Предисловие

В книге представлен опыт московской школы № 1199 ЮЗО по организации и проведению нетрадиционных математических конкурсов. Этот опыт дает хорошие результаты. Детей никто не призывает и не заставляет решать дополнительные задачи. Они сами с интересом участвуют в еженедельном конкурсе, в котором и свои победители, и свои награды (порой шутливые, например конфета из директорского фонда).

Конкурсы действительно необычны. Они проводятся с этакой внутренней легкостью, некоторой шутливостью, как-то естественно и самобытно, но вместе с тем деловито и серьезно.

1 сентября 2001 года на стенде Лиги Школ (школа № 1199 ЮЗО Москвы) появилось объявление:

Конкурс Задач Недели

1. В целях поддержания и развития в учащихся Лиги Школ любви и уважения к математике с 3 сентября 2001 года учреждается Конкурс Задач Недели.

2. Текст очередной Задачи Недели вывешивается каждый понедельник, в 8-00, на этом стенде.

3. Решение Задачи Недели подается учителю математики индивидуально в письменном виде не позднее пятницы на отдельном листе со всеми необходимыми пояснениями, рассуждениями и чертежами. Решение должно легко читаться и быть понятным.

4. Учитель может задать решившему любые вопросы по тексту решения.

5. Решившие Задачу Недели награждаются конфетой из Личного Фонда Директора, а их имена обнародуются на этом стенде (в порядке поступления решений) на следующей неделе.

6. Выигравшие годичный Конкурс Задач Недели награждаются в конце учебного года чем-нибудь хорошим.

С тех пор прошло пять лет. Каждый понедельник утром снимается со стенда текст предыдущей задачи и вывешивается новый. Вот один из таких плакатиков:

Задачу № 31 решил Саша Мухаметдинов

Он решал ее непосредственной проверкой делимости числа 1280000401 на простые числа и установил, что это число делится на 421. Честь ему и слава.

Возможно и другое решение. Вот оно:

$1280000401 = 20^7 + 20^2 + 1$. Многочлен $x^7 + x^2 + 1$ можно разложить на множители либо методом неопределенных коэффициентов, либо следующим преобразованием:

$$x^7 + x^2 + 1 = x^7 + x^6 + x^5 - x^6 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 + x^2 - x^3 + 1 =$$
$$= x^5(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + x^2(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1).$$

Это значит, что $20^7 + 20^2 + 1$ делится на $20^2 + 20 + 1$, то есть является составным числом.

Задача № 32 (20 – 24 мая 2002 г.)

Даны точки с координатами $A(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$, $D(2; 1)$, $E(3; 1)$, $F(3; 0)$, $G(2; 0)$, $H(1; 0)$. Чему равна сумма углов CAF, DAF и EAF?

В тот же день во время завтрака учитель математики (автор этих строк) еще раз объявит имена решивших задачу и вручит каждому из них от имени Фонда Директора конфету «Золотые колокола». А после уроков эта задача будет разобрана на заседании математического кружка.

В конце учебного года будут опубликованы итоги конкурса за год.

«Нечто хорошее» для победителя оказалось в 2002 году книжкой-самоделкой с текстами всех задач недели за год и их решениями, а также сведениями о том, кто и какую задачу решил.

В последующие годы победители получили в качестве премии книги по математике.

Всего в конкурсе из 70 учеников (примерно) школы приняли участие в 2001/2 учебном году 15 человек, в 2002/3 — 27 человек, в 2003/4 — 23 человека, в 2004/5 — 27 человек, в 2005/6 — 23 человека.

Думаю, что такой конкурс можно проводить не только в такой маленькой школе, как наша, но и в большой школе, в одной или нескольких параллелях (с 7 по 11 класс).
В этой книжке приведены все эти задачи. Некоторые из них придуманы мною, нашими выпускниками, учениками и учителями. Но подавляющее большинство задач — из математического фольклора, из «Кванта», «Математики в школе» и «Кенгуру», а также из многочисленных сборников задач. Моя роль сводилась к тому, чтобы отобрать задачи, читаемые со стенда, интересные и не очень трудные, разнообразные. К тому же я добивался, чтобы большинство задач было доступно детям от 7 до 11 класса.
Разумеется, использовать книжку можно по-разному, в том числе и как еще один сборник нестандартных задач для 7–11 классов: давать задачи на дом, нанести на карточки и предлагать сильным ученикам на уроках и мало ли еще как.
Замечу, что в некоторых задачах используется в качестве «произвольного натурального числа» номер школы 1199. Желательно изменять его на номер Вашей школы или на какие-нибудь другие важные числа: 988, 1812 и т.д.
Очень прошу всех, кто захочет поделиться со мной своими соображениями, позвонить по телефону (495)3145183 либо написать по E-mail: gglevitas@mtu-net.ru.

Автор

ЗАДАЧИ

1. В филателистическом обществе 9 человек. Из них 5 хотят на ближайших выборах избрать другого председателя. Однако действующему председателю удалось внушить членам общества, что самые демократические выборы — двухступенчатые. После этого он организовал выборы так, что остался у власти. Как он это сделал?

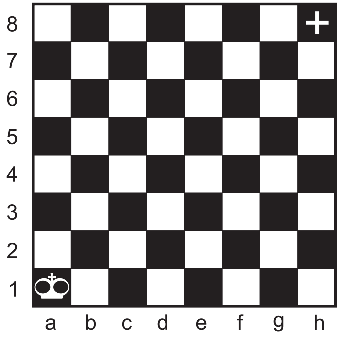

Рис. 1.

2. Двое по очереди передвигают по шахматной доске короля, каждый раз на одно поле: либо вверх, либо вправо, либо вправо-вверх по диагонали. Первоначальное положение короля — левое нижнее поле a1. Победителем будет тот, кто поставит короля на правое верхнее поле h8. Кто победит при правильной игре: ходящий первым или вторым? В чем состоит правильная игра (рис. 1)?

3. Найдите закономерности, которым подчиняются написанные числовые равенства. Напишите еще по одной строке в каждой рамке.

$$1 + 2 = 3$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$
……………………………………………

4. Вы умеете перечеркнуть 9 точек ломаной из четырех звеньев (рис. 2). А как перечеркнуть аналогично расположенные 16 точек шестизвенной ломаной (рис. 3)? Как перечеркнуть n^2 точек ломаной, состоящей из $2n - 2$ звеньев?

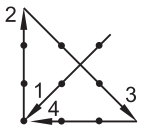

Рис. 2.

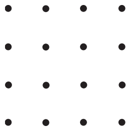

Рис. 3.

Рис. 4.

5. Какой высоты должно быть зеркало, чтобы в нем мог видеть себя во весь рост человек ростом 2 м (рис. 4)?

6. В первой бочке 50 л дегтя, а во второй 20 л меда. Из первой бочки во вторую перелили одну ложку дегтя и перемешали содержимое второй бочки. После этого из второй бочки в первую перелили одну (такую же!) ложку. Чего стало больше: меда в первой бочке или дегтя во второй? Ответ обоснуйте.

7. По обе стороны реки, на разных расстояниях от берегов и не на одном перпендикуляре к берегам, расположены деревни A и B. Как определить место постройки моста через реку, чтобы путь из A в B был кратчайшим (рис. 5)?

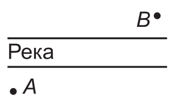

Рис. 5.

8. Докажите, что число $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$ делится на 10.

9. Семь сладкоежек разделили между собой 100 конфет так, что у всех оказалось разное число конфет. Докажите, что найдутся трое из них, у которых вместе не меньше 50 конфет.

10. Что больше: $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000}$ или $2^{(2^{(2^{(2^2)})})}$?

11. Решите уравнение:

$$(x^2 + x + 1)(x^{10} + x^9 + \ldots + x + 1) = (x^6 + x^5 + \ldots + x + 1)^2.$$

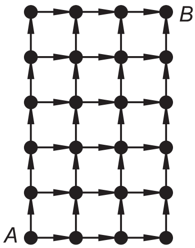

Рис. 6.

12. Сколько кратчайших путей ведут из A в B по этой сетке (рис. 6)?

13. Число $\frac{100!}{6^{100}}$ записали в виде несократимой дроби. Найдите ее знаменатель.

14. XXI век начался в понедельник. В какие еще дни может начинаться век в григорианском календаре?

15. Трое делят добычу. Как они могут это сделать, не имея никаких инструментов, чтобы никто не мог впоследствии жаловаться ни на везение, ни на обман?

16. В математическом кружке 13 человек. Имеются весы, с помощью которых за одно взвешивание можно узнать суммарную массу двух человек (не больше и не меньше). Придумайте способ выяснить за 8 взвешиваний суммарную массу всех кружковцев.

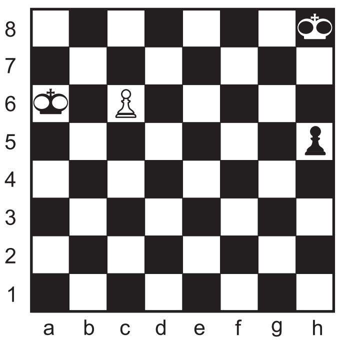

Рис. 7.

17. Решите знаменитый шахматный этюд венгерского гроссмейстера Рети: Б. Кр h8, п. c6. Ч. Кр a6, п. h5. Белые начинают и делают ничью (рис. 7).

18. Федя и Петя спускаются на эскалаторе. Посередине пути Федя срывает с Пети шапку и перебрасывает ее на эскалатор, двигающийся параллельно в другую сторону с той же скоростью. Петя сразу бросается бежать вниз, а затем по параллельному эскалатору вверх — за шапкой. Федя же сразу бросается бежать вверх, а затем по параллельному эскалатору вниз. Кто раньше добежит до шапки, если собственные скорости ребят одинаковы?

19. Найдите такие натуральные числа, которые уменьшаются в 57 раз при зачеркивании первой цифры.

20. Каждую из 8 точек, лежащих на одной прямой, соединили с каждой из 7 точек, лежащих на параллельной прямой. В скольких точках пересекаются полученные отрезки, если никакие две точки пересечения не совпадают?

21. Сколько треугольников на этом чертеже (рис. 8)?

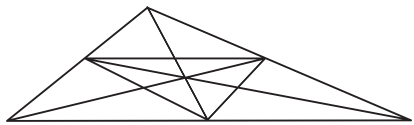

Рис. 8.

22. Идя по эскалатору по направлению его движения с некоторой собственной скоростью, пассажир насчитал на нем a ступенек. Идя против движения с той же собственной скоростью, он насчитал на нем b ступенек. Сколько ступенек на эскалаторе?

23. Пусть a, b и c — натуральные числа. Докажите, что число $a^3 + b^3 + c^3$ тогда и только тогда делится на 6, когда $a + b + c$ делится на 6.

24. Поставьте в клетках квадрата 5×5 такие числа, чтобы сумма всех двадцати пяти чисел была отрицательная, а сумма четырех чисел в каждом квадратике 2×2 была положительная.

25. Пункты A и B расположены на берегу реки. Из A в B и обратно движутся пешеход и лодка. Их собственные скорости одинаковы. Кто пройдет весь путь быстрее?

26. Члены Клуба киссеров при встрече целуются одним поцелуем (в губки) или двумя (в щечку или в носик). Однажды встретились 10 киссеров. Мальчики поцеловались друг с другом в носик, девочки — в губки. А мальчики с девочками поцеловались в щечку. Сколько было девочек, если всего поцелуев было 84?

27. Найдите все пары натуральных чисел, у которых НОД на 10 меньше, чем НОК.

28. Треугольник разделен на четыре многоугольника отрезками, проведенными из двух его вершин. Могут ли быть равновелики между собой три из этих многоугольников; все четыре многоугольника?

29. Надо купить 10 пирожных. В магазине имеются только эклеры, безе и корзиночки. Сколькими способами можно выбрать пирожные?

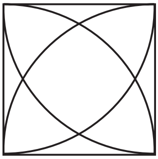

Рис. 9.

30. Построены четыре круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. Найдите площадь пересечения этих кругов, если сторона квадрата равна 1 (рис. 9).

31. Докажите, что число 1280000401 — составное.

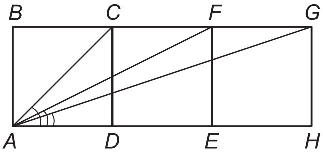

Рис. 10.

32. Прямоугольник на этом рисунке состоит из трех квадратов: *ABCD*, *DCFE* и *EFGH*. Чему равна сумма углов *CAH*, *FAH* и *GAH* (рис. 10)?

33. Какие из следующих двойных неравенств невозможны, если $a < b < c$? Приведите примеры, когда остальные неравенства выполняются.

а) $a^2 < b^2 < c^2$; б) $a^2 < c^2 < b^2$; в) $b^2 < a^2 < c^2$;
г) $b^2 < c^2 < a^2$; д) $c^2 < a^2 < b^2$; е) $c^2 < b^2 < a^2$.

34. Укажите 17 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа.

35. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n. Использовать метод математической индукции не разрешается.

36. В вагоне 80% пассажиров — русые и 70% — мужчины. Верно ли, что русые мужчины составляют большинство пассажиров вагона?

37. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что какая-то ладья бьет не более двух других.

38. Для поправки здоровья богатырю требуется выпить из молочной реки ровно 43 литра. У него есть два ведра в 24 и 11 литров и достаточно большая бочка. Сможет ли он поправить свое здоровье?

39. Число $\overline{xyxxyx}$ при некоторых x и y делится на $\overline{xxxx}$. Чему равно частное?

40. Представьте число 1 в виде суммы четырех долей (то есть дробей вида $\frac{1}{n}$) с попарно различными натуральными знаменателями.

41. Напишите восьмизначные числа по следующим условиям:

1) в каждом из них используются цифры 1, 2, 3 и 4, по два раза каждая;

2) между единицами стоит 1 цифра;

3) между двойками стоят 2 цифры;

4) между тройками стоят 3 цифры;

5) между четверками стоят 4 цифры.

42. Весь путь автобус ехал с неизменной скоростью. В первую часть пути автобус проехал столько километров, сколько минут ему осталось ехать. Во вторую часть пути автобус проехал столько километров, сколько минут ехал в первую часть пути. Какова скорость автобуса?

43. Можно ли из цифр 3, 4, 5, 9, 9 составить пятизначное число, являющееся точным квадратом (квадратом натурального числа)?

44. Докажите, что если все углы выпуклого шестиугольника кратны 60°, то все они равны между собой.

45. Все кости домино выложены в цепь по правилам игры. На одном конце цепи — шестерка. Сколько очков на другом конце (рис. 11)?

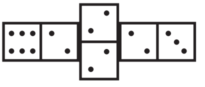

Рис. 11.

46. Точки A, B, C и D лежат на прямой, а точка M — вне этой прямой. Все точки попарно соединили отрезками. Могли ли получиться 6 равнобедренных треугольников?

47. Докажите, не пользуясь методом математической индукции, что число $n^5 - n$ оканчивается нулем при любом натуральном n.

48. Сколько ребер и сколько вершин у двадцатигранника, если в каждой его вершине сходятся по пять ребер и каждая грань — треугольник?

49. Сколько граней и сколько вершин у двенадцатиреберника, если в каждой его вершине сходятся по четыре ребра и каждая грань — треугольник?

50. Сколько граней и сколько вершин у двадцативершинника, если в каждой его вершине сходятся по три ребра и каждая грань — пятиугольник?

51. $\overline{УГУ}$ делится на 13. Делится ли на 13 $\overline{ГУГ}$?

52. Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь 7 ребер.

53. Обойдите ходом коня все 64 клетки шахматной доски, не побывав ни на одном поле дважды.

54. В меню столовой 10 блюд. 1 апреля директор столовой распорядился не повторять одинаковых заказов, то есть не выдавать никому в течение дня тот набор блюд, который уже был однажды заказан. Сколько людей он может обслужить в этот день?

55. Числитель дроби равен 1, а знаменатель — четырехзначное число, начинающееся цифрами 10. Какими цифрами может оканчиваться число, стоящее в знаменателе, если известно, что дробь можно обратить в конечную десятичную?

56. Придумайте такое семизначное число, у которого первая цифра равна числу нулей в этом числе, вторая — числу единиц, третья — числу двоек, …, седьмая — числу шестерок.

Хорошо бы выяснить, бывают ли аналогичные числа с другим числом знаков.

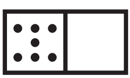

Рис. 12.

57. В обычном домино 28 косточек, а на каждом очке от 0 до 6 единиц. Сколько будет косточек в увеличенном домино, у которого на каждом очке от 0 до 7 единиц (рис. 12)?

58. Чему равна сумма всех пятизначных чисел, каждое из которых записывается неповторяющимися цифрами 1, 2, 3, 4 и 5?

59. В краже подозреваются четверо: А, Б, В и Г. На допросе они сказали:

А: Это сделал Б.

Б: Это сделал Г.

В: Это сделал не я.

Г: Б лжет, что это сделал я.

Правду сказал только один. Кто совершил кражу?

60. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B = 20°$, $\angle MAC = 60°$, $\angle NCA = 50°$. Найдите $\angle AMN$ (рис. 13).

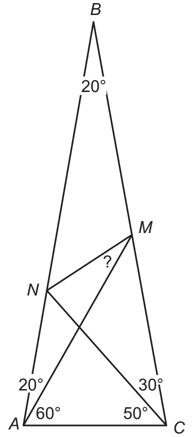

Рис. 13.

61. Найдите два наименьших последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 11.

62. Может ли число $\overline{abcabc}$ быть точным квадратом?

63. Среди философов Лапуты каждый седьмой — математик, а каждый девятый из математиков — философ. Кого больше на Лапуте — философов или математиков? Во сколько раз?

64. Федя уверяет, что задуманное им число есть точный квадрат и что у этого числа столько же делителей, оканчивающихся на 5, сколько и всех остальных делителей. Не ошибается ли он?

65. Решите задачу, десятилетиями предлагающуюся в США для проверки геометрических знаний школьников:

«Найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 дюймов и опущенной на него высотой в 6 дюймов».

66. За круглым столом 9 человек: рыцари (говорящие всегда правду) и лжецы (лгущие всегда). Каждый сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько всего лжецов за этим столом?

67. Имеются шесть кубиков: три весом 10 г (красный, синий и зеленый) и три весом 11 г (тех же цветов). Как в два взвешивания на чашечных весах без гирь отделить легкие кубики от тяжелых?

68. Как, нажав всего шесть раз на клавиши, узнать на калькуляторе, не имеющем клавиши «x^2», чему равно произведение $836 \cdot 837$? (Калькулятор включен и находится в начальном положении: на дисплее — 0. После шестого нажатия клавиши на дисплее должно читаться число 699 732.)

69. На сколько частей окажется разделенным этот прямоугольник, если провести еще и две его диагонали (рис. 14)?

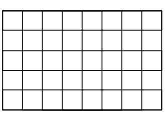
Рис. 14.

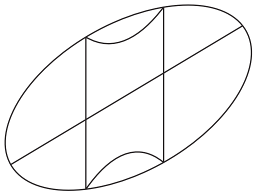

Рис. 15.

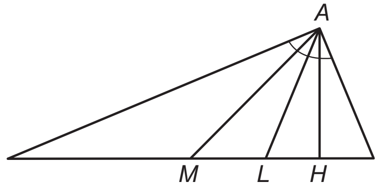

Рис. 16.

70. Сделайте такой рисунок, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя им по одному и тому же отрезку дважды (рис. 15).

71. Из вершины A треугольника провели биссектрису, медиану и высоту. Они разделили угол A на четыре равных угла. Чему равен угол A (рис. 16)?

72. Никакие две из 68 монет не имеют одинакового веса. Как в 100 взвешиваний найти самую легкую и самую тяжелую из них?

73. В углах каждого квадрата стоят числа 1, 2, 3 и 4. Квадраты сложены в стопку. Может ли каждая сумма по углам стопки равняться 1199?

74. Могут ли 2003 прямые на плоскости иметь (каждая) пересечение с 1199 из них?

75. В последовательности нечетных натуральных чисел каждое следующее число равно предыдущему, сложенному с самой большой цифрой предыдущего числа. Каким может быть наибольшее число членов такой последовательности?

76. Как разделить арбуз на 4 части так, чтобы после съедения арбуза осталось 5 корок?

77. Решите уравнение $x^2 - 1 = y$, где x и y — простые числа.

78. Решите уравнение $x^2 + 2 = y$, где x и y — простые числа.

79. Даны два отрезка: AB и CD, лежащие на параллельных прямых. Как построить их середины, имея в руках лишь линейку и карандаш? Отдельно рассмотрите случаи, когда $AB < CD$ и когда $AB = CD$.

80. Как с помощью такого рисунка (рис. 17) решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 = 2. \end{cases}$$

Решите эту систему найденным Вами способом.

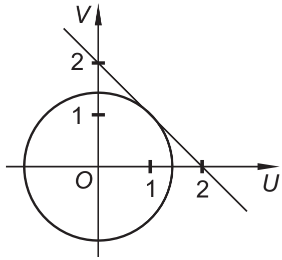

Рис. 17.

81. Среди 25 монет 3 фальшивые (более легкие). Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь отобрать из этих 25 монет 8 хороших монет?

82. Петя сказал: «Позавчера мне было еще только 10 лет, а в будущем году мне будет 13 лет». Возможно ли это?

83. Число записано 2398 цифрами, из которых первые 1199 — единицы, а следующие 1199 — двойки. Докажите, что это число равно произведению двух последовательных натуральных чисел.

84. Продается набор одинаковых кубиков, каждая грань которых одноцветная — либо белая, либо черная, и нет двух одинаково окрашенных кубиков. Один кубик стоит 10 рублей. Какой может быть наибольшая цена всего набора, если упаковка бесплатная?

85. Продается набор одинаковых кубиков, каждая грань которых одноцветная — либо белая, либо черная, либо красная, и нет двух одинаково окрашенных кубиков. Один кубик стоит 15 рублей. Какой может быть наибольшая цена всего набора, если упаковка стоит 5 рублей?

86. Найдите не менее двух троек натуральных чисел x, y и z, являющихся решениями уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

87. Разделите квадрат на 20 равных треугольников, не проводя разрезов, параллельных сторонам квадрата.

88. Уравнение $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$ имеет решение (3; 2). Имеет ли это уравнение другие решения в натуральных числах?

89. Существует ли выпуклый шестиугольник, все углы которого равны между собой, а стороны равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6 см?

90. Докажите, что $9^{8n+4} - 7^{8n+4}$ при любом натуральном n делится на 20.