ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана на основе многолетнего опыта преподавания теории функций комплексного переменного (ТФКП) в Московском физико-техническом институте (государственном университете). Она является учебником для студентов высших технических учебных заведений с углубленным курсом математики и может оказаться полезной для самостоятельного изучения курса ТФКП.

Основное внимание в книге уделяется методам ТФКП, которые находят широкое применение в прикладных задачах (разложение в ряды, вычисление интегралов с помощью вычетов, конформные отображения).

При изложении материала особое внимание уделено тому, чтобы помочь читателю успешно овладеть основами ТФКП. С этой целью в книге разобрано большое число примеров, которые дают возможность читателю не только глубоко усвоить теоретический материал, но и приобрести необходимые навыки в решении задач.

Первая глава содержит сведения о комплексных числах, кривых и областях на комплексной плоскости, непрерывных функциях комплексного переменного и об интегрировании этих функций.

Во второй главе введено одно из основных понятий ТФКП — понятие регулярной функции, изложены основные свойства регулярных функций, доказаны интегральная теорема и интегральная формула Коши, рассмотрены ряды Лорана и особые точки однозначного характера.

Третья глава посвящена многозначным аналитическим функциям. В ней подробно изучены аналитические свойства и приведены основные формулы для вычисления значений важнейших элементарных функций. Особое внимание уделено вопросу о выделении регулярных ветвей многозначных аналитических функций.

В четвертой главе изложена теория вычетов и ее приложения. Рассмотрено много важных типов интегралов от однозначных и неоднозначных аналитических функций.

В пятой главе рассматриваются свойства конформных отображений, подробно изучаются отображения, задаваемые элементарными функциями, дается решение задачи Дирихле с помощью конформных отображений.

Шестая глава содержит краткие сведения о преобразовании Лапласа и его применении к решению дифференциальных уравнений.

Во втором издании, как и в первом, в числе авторов указан Ю. В. Сидоров, с которым мы обсуждали структуру книги. К сожалению, Юрий Викторович не смог принять участие в работе над книгой в связи с продолжительной болезнью и кончиной в начале 2001 г. Меня связывало с ним многолетнее сотрудничество и совместная работа над многими учебниками и учебными пособиями, в том числе и над учебником по ТФКП (авторы Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин), на который имеется много ссылок в данном учебнике.

Во второе издание внесены существенные изменения: подробно изучено понятие аргумента, переработан материал, связанный с обратной функцией и теоремой единственности, заменены многие примеры (особенно из раздела «Особые точки»), переработана глава о многозначных функциях, много внимания уделено выделению регулярных ветвей.

Выражаю искреннюю благодарность своим коллегам по кафедре высшей математики МФТИ и, в первую очередь, профессору Е. С. Половинкину, за конструктивную критику первого издания книги и предложения по ее переработке.

М. И. Шабунин

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Комплексные числа

1. Определение комплексного числа

Комплексными числами называются пары (x, y) действительных чисел x и y, если для них определены понятие равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1. Два комплексных числа (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
2. *Суммой* двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
3. *Произведением* двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Для обозначения равенства, суммы, произведения и других операций над комплексными числами применяются те же знаки, что и для действительных чисел. Таким образом, по определению комплексного числа

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2), \quad \text{если} \quad x_1 = x_2 \quad \text{и} \quad y_1 = y_2; \tag{1}$$

сумма и произведение двух комплексных чисел соответственно равны

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{2}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{3}$$

Множество комплексных чисел, в котором введено равенство, а также операции сложения и умножения по формулам (1)–(3), обозначают $\mathbb{C}$. Напомним, что множество натуральных чисел обозначают $\mathbb{N}$, множество целых чисел — буквой $\mathbb{Z}$, а множество действительных чисел — буквой $\mathbb{R}$.

Из формул (2), (3) получаются, в частности, равенства

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами $(x,0)$ совпадают с операциями над действительными числами x. Поэтому комплексные числа $(x,0)$ отождествляются с действительными числами: $(x,0)=x$.

Комплексное число $(0,1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается буквой i, т. е. $i=(0,\ 1)$. По формуле (3) находим

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1,$$

а по формулам (2) и (3) получается равенство

$$(x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy.$$

Таким образом, каждое комплексное число можно записать в *алгебраической форме*: $(x,\ y) = x+iy$.

Комплексные числа $0+iy = iy$ называют *чисто мнимыми*. В частности, число $0+i\cdot 0 = 0$ является единственным числом, которое одновременно и действительное, и чисто мнимое.

С помощью алгебраической формы комплексного числа соотношения (1)–(3) записываются так:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \quad \text{если} \quad x_1 = x_2 \quad \text{и} \quad y_1 = y_2, \tag{4}$$

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{5}$$

$$(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{6}$$

Комплексное число $x+iy$ принято обозначать одной буквой z, т. е. $z=x+iy$. Число x называется *действительной частью*, а число y — *мнимой частью* комплексного числа $z = x+iy$. Для этих чисел приняты следующие обозначения*:

$$x = \mathrm{Re}(x+iy) = \mathrm{Re}z, \quad y = \mathrm{Im}(x+iy) = \mathrm{Im}z.$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, в записи $z=x+iy$ предполагается, что x и y — действительные числа.

2. Комплексно сопряженные числа

Комплексное число $x-iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z=x+iy$ и обозначается $\overline{z}$, т. е.

$$\overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy. \tag{7}$$

* Обозначения Re и Im являются сокращениями французских слов Reel (действительный) и Imaginaire (мнимый).

Из этого определения следует, что операция сопряжения перестановочна с арифметическими операциями над комплексными числами:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из (7) получается также, что для любого комплексного числа z справедливо равенство $\overline{(\overline{z})} = z$, а равенство $\overline{z} = z$ выполняется только тогда, когда z — действительное число.

Пример 1. Если $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен с действительными коэффициентами, то по свойствам операции сопряжения получаем:

$$\overline{P(z)} = a_0(\overline{z})^n + a_1(\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_n = P(\overline{z}).$$

Если $P(z_0) = 0$, то $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = 0$, т. е. если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и комплексно сопряженное число $\overline{z_0}$ также является корнем этого многочлена.

3. Модуль комплексного числа

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$, т. е.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{8}$$

Из этого определения следует, что $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0$ только тогда, когда $z = 0$. Модуль действительного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа. Из (8) получаются также следующие равенства:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|;$$

$$|z^n| = |z|^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$|\overline{z}| = |z|, \quad z\overline{z} = |z|^2. \tag{9}$$

4. Свойства арифметических операций над комплексными числами

Из формул (4)–(6) следует, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами.

1. **Коммутативность:**

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

2. **Ассоциативность:**

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3. **Дистрибутивность:**

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Поэтому операции сложения и умножения над комплексными числами $x + iy$ обладают формально такими же свойствами, как если бы число i было действительным. В частности, нет необходимости запоминать формулы (5) и (6), их можно получить по обычным правилам алгебры. Например, (6) получается из равенства

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2,$$

где $i^2 = -1$.

Числа нуль и единица в множестве комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и в множестве действительных чисел. А именно, для любого комплексного числа z имеют место равенства:

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z.$$

4. **Вычитание.** Операция сложения комплексных чисел обладает обратной операцией, которую, как обычно, называют *вычитанием*. Это означает, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 существует, и притом только одно, число z, удовлетворяющее уравнению

$$z + z_2 = z_1. \tag{10}$$

Это число называется *разностью* чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 - z_2$. В частности, разность $0 - z$ обозначается $-z$.

○ Из (4), (5) следует, что для любых комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ уравнение (10) имеет единственный корень $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$. Таким образом,

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad \bullet$$

5. **Деление.** Операция умножения комплексных чисел обладает обратной операцией, которую, как обычно, называют *делением*. Это

означает, что для любых двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ существует, и притом только одно, число z, удовлетворяющее уравнению

$$zz_2 = z_1. \tag{11}$$

Это число называется частным чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 : z_2$ или $\dfrac{z_1}{z_2}$.

○ Докажем, что уравнение (11) имеет единственный корень для любых комплексных чисел z_1 и z_2, если $z_2 \neq 0$. Умножая обе части уравнения (11) на число $\overline{z_2}$ и используя формулу (9), получаем $z|z_2|^2 = z_1\overline{z_2}$, откуда умножением на число $\dfrac{1}{|z_2|^2}$ находим $z = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$. Таким образом,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0. \tag{12}$$

●

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то формулу (12) можно записать так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Эту формулу можно не запоминать — достаточно помнить, что она получается умножением числителя и знаменателя на число, сопряженное со знаменателем.

5. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y), и эта точка обозначается той же буквой z (рис. 1).

Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости является взаимно однозначным. При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые — точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Отметим, что точки z и $-z$ симметричны относительно точки 0, а точки z и $\overline{z}$ симметричны относительно действительной оси: если $z = x + iy$, то $-z = (-x) + i(-y)$, а $\overline{z} = x + i(-y)$ (рис. 1).

Комплексное число z изображается также вектором с началом в точке 0 и концом в точке z (рис. 1). Такое соответствие между комплексными числами и векторами комплексной плоскости с началом в точке 0 также является взаимно однозначным. Поэтому вектор, изображающий комплексное число z, обозначается той же буквой z.

Из формулы (8) и рис. 1 видно, что *длина вектора z равна* $|z|$ и имеют место неравенства

$$|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|.$$

С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сложение и вычитание комплексных чисел. Из формулы (5) следует, что число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по обычному правилу сложения векторов z_1 и z_2 (рис. 2). Вектор $z_1 - z_2$ строится как сумма векторов z_1 и $-z_2$ (рис. 2).

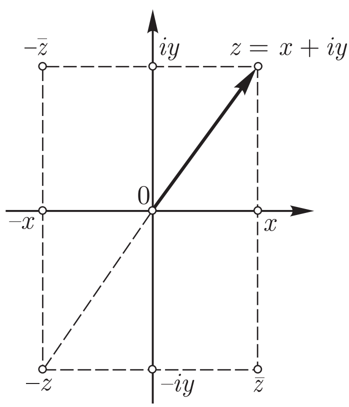

Рис. 1

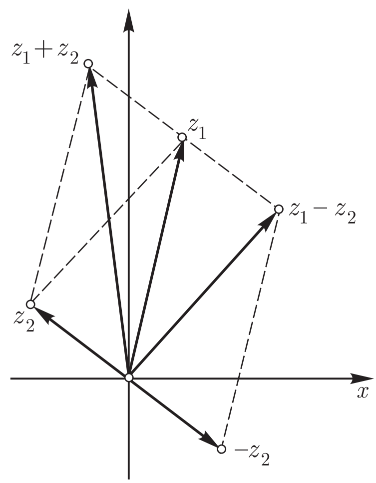

Рис. 2

Из рис. 2 видно, что *расстояние между точками* z_1 *и* z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е. *равно* $|z_1 - z_2|$.

Пример 2. Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_0| = R$ есть окружность радиуса R с центром в точке z_0, так как $|z - z_0|$ — расстояние между точками z и z_0.

Пример 3. Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| = |z - z_2|$ есть множество точек, равноудаленных от точек z_1 и z_2. Следовательно, это уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1, z_2, и проведенной через его середину.

Неравенства треугольника. *Для любых комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *выполняются неравенства*

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{13}$$

○ Длины сторон треугольника с вершинами в точках 0, z_1, $z_1 + z_2$ равны $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$ (рис. 2). Следовательно, неравенства (13) являются известными из элементарной геометрии неравенствами для длин сторон треугольника. ●

Следствие. *Для любых комплексных чисел* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

6. Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми координатами x, y, но и полярными координатами r, φ (рис. 3), где $r = |z|$ — расстояние от точки 0 до точки z, а φ — угол между действительной осью и вектором z, отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной. Этот угол называется *аргументом* комплексного числа z ($z \neq 0$) и обозначается так*: $\varphi = \arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, поэтому во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, предполагается, что $z \neq 0$.

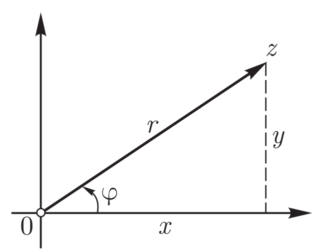

Рис. 3

Из рис. 3 видно, что

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{14}$$

Следовательно, любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi). \tag{15}$$

Запись комплексного числа в виде (15) называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

* Обозначение arg является сокращением французского слова argument (аргумент).

Из формул (14) получается, что если $z = x + iy$, $\varphi = \arg z$, то

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{16}$$

Таким образом, для нахождения аргумента комплексного числа $z = x + iy$ нужно решить систему уравнений (16).

Система (16) имеет бесконечно много решений, и все эти решения задаются формулой $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k = 0$, ± 1, ± 2, ..., где φ_0 — одно из решений системы (16). Таким образом, аргумент комплексного числа определяется неоднозначно: если φ_0 — одно из значений аргумента комплексного числа z, то все значения аргумента этого числа находятся по формуле

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{17}$$

Из системы (16) получается, что аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \tag{18}$$

Следует иметь в виду, что не все корни уравнения (18) являются решениями системы (16).

7. Показательная форма комплексного числа

Пусть $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$. Тогда по формуле (15) имеем $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Это комплексное число обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. функция $e^{i\varphi}$ для любого действительного числа φ определяется формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{19}$$

В частности $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{-\pi i/2} = -i$ (рис. 4). Отметим, что $|e^{i\varphi}| = 1$ для любого действительного числа φ. Из (19) заменой φ на $(-\varphi)$ получается равенство

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{20}$$

Сложением и вычитанием равенств (19) и (20) получаются *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\,(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}),$$

с помощью которых тригонометрические функции выражаются через показательную функцию.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции, как если бы число i было действительным. Отметим основные из

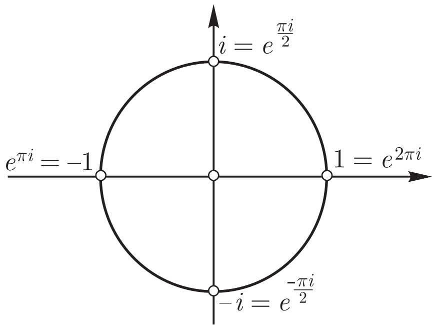

Рис. 4

них:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{21}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{22}$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Докажем, например, равенство (21):

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Аналогично проверяется равенство (22). Равенство (23) получается из (21) и (22) по индукции.

Из (23) и (19) получается *формула Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из формул (15) и (19) следует, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = re^{i\varphi}, \tag{24}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Запись комплексного числа в виде (24) называется *показательной формой* комплексного числа.

С помощью равенств (21) и (22) получаются формулы умножения и деления комплексных чисел, записанных в показательной форме:

$$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{25}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{26}$$

а из равенства (23) — формула возведения в целую степень:

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^ne^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Из формул (25)–(27) получаются, в частности, формулы (9), а также следующие свойства аргумента:

$$\text{если} \quad \varphi_1 = \arg z_1, \varphi_2 = \arg z_2, \text{то} \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1z_2); \tag{28}$$

$$\text{если} \quad \varphi_1 = \arg z_1, \varphi_2 = \arg z_2, \text{то} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \arg\frac{z_1}{z_2}\,; \tag{29}$$

$$\text{если} \quad \varphi_1 = \arg z, \text{то} \quad n\varphi = \arg(z^n), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots; \tag{30}$$

$$\text{если} \quad \varphi_1 = \arg z, \text{то} \quad -\varphi = \arg\overline{z}. \tag{31}$$

Сформулируем правило равенства комплексных чисел, записанных в тригонометрической или показательной форме: если $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, то равенство $z_1 = z_2$ имеет место только тогда, когда

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{и} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \tag{32}$$

где k — некоторое целое число.

8. Извлечение корня

Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \tag{33}$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, n — натуральное число. Пусть $a = \rho e^{i\theta}$, $z = re^{i\varphi}$. Тогда

$$r^ne^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}.$$

Из этого уравнения с помощью правила (32) находим $r^n = \rho$, $n\varphi = \theta + 2k\pi$, откуда $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi_k = (\theta + 2k\pi)/n$ и

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}e^{(\theta+2k\pi)i/n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Среди этих чисел ровно n различных, получаемых, например, при $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. На комплексной плоскости эти точки расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке 0 (рис. 5).

З а м е ч а н и е. Комплексное число z называется *корнем n-й степени из числа a* (обозначается $\sqrt[n]{a}$), если $z^n = a$. Выше показано, что при $a \neq 0$ имеется ровно n различных корней n-й степени из числа a.

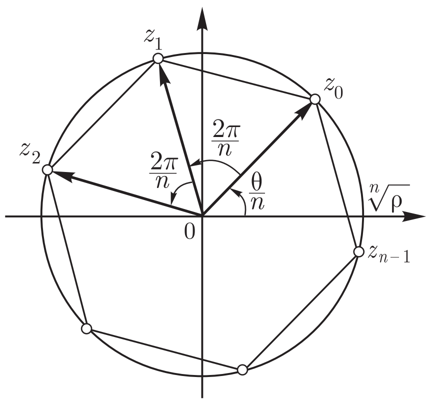

Рис. 5

§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел

1. Предел последовательности

Определение предела последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ формально такое же, как и определение предела последовательности действительных чисел.

Определение 1. *Комплексное число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство*

$$|z_n - z_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Другими словами, число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0. \tag{2}$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.*

Геометрический смысл неравенства (1) заключается в том, что точка z_n лежит в круге радиуса ε с центром в точке z_0 (рис. 6). Этот круг, т. е. множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z_n - z_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью точки z_0. Следовательно, точка z_0 является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки z_0 содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа.

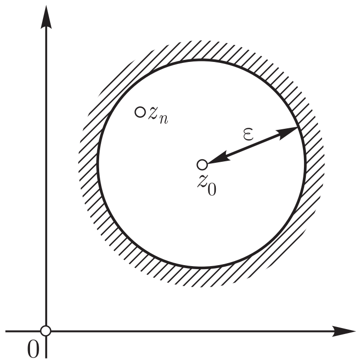

Рис. 6

Таким образом, определение предела последовательности $\{z_n\}$ является обычным определением предела последовательности точек плоскости, сформулированным в терминах комплексных чисел.

Пусть $z_n = x_n + iy_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В курсе математического анализа доказывается

Теорема 1. *Существование предела* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ *равносильно существованию двух пределов:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Из этой теоремы и свойств сходящихся последовательностей действительных чисел получаются следующие свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел:

если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta_0$, где $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
то $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \pm \zeta_n) = z_0 \pm \zeta_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \cdot \zeta_n) = z_0 \cdot \zeta_0$,
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{\zeta_n} = \dfrac{z_0}{\zeta_0}$, если $\zeta_n \neq 0$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Точно так же, как и в курсе математического анализа, доказывается

Критерий Коши. *Последовательность* $\{z_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* N, *что для всех* $n > N$ *и* $m > N$ *выполняется неравенство* $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число R, что $|z_n| < R$ для всех номеров n.

Из геометрической интерпретации предела последовательности получается, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Сформулируем свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел, связанные со свойствами последовательностей модулей и аргументов этих чисел.

1. Из определения предела последовательности $\{z_n\}$ и неравенства $\Big||z_n| - |z_0|\Big| \leqslant |z_n - z_0|$ получается следующее свойство:
   если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$.
2. Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, где $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Из формулы $z_n = r_n \cos\varphi_n + i r_n \sin\varphi_n$ и теоремы 1 получается следующее достаточное условие сходимости последовательности $\{z_n\}$:
   если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = r_0 e^{i\varphi_0}$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k, \tag{3}$$

составленный из комплексных чисел. Этот ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм $s_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. При этом предел s последовательности $\{s_n\}$ называют *суммой ряда* (3) и пишут $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Ряд (3) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|.$$

Если $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то по теореме 1 исследование свойств ряда (3) сводится к исследованию свойств рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

2. Расширенная комплексная плоскость

Понятие «бесконечность» вводится с помощью следующего определения.

Определение 2. *Последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}$ *называют сходящейся к бесконечности и пишут*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \tag{4}$$

если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty. \tag{5}$$

Это определение формально совпадает с соответствующим определением для действительных чисел, так как соотношение (5) означает, что для любого $R > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n| > R. \tag{6}$$

Геометрически неравенство (6) означает, что точка z_n лежит вне круга радиуса R с центром в точке O (рис. 7). Это множество называется *окрестностью бесконечности.* Следовательно, точка $z = \infty$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки $z = \infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа.

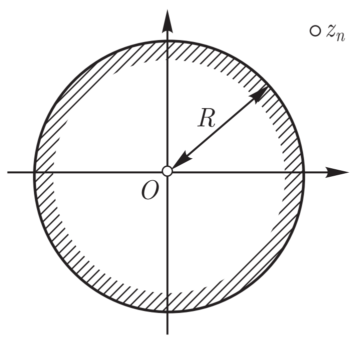

Рис. 7

Таким образом, «числу» $z = \infty$ ставится в соответствие символическая бесконечно удаленная точка. Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\mathbb{C}}$. Приведем геометрическую интерпретацию расширенной комплексной плоскости.

Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в точке O (рис. 8). Обозначим через P точку сферы S, диаметрально противоположную точке O. Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M, которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P (рис. 8). При этом последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек сферы S, сходящаяся к точке P. Поэтому точке $z = \infty$ поставим в соответствие точку P.

Такое соответствие между точками расширенной комплексной плоскости и точками сферы S является взаимно однозначным. Оно на-

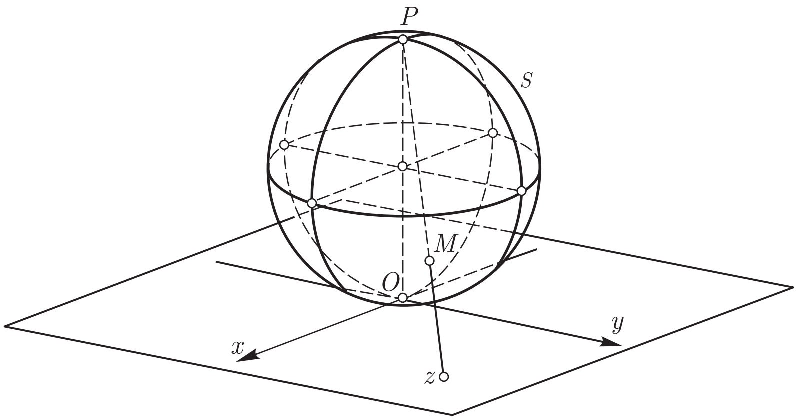

Рис. 8

зывается *стереографической проекцией*, а сфера S называется *сферой Римана.*

Комплексные числа (включая $z = \infty$) можно изображать точками сферы Римана. При этом сходящиеся последовательности комплексных чисел изображаются на сфере Римана сходящимися последовательностями точек.

При стереографической проекции окружности переходят в окружности, угол между пересекающимися кривыми на плоскости равен углу между образами этих кривых на сфере Римана.

Теорема 2. *Расширенная комплексная плоскость компактна, т. е. из любой последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся (может быть, к бесконечности) подпоследовательность.*

Эта теорема доказывается в курсе математического анализа.

§ 3. Кривые и области на комплексной плоскости

1. Непрерывные кривые

Пусть на конечном отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ заданы две непрерывные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Тогда на этом отрезке задана непрерывная комплекснозначная функция действительного переменного:

$$z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Учебник по теории функций комплексного переменного написан авторами на основе многолетнего опыта преподавания этого предмета в Московском физико-техническом институте.

Изложение теоретического материала подкреплено большим количеством примеров с решениями.

Содержание настоящего учебника тесно связано с книгой М. И. Шабунина, Е. С. Половинкина, М. И. Карлова «Сборник задач по теории функций комплексного переменного».

Для студентов инженерно-физических и физико-технических вузов, а также для студентов университетов.