьнику систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы.

Пособие содержит основную и самую важную информацию из курсов арифметики, алгебры, геометрии, начал математического анализа, комбинаторики, теории вероятностей и статистики. Здесь изложены все изучаемые определения, правила, формулы, теоремы.

Материал книги представлен в виде таблиц, схем, рисунков, упорядочен и систематизирован, изложен доступным для усвоения языком. Это обеспечит максимальную сконцентрированность внимания, эффективное повторение и подготовку школьника по предмету.

Теоретический материал сопровождается блоком практических заданий. Приведённые примеры с развёрнутыми разъяснениями позволяют детально разобраться в темах школьного курса и отработать навыки выполнения различных заданий. В отдельном приложении даны примеры решения задач с экономическим содержанием.

Справочник предназначен учащимся средней школы для самоподготовки к различным видам контроля, сдаче ОГЭ и ЕГЭ, а также может использоваться учителями математики для работы на уроке.

Желаем успехов!

# АЛГЕБРА



## ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ

В данном разделе рассматриваются действия с десятичными и обыкновенными дробями, рациональными, иррациональными и действительными числами. Представлены свойства степеней с натуральным, целым, рациональным и действительным показателем.



### ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (-1; -2; -3; -4; -5...), и число нуль образуют множество **целых чисел**.

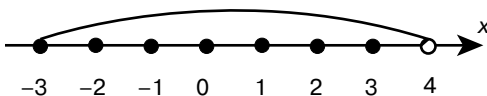
Множество натуральных (от лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение —  $N$ ; множество целых (нем. *Zahl* — число) чисел —  $Z$ .



#### Практические задания

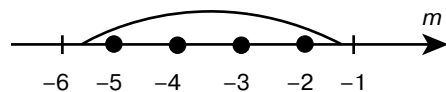
1 Найдите количество целых чисел, удовлетворяющих условию:

а)  $x \in [-3; 4)$ .



Ответ: 7.

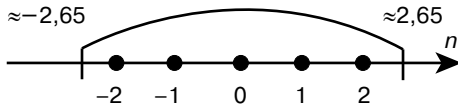
б)  $-5,6 < m \leq -1,3$ .



Ответ: 4.

2

Множество чисел задано формулой  $x_n = n^2 - 5$ , где  $n \in Z$ . Сколько чисел из данного множества не больше 2?



$$n^2 - 5 \leq 2, n^2 \leq 7, -\sqrt{7} \leq n \leq \sqrt{7}.$$

Ответ: 5.

## СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

**Степенью числа**  $a$  с натуральным показателем  $n$ , бóльшим 1, называется произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен  $a$ .

Например:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81;$$

$$0,2^6 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,000\ 064.$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

$a$  — основание степени  
 $n$  — показатель степени

Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

**Свойства степеней**

$$a^1 = a$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \text{ где } a \neq 0$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \text{ где } b \neq 0$$



**При чётном показателе степени**

$$a, b > 0$$

$$(-a)^n = b \quad -a^n = -b$$

$$(-3)^4 = 81 \quad -3^4 = -81$$

**Таблица степеней**

$a^n$	Значения $n$					
	1	2	3	4	5	6
$2^n$	2	4	8	16	32	64
$3^n$	3	9	27	81	243	729
$4^n$	4	16	64	256	1024	4096
$5^n$	5	25	125	625	3125	15 625
$6^n$	6	36	216	1296	7776	46 656
$7^n$	7	49	343	2401	16 807	
$8^n$	8	64	512	4096	32 768	
$9^n$	9	81	729	6561	59 049	

$a^n$	Значения $n$			
	7	8	9	10
$2^n$	128	256	512	1024
$3^n$	2187	6561	19 683	59 049



**Если в основании степени отрицательное число**

$a^n > 0$ , если  $n$  — чётное число (2; 4; 6...):

$$(-3)^4 = 81.$$

$a^n < 0$ , если  $n$  — нечётное число (1; 3; 5...):

$$(-2)^5 = -32.$$



### Практические задания

3 Вычислите.

$$а) \frac{8^2}{2^5} = \frac{(2^3)^2}{2^5} = \frac{2^{3 \cdot 2}}{2^5} = \frac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = 2^1 = 2;$$

$$б) \frac{6^{25} \cdot 9^{11}}{27^{15} \cdot 4^{12}} = \frac{(2 \cdot 3)^{25} \cdot (3^2)^{11}}{(3^3)^{15} \cdot (2^2)^{12}} = \frac{2^{25} \cdot 3^{25} \cdot 3^{22}}{3^{45} \cdot 2^{24}} = \frac{2^{25} \cdot (3^{25} \cdot 3^{22})}{2^{24} \cdot 3^{45}} = \frac{2^{25} \cdot 3^{47}}{2^{24} \cdot 3^{45}} =$$

$$= 2^{25-24} \cdot 3^{47-45} = 2^1 \cdot 3^2 = 18.$$

**Ответ:** а) 2; б) 18.

## ДРОБИ

Число вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z$ ,  $n \in N$ , называют **обыкновенной дробью**.

$\frac{m}{n}$  ← числитель  
 $n$  ← знаменатель

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.

Например:

$$\frac{3}{10} = 0,3; \quad \frac{3}{100} = 0,03;$$

$$2\frac{3}{1000} = 2,003; \quad \frac{-7}{100} = -0,07.$$

### Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от 0, то получится дробь, равная данной.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \text{ где } c \neq 0$$

Например:

$$\frac{0,35}{0,4} = \frac{0,35 \cdot 100}{0,4 \cdot 100} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8};$$

$$0,3 : 0,27 = \frac{0,3}{0,27} = \frac{0,3 \cdot 100}{0,27 \cdot 100} = \frac{30}{27} =$$

$$= \frac{30 : 3}{27 : 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

**Действия с обыкновенными дробями**

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$$\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7} \qquad \begin{array}{r} 17 \overline{) 7} \\ \underline{14} \phantom{0} \\ 3 \phantom{0} \end{array}$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$$\frac{17}{8} = 2,125; \qquad \begin{array}{r} 17 \overline{) 8} \\ \underline{16} \phantom{0} \\ 10 \phantom{0} \\ \underline{8} \phantom{0} \\ 20 \phantom{0} \\ \underline{16} \phantom{0} \\ 40 \phantom{0} \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0,12;$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0,375.$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$$3\frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 5}{9} = \frac{32}{9}.$$

Чтобы **сложить (вычесть) смешанные числа**, надо:

- 1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;
  - 2) отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных.
- Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.
  - Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:

- 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
- 2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
- 3) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:

- 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
- 2) делимое умножить на число, обратное делителю.



**Практические задания**

4 Вычислите.

а)  $2\frac{7^2}{9} + 3\frac{5^3}{6} = 2\frac{14}{18} + 3\frac{15}{18} = 5\frac{29}{18} = 6\frac{11}{18};$



$$\text{б) } 9\frac{7^2}{15} - 2\frac{5^5}{6} = 9\frac{14}{30} - 2\frac{25}{30} = 8\frac{44}{30} - 2\frac{25}{30} = 6\frac{19}{30};$$

$$\text{в) } 7 - 3\frac{2}{11} = 6\frac{11}{11} - 3\frac{2}{11} = 3\frac{9}{11}; \quad \text{г) } 3\frac{5}{6} - 2 = 1\frac{5}{6}.$$

**Ответ:** а)  $6\frac{11}{18}$ ; б)  $6\frac{19}{30}$ ; в)  $3\frac{9}{11}$ ; г)  $1\frac{5}{6}$ .

**5** Вычислите.

$$\text{а) } 2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{7 \cdot 30}{3 \cdot 7} = 10; \quad \text{б) } 15 \cdot 2\frac{3}{5} = 15 \cdot 2 + 15 \cdot \frac{3}{5} = 30 + \frac{15 \cdot 3}{5} = 30 + 9 = 39.$$

**Ответ:** а) 10; б) 39.

**6** Вычислите.

$$\text{а) } 2\frac{3}{5} : 1\frac{6}{7} = \frac{13}{5} : \frac{13}{7} = \frac{13}{5} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}; \quad \text{б) } \frac{3}{7} : 14 = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{14} = \frac{3}{98};$$

$$\text{в) } 2 : 1\frac{3}{5} = 2 : \frac{8}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1,25; \quad \text{г) } 2\frac{8}{9} : \frac{13}{27} = \frac{26}{9} : \frac{13}{27} = \frac{26}{9} \cdot \frac{27}{13} = \frac{26 \cdot 27}{9 \cdot 13} = 6.$$

**Ответ:** а)  $1\frac{2}{5}$ ; б)  $\frac{3}{98}$ ; в) 1,25; г) 6.

**7** Вычислите.

$$\text{а) } \frac{2\frac{1}{4}}{3\frac{3}{5}} = \frac{2\frac{1}{4} \cdot 20}{3\frac{3}{5} \cdot 20} = \frac{2 \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 20}{3 \cdot 20 + \frac{3}{5} \cdot 20} = \frac{40 + 5}{60 + 12} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8} = 0,625;$$

$$\text{б) } \frac{10}{1\frac{13}{15}} = \frac{10 \cdot 15}{1\frac{13}{15} \cdot 15} = \frac{150}{1 \cdot 15 + \frac{13}{15} \cdot 15} = \frac{150}{15 + 13} = \frac{150}{28} = \frac{150}{28} = \frac{75}{14} = 5\frac{5}{14}.$$

**Ответ:** а) 0,625; б)  $5\frac{5}{14}$ .

**■ Действия  
с десятичными дробями**

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо:

- 1) уравнивать в этих дробях количество знаков после запятой;
- 2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
- 3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
- 4) поставить в ответе запятую под запятой.

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:

- 1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;

2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:

- 1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;
- 2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:

- 1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
- 2) выполнить деление на натуральное число.



**Практические задания**

**8** Вычислите.

а)  $2,35 + 11,7 = 14,05$ ; 
$$\begin{array}{r} 11,70 \\ + 2,35 \\ \hline 14,05 \end{array}$$

б)  $12 - 10,346 = 1,654$ ; 
$$\begin{array}{r} 12,000 \\ - 10,346 \\ \hline 1,654 \end{array}$$

в)  $16,77 + 12,23 = 29,00 = 29$ . 
$$\begin{array}{r} 16,77 \\ + 12,23 \\ \hline 29,00 \end{array}$$

**Ответ:** а) 14,05; б) 1,654; в) 29.

**9** Вычислите.

$3,25 \cdot 2,8 = 9,100 = 9,1$ . 
$$\begin{array}{r} 3,25 \\ \times 2,8 \\ \hline 2600 \\ + 650 \\ \hline 9,100 \end{array}$$

**Ответ:** 9,1.

**10** Вычислите.

а)  $183,24 : 9 = 20,36$ ; 
$$\begin{array}{r} 183,24 \quad | \quad 9 \\ - 18 \phantom{00} \\ \hline 32 \\ - 27 \\ \hline 54 \\ - 54 \\ \hline 0 \end{array}$$

б)  $70,15 : 23 = 3,05;$

в)  $36 : 25 = 1,44.$

$$\begin{array}{r} \text{б) } 70,15 \quad | \quad 23 \\ \underline{-69} \phantom{00} \phantom{00} \\ 115 \phantom{00} \\ \underline{-115} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } 36 \quad | \quad 25 \\ \underline{-25} \phantom{00} \\ 110 \phantom{00} \\ \underline{-100} \phantom{00} \\ 100 \phantom{00} \\ \underline{-100} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

**Ответ:** а) 20,36; б) 3,05; в) 1,44.**11** Вычислите.

а)  $25,6 : 0,08 = 2560 : 8 = 320;$

б)  $12,35 : 2,5 = 123,5 : 25 = 4,94;$

в)  $36 : 0,125 = 36\,000 : 125 = 288;$

г)  $0,8 : 0,25 = \frac{0,8}{0,25} = \frac{0,8 \cdot 100}{0,25 \cdot 100} = 3\frac{1}{5} = 3,2.$

**Ответ:** а) 320; б) 4,94; в) 288; г) 3,2.

## ПРОЦЕНТЫ

**Процентом** (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

$1\% = \frac{1}{100}$

$100\% = 1$

$3\% = 0,03 \quad (3 : 100)$

$0,2 = 20\% \quad (0,2 \cdot 100)$



### Практические задания

**12**

Шуба во время распродажи стоит 77 000 рублей. Скидка составляет 30%. Какова была стоимость шубы до распродажи?

**Решение:**

77 000 руб.	$100\% - 30\% = 70\%$
$x$ руб.	100%

$$\frac{77\,000}{x} = \frac{70}{100}; \quad x = \frac{77\,000 \cdot 100}{70} = 110\,000 \text{ (руб.) — цена шубы до распродажи.}$$

**Ответ:** 110 000.

- 13** Магазин закупает чашки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких чашек можно купить в этом магазине на 900 рублей?

**Решение:**

120 руб.	100%
$x$ руб.	$100\% + 30\% = 130\%$

1)  $\frac{120}{x} = \frac{100}{130}$ ;  $x = \frac{120 \cdot 130}{100} = 156$  (руб.) — цена одной чашки с наценкой;

2)  $900 : 156 = 5, \dots \Rightarrow 5$  чашек можно купить.

**Ответ:** 5.

- 14** Первый сплав содержит 20% меди, второй — 10% меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 14% меди. Найдите массу первого сплава.

**Решение:**

Сплав	Масса сплава	Масса меди
1	$x$	$0,2x$
2	$200 - x$	$0,1(200 - x)$
полученный	200	$0,2x + 0,1(200 - x)$ $200 \cdot 0,14 = 28$

$20\% = 0,2$ ;  $10\% = 0,1$ ;

$14\% = 0,14$ ;

$0,2x + 0,1(200 - x) = 28$ ;

$0,2x + (20 - 0,1x) = 28$ ;

$0,1x = 8$ ;

$x = 80$  (кг) — масса первого сплава.

**Ответ:** 80.

15

Билет на поезд до Москвы стоил 2500 рублей, после подорожания стоимость билета составила 3000 рублей. На сколько процентов повысилась цена билета?

Решение:

2500 руб.	100%
3000 руб.	$x\%$

$$1) \frac{2500}{3000} = \frac{100}{x}; \quad x = \frac{3000 \cdot 100}{2500} = 120\%;$$

$$2) 120\% - 100\% = 20\% \text{ — повышение цены.}$$

**Ответ:** 20%.

## РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел**.

Множество рациональных (от лат. *ratio* — деление) чисел обозначается  $Q$ .

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z$ ,  $n \in N$ . Получается, что числитель ( $m$ ) может иметь знак, а знаменатель ( $n$ ) должен быть положительным числом. Например:

$$а) 5 = \frac{5}{1}; \quad б) 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

Любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби либо в виде периодической дроби.

Например:

$$а) 3 = 3,0;$$

$$б) \frac{3}{11} = 0,(27).$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 11} \\ \underline{0} \phantom{0} 2727 \dots \\ \phantom{0} 30 \\ \phantom{0} \underline{22} \\ \phantom{0} \phantom{2} 80 \\ \phantom{0} \phantom{2} \underline{77} \\ \phantom{0} \phantom{2} \phantom{7} 30 \\ \phantom{0} \phantom{2} \phantom{7} \underline{22} \\ \phantom{0} \phantom{2} \phantom{7} \phantom{2} 80 \\ \phantom{0} \phantom{2} \phantom{7} \phantom{2} \underline{77} \\ \phantom{0} \phantom{2} \phantom{7} \phantom{2} \phantom{7} 3 \end{array}$$

■ Действия  
с отрицательными  
и положительными числами

Чтобы **сложить два отрицательных числа**, надо:

1) сложить их модули;

2) поставить перед полученным числом знак «-».

$$-(-a) = a$$

Например:

$$-2 + (-7) = -(2 + 7) = -9.$$

Чтобы **сложить два числа с разными знаками**, надо:

- 1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
- 2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Например:

$$а) -5 + 15 = +(15 - 5) = 10;$$

$$б) -17 + 11 = -(17 - 11) = -6.$$

Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например:

$$а) -2 - (-5) = -2 + 5 = 3;$$

$$б) 8 - 9 = 8 + (-9) = -1.$$

Чтобы **перемножить (разделить) два числа с разными знаками**, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «-».

Например:

$$а) 10 \cdot (-3,5) = -35;$$

$$б) -0,25 \cdot 4 = -1;$$

$$в) -7 : 2 = -3,5.$$

Чтобы **перемножить (разделить) два отрицательных числа**, надо перемножить (разделить) их модули.

Например:

$$а) -7 \cdot (-10) = +70 = 70;$$

$$б) -42 : (-7) = +6 = 6.$$

## СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0, b \neq 0$$



### Практические задания

16 Вычислите.

$$а) 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25};$$

$$б) (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64};$$