

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Введение	5
§ 1. Комплексные числа	5
1. Определение комплексного числа	5
2. Комплексно сопряженные числа	6
3. Модуль комплексного числа	7
4. Свойства арифметических операций над комплексными числами	8
5. Геометрическая интерпретация комплексного числа ..	9
6. Тригонометрическая форма комплексного числа	11
7. Показательная форма комплексного числа	12
8. Извлечение корня	14
§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел	15
1. Предел последовательности	15
2. Расширенная комплексная плоскость	17
§ 3. Кривые и области на комплексной плоскости	19
1. Непрерывные кривые	19
2. Кусочно-гладкие кривые	22
3. Области	24
4. Непрерывная деформация кривой	28
§ 4. Непрерывные функции комплексного переменного	28
1. Предел функции	28
2. Непрерывность функции в точке и в области	29
3. Непрерывность функции на кривой	30
4. Непрерывность функции в области вплоть до границы	31
5. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции	33
§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного	37
1. Определение интеграла	37
2. Свойства интегралов	40
3. Оценки интегралов	40
§ 6. Функция $\text{Arg } z$	42
1. Полярные координаты	42
2. Приращение аргумента вдоль кривой	43
3. Непрерывные ветви функции $\text{Arg } z$	46

Глава 2. Регулярные функции	50
§ 7. Дифференцируемые функции. Условия Коши–Римана	50
1. Производная	50
2. Условия Коши–Римана	52
§ 8. Интегральная теорема Коши	55
1. Теорема Коши	55
2. Следствия и дополнения к интегральной теореме Коши	56
3. Первообразная	59
§ 9. Регулярные функции. Степенные ряды	62
§ 10. Интегральная формула Коши	66
§ 11. Свойства регулярных функций	69
1. Свойства функций, дифференцируемых в области ...	69
2. Примеры разложения регулярных функций в ряды Тейлора	70
3. Достаточные условия регулярности функции в области	71
4. Лемма об устранимой особенности (о стирании пунктира)	72
§ 12. Гармонические функции. Теоремы о среднем	74
§ 13. Обратная функция	79
1. Понятие обратной функции	79
2. Однолистные функции	81
3. Функция $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, и обратная к ней	81
4. Функция $w = e^z$ и обратная к ней	84
§ 14. Теорема единственности	85
1. Нули регулярной функции	85
2. Теорема единственности	88
§ 15. Ряд Лорана	91
1. Разложение регулярной функции в ряд Лорана	91
2. Единственность разложения функции в ряд Лорана ..	95
3. Примеры разложений рациональных функций в ряды Лорана	95
§ 16. Изолированные особые точки однозначного характера	98
1. Классификация изолированных особых точек	98
2. Устранимая особая точка	98
3. Полос	99
4. Существенно особая точка	102
5. Исследование особых точек с помощью рядов Лорана	104
6. Ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$	106
7. Теорема Лиувилля	109

Глава 3. Многозначные аналитические функции	111
§ 17. Понятие аналитической функции и ее регулярной ветви ...	111
1. Аналитическое продолжение вдоль цепочки областей .	111
2. Аналитическое продолжение вдоль кривой	114
3. Суперпозиция аналитических функций	116
4. Определение аналитической в области функции	116
5. Аналитические и регулярные ветви полных аналитических функций	117
§ 18. Логарифмическая функция	119
1. Определение логарифмической функции	119
2. Свойства логарифмической функции	120
3. Регулярные ветви функции $\operatorname{Ln} z$	128
4. Регулярные ветви функции $\operatorname{Ln} f(z)$	129
5. Арифметические операции над аналитическими функциями	136
§ 19. Степенная функция	139
1. Определение степенной функции	139
2. Свойства степенной функции	139
3. Регулярные ветви функции $\sqrt[n]{z}$	144
4. Регулярные ветви функции $\sqrt[n]{f(z)}$	145
5. Римановы поверхности функций $\operatorname{Ln} z$ и \sqrt{z}	149
§ 20. Особые точки аналитических функций. Граничные особые точки	151
1. Особые точки аналитических функций	151
2. Точки ветвления	151
3. Граничные особые точки регулярных функций	159
Глава 4. Теория вычетов и ее применения	162
§ 21. Теоремы о вычетах	162
1. Определение вычета	162
2. Вычисление вычета в полюсе $z_0 \neq \infty$ и в регулярной точке $z = \infty$	164
3. Формулы для вычисления интегралов с помощью вычетов	167
§ 22. Применение теории вычетов к вычислению интегралов	172
1. Вычисление интегралов $\int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$	172
2. Вычисление интегралов от регулярных ветвей аналитических функций	174
3. Вычисление интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	175
4. Вычисление интегралов $\int_0^{\infty} x^\alpha R(x) dx$	181

5.	Вычисление интегралов $\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta R(x) dx$	186
6.	Вычисление интегралов $\int_0^{+\infty} R(x) dx$	193
§ 23.	Принцип аргумента. Теорема Руше	194
1.	Принцип аргумента	194
2.	Теорема Руше	197
§ 24.	Мероморфные функции	199
1.	Разложение мероморфной функции на элементарные дроби	200
2.	Разложение целой функции на элементарные множители	203
Глава 5.	Конформные отображения	206
§ 25.	Геометрический смысл производной	206
1.	Линейное растяжение и угол поворота кривой в точке	206
2.	Геометрический смысл модуля и аргумента производной	207
§ 26.	Локальные свойства отображений регулярными функциями	209
1.	Теорема об n -значной обратной функции	209
§ 27.	Принцип сохранения области	211
§ 28.	Принцип максимума для регулярной и гармонической функций	211
§ 29.	Однолистные функции	213
§ 30.	Определение и общие свойства конформных отображений	216
§ 31.	Дробно-линейные отображения	221
1.	Конформность	221
2.	Групповое свойство	221
3.	Круговое свойство	222
4.	Свойство сохранения симметрии	224
5.	Дробно-линейное отображение, переводящее три точки в три точки	227
6.	Примеры дробно-линейных отображений	228
§ 32.	Конформные отображения элементарными функциями	231
1.	Функция $w = z^2$	231
2.	Функция $w = \sqrt{z}$	236
3.	Функция $w = z^\alpha$	238
4.	Функция e^z	240
5.	Функция $w = \operatorname{Ln} z$	242
6.	Функция Жуковского	243
7.	Функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обратная к функции Жуковского	253
8.	Тригонометрические и гиперболические функции	256
9.	Разные примеры	258

§ 33. Принцип симметрии	265
1. Симметрия относительно действительной оси	265
2. Применения принципа симметрии	267
3. Симметрия относительно окружности	271
§ 34. Отображения многоугольников	273
§ 35. Задача Дирихле	277
1. Постановка задачи Дирихле. Существование и единственность решения	277
2. Инвариантность уравнения Лапласа относительно конформных отображений	278
3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге	280
4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости	282
5. Функция Грина задачи Дирихле	283
Глава 6. Операционное исчисление	286
§ 36. Преобразование Лапласа	286
1. Оригинал и его изображение	286
2. Свойства преобразования Лапласа	287
§ 37. Восстановление оригинала по его изображению	291
1. Формула обращения преобразования Лапласа	291
2. Теорема разложения	292
§ 38. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений	292
Литература	295

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана на основе многолетнего опыта преподавания теории функций комплексного переменного (ТФКП) в Московском физико-техническом институте (государственном университете). Она является учебником для студентов высших технических учебных заведений с углубленным курсом математики и может оказаться полезной для самостоятельного изучения курса ТФКП.

Основное внимание в книге уделяется методам ТФКП, которые находят широкое применение в прикладных задачах (разложение в ряды, вычисление интегралов с помощью вычетов, конформные отображения).

При изложении материала особое внимание уделено тому, чтобы помочь читателю успешно овладеть основами ТФКП. С этой целью в книге разобрано большое число примеров, которые дают возможность читателю не только глубоко усвоить теоретический материал, но и приобрести необходимые навыки в решении задач.

Первая глава содержит сведения о комплексных числах, кривых и областях на комплексной плоскости, непрерывных функциях комплексного переменного и об интегрировании этих функций.

Во второй главе введено одно из основных понятий ТФКП — понятие регулярной функции, изложены основные свойства регулярных функций, доказаны интегральная теорема и интегральная формула Коши, рассмотрены ряды Лорана и особые точки однозначного характера.

Третья глава посвящена многозначным аналитическим функциям. В ней подробно изучены аналитические свойства и приведены основные формулы для вычисления значений важнейших элементарных функций. Особое внимание уделено вопросу о выделении регулярных ветвей многозначных аналитических функций.

В четвертой главе изложена теория вычетов и ее приложения. Рассмотрено много важных типов интегралов от однозначных и неоднозначных аналитических функций.

В пятой главе рассматриваются свойства конформных отображений, подробно изучаются отображения, задаваемые элементарными функциями, дается решение задачи Дирихле с помощью конформных отображений.

Шестая глава содержит краткие сведения о преобразовании Лапласа и его применении к решению дифференциальных уравнений.

Во втором издании, как и в первом, в числе авторов указан Ю. В. Сидоров, с которым мы обсуждали структуру книги. К сожалению, Юрий Викторович не смог принять участие в работе над книгой в связи с продолжительной болезнью и кончиной в начале 2001 г. Меня связывало с ним многолетнее сотрудничество и совместная работа над многими учебниками и учебными пособиями, в том числе и над учебником по ТФКП (авторы Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин), на который имеется много ссылок в данном учебнике.

Во второе издание внесены существенные изменения: подробно изучено понятие аргумента, переработан материал, связанный с обратной функцией и теоремой единственности, заменены многие примеры (особенно из раздела «Особые точки»), переработана глава о многозначных функциях, много внимания уделено выделению регулярных ветвей.

Выражаю искреннюю благодарность своим коллегам по кафедре высшей математики МФТИ и, в первую очередь, профессору Е. С. Половинкину, за конструктивную критику первого издания книги и предложения по ее переработке.

М. И. Шабунин

ГЛАВА 1
ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Комплексные числа

1. Определение комплексного числа

Комплексными числами называются пары (x, y) действительных чисел x и y , если для них определены понятие равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1. Два комплексных числа (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
2. *Суммой* двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
3. *Произведением* двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Для обозначения равенства, суммы, произведения и других операций над комплексными числами применяются те же знаки, что и для действительных чисел. Таким образом, по определению комплексного числа

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2), \quad \text{если } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2; \quad (1)$$

сумма и произведение двух комплексных чисел соответственно равны

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (3)$$

Множество комплексных чисел, в котором введено равенство, а также операции сложения и умножения по формулам (1)–(3), обозначают \mathbb{C} . Напомним, что множество натуральных чисел обозначают \mathbb{N} , множество целых чисел — буквой \mathbb{Z} , а множество действительных чисел — буквой \mathbb{R} .

Из формул (2), (3) получаются, в частности, равенства

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами $(x, 0)$ совпадают с операциями над действительными числами x . Поэтому комплексные числа $(x, 0)$ отождествляются с действительными числами: $(x, 0) = x$.

Комплексное число $(0, 1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается буквой i , т. е. $i = (0, 1)$. По формуле (3) находим

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

а по формулам (2) и (3) получается равенство

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Таким образом, каждое комплексное число можно записать в *алгебраической форме*: $(x, y) = x + iy$.

Комплексные числа $0 + iy = iy$ называют *чисто мнимыми*. В частности, число $0 + i \cdot 0 = 0$ является единственным числом, которое одновременно и действительное, и чисто мнимое.

С помощью алгебраической формы комплексного числа соотношения (1)–(3) записываются так:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \quad \text{если } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2, \quad (4)$$

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (5)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (6)$$

Комплексное число $x + iy$ принято обозначать одной буквой z , т. е. $z = x + iy$. Число x называется *действительной частью*, а число y — *мнимой частью* комплексного числа $z = x + iy$. Для этих чисел приняты следующие обозначения*:

$$x = \operatorname{Re}(x + iy) = \operatorname{Re}z, \quad y = \operatorname{Im}(x + iy) = \operatorname{Im}z.$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, в записи $z = x + iy$ предполагается, что x и y — действительные числа.

2. Комплексно сопряженные числа

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z = x + iy$ и обозначается \bar{z} , т. е.

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy. \quad (7)$$

* Обозначения Re и Im являются сокращениями французских слов *Reel* (действительный) и *Imaginaire* (мнимый).

Из этого определения следует, что операция сопряжения перестановочна с арифметическими операциями над комплексными числами:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из (7) получается также, что для любого комплексного числа z справедливо равенство $\overline{\overline{z}} = z$, а равенство $\overline{z} = z$ выполняется только тогда, когда z — действительное число.

Пример 1. Если $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ — многочлен с действительными коэффициентами, то по свойствам операции сопряжения получаем:

$$\overline{P(z)} = a_0 (\overline{z})^n + a_1 (\overline{z})^{n-1} + \dots + a_n = P(\overline{z}).$$

Если $P(z_0) = 0$, то $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = 0$, т. е. если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и комплексно сопряженное число $\overline{z_0}$ также является корнем этого многочлена.

3. Модуль комплексного числа

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$, т. е.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8)$$

Из этого определения следует, что $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0$ только тогда, когда $z = 0$. Модуль действительного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа. Из (8) получаются также следующие равенства:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|;$$

$$|z^n| = |z|^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$|\overline{z}| = |z|, \quad z\overline{z} = |z|^2. \quad (9)$$

4. Свойства арифметических операций над комплексными числами

Из формул (4)–(6) следует, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами.

1. Коммутативность:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

2. Ассоциативность:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3. Дистрибутивность:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Поэтому операции сложения и умножения над комплексными числами $x + iy$ обладают формально такими же свойствами, как если бы число i было действительным. В частности, нет необходимости запоминать формулы (5) и (6), их можно получить по обычным правилам алгебры. Например, (6) получается из равенства

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2,$$

где $i^2 = -1$.

Числа ноль и единица в множестве комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и в множестве действительных чисел. А именно, для любого комплексного числа z имеют место равенства:

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z.$$

4. Вычитание. Операция сложения комплексных чисел обладает обратной операцией, которую, как обычно, называют *вычитанием*. Это означает, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 существует, и притом только одно, число z , удовлетворяющее уравнению

$$z + z_2 = z_1. \tag{10}$$

Это число называется *разностью* чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 - z_2$. В частности, разность $0 - z$ обозначается $-z$.

○ Из (4), (5) следует, что для любых комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ уравнение (10) имеет единственный корень $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$. Таким образом,

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad \bullet$$

5. Деление. Операция умножения комплексных чисел обладает обратной операцией, которую, как обычно, называют *делением*. Это

означает, что для любых двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ существует, и притом только одно, число z , удовлетворяющее уравнению

$$zz_2 = z_1. \quad (11)$$

Это число называется частным чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 : z_2$ или $\frac{z_1}{z_2}$.

О Докажем, что уравнение (11) имеет единственный корень для любых комплексных чисел z_1 и z_2 , если $z_2 \neq 0$. Умножая обе части уравнения (11) на число \bar{z}_2 и используя формулу (9), получаем $z|z_2|^2 = z_1\bar{z}_2$, откуда умножением на число $\frac{1}{|z_2|^2}$ находим $z = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Таким образом,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0. \quad (12)$$

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то формулу (12) можно записать так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Эту формулу можно не запоминать — достаточно помнить, что она получается умножением числителя и знаменателя на число, сопряженное со знаменателем.

5. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y) , и эта точка обозначается той же буквой z (рис. 1).

Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости является взаимно однозначным. При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые — точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Отметим, что точки z и $-z$ симметричны относительно точки 0, а точки z и \bar{z} симметричны относительно действительной оси: если $z = x + iy$, то $-z = (-x) + i(-y)$, а $\bar{z} = x + i(-y)$ (рис. 1).

Комплексное число z изображается также вектором с началом в точке 0 и концом в точке z (рис. 1). Такое соответствие между комплексными числами и векторами комплексной плоскости с началом в точке 0 также является взаимно однозначным. Поэтому вектор, изображающий комплексное число z , обозначается той же буквой z .

Из формулы (8) и рис. 1 видно, что *длина вектора z равна $|z|$* и имеют место неравенства

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сложение и вычитание комплексных чисел. Из формулы (5) следует, что число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по обычному правилу сложения векторов z_1 и z_2 (рис. 2). Вектор $z_1 - z_2$ строится как сумма векторов z_1 и $-z_2$ (рис. 2).

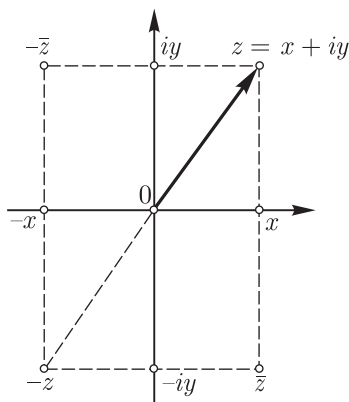


Рис. 1

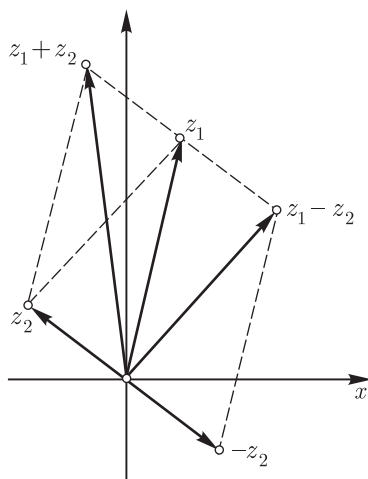


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что *расстояние между точками z_1 и z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е. равно $|z_1 - z_2|$* .

Пример 2. Множество точек z , удовлетворяющих уравнению $|z - z_0| = R$ есть окружность радиуса R с центром в точке z_0 , так как $|z - z_0|$ — расстояние между точками z и z_0 .

Пример 3. Множество точек z , удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| = |z - z_2|$ есть множество точек, равноудаленных от точек z_1 и z_2 . Следовательно, это уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1 , z_2 , и проведенной через его середину.

Неравенства треугольника. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 выполняются неравенства

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (13)$$

О Длины сторон треугольника с вершинами в точках 0 , z_1 , $z_1 + z_2$ равны $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$ (рис. 2). Следовательно, неравенства (13) являются известными из элементарной геометрии неравенствами для длин сторон треугольника. ●

Следствие. Для любых комплексных чисел z_1, z_2, \dots, z_n выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

6. Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми координатами x , y , но и полярными координатами r , φ (рис. 3), где $r = |z|$ — расстояние от точки 0 до точки z , а φ — угол между действительной осью и вектором z , отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной. Этот угол называется *аргументом* комплексного числа z ($z \neq 0$) и обозначается так*: $\varphi = \arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, поэтому во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, предполагается, что $z \neq 0$.

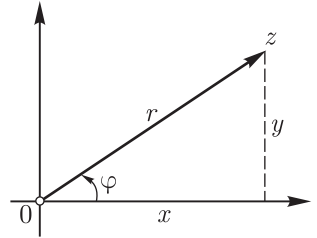


Рис. 3

Из рис. 3 видно, что

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (14)$$

Следовательно, любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (15)$$

Запись комплексного числа в виде (15) называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

* Обозначение \arg является сокращением французского слова *argument* (аргумент).

Из формул (14) получается, что если $z = x + iy$, $\varphi = \arg z$, то

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (16)$$

Таким образом, для нахождения аргумента комплексного числа $z = x + iy$ нужно решить систему уравнений (16).

Система (16) имеет бесконечно много решений, и все эти решения задаются формулой $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где φ_0 — одно из решений системы (16). Таким образом, аргумент комплексного числа определяется неоднозначно: если φ_0 — одно из значений аргумента комплексного числа z , то все значения аргумента этого числа находятся по формуле

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17)$$

Из системы (16) получается, что аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \quad (18)$$

Следует иметь в виду, что не все корни уравнения (18) являются решениями системы (16).

7. Показательная форма комплексного числа

Пусть $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$. Тогда по формуле (15) имеем $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Это комплексное число обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. функция $e^{i\varphi}$ для любого действительного числа φ определяется формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (19)$$

В частности $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{-\pi i/2} = -i$ (рис. 4). Отметим, что $|e^{i\varphi}| = 1$ для любого действительного числа φ . Из (19) заменой φ на $(-\varphi)$ получается равенство

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi. \quad (20)$$

Сложением и вычитанием равенств (19) и (20) получаются *формулы Эйлера*

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}),$$

с помощью которых тригонометрические функции выражаются через показательную функцию.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции, как если бы число i было действительным. Отметим основные из

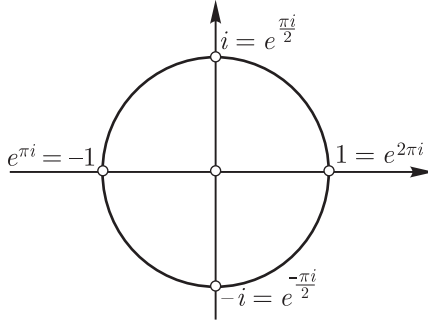


Рис. 4

них:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (21)$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (22)$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (23)$$

Докажем, например, равенство (21):

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется равенство (22). Равенство (23) получается из (21) и (22) по индукции.

Из (23) и (19) получается *формула Муавра*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из формул (15) и (19) следует, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r e^{i\varphi}, \quad (24)$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Запись комплексного числа в виде (24) называется *показательной формой* комплексного числа.

С помощью равенств (21) и (22) получаются формулы умножения и деления комплексных чисел, записанных в показательной форме:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (25)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (26)$$

а из равенства (23) — формула возведения в целую степень:

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Из формул (25)–(27) получаются, в частности, формулы (9), а также следующие свойства аргумента:

$$\text{если } \varphi_1 = \arg z_1, \varphi_2 = \arg z_2, \text{ то } \varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 z_2); \quad (28)$$

$$\text{если } \varphi_1 = \arg z_1, \varphi_2 = \arg z_2, \text{ то } \varphi_1 - \varphi_2 = \arg \frac{z_1}{z_2}; \quad (29)$$

$$\text{если } \varphi_1 = \arg z, \text{ то } n\varphi = \arg(z^n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (30)$$

$$\text{если } \varphi_1 = \arg z, \text{ то } -\varphi = \arg \bar{z}. \quad (31)$$

Сформулируем правило равенства комплексных чисел, записанных в тригонометрической или показательной форме: если $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, то равенство $z_1 = z_2$ имеет место только тогда, когда

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{и} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad (32)$$

где k — некоторое целое число.

8. Извлечение корня

Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \quad (33)$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, n — натуральное число. Пусть $a = \rho e^{i\theta}$, $z = r e^{i\varphi}$. Тогда

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}.$$

Из этого уравнения с помощью правила (32) находим $r^n = \rho$, $n\varphi = \theta + 2k\pi$, откуда $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi_k = (\theta + 2k\pi)/n$ и

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{(\theta + 2k\pi)i/n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (34)$$

Среди этих чисел ровно n различных, получаемых, например, при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. На комплексной плоскости эти точки расположены в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке 0 (рис. 5).

Замечание. Комплексное число z называется *корнем n -й степени из числа a* (обозначается $\sqrt[n]{a}$), если $z^n = a$. Выше показано, что при $a \neq 0$ имеется ровно n различных корней n -й степени из числа a .

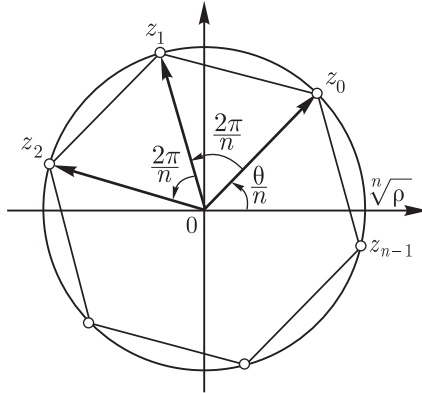


Рис. 5

§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел

1. Предел последовательности

Определение предела последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ формально такое же, как и определение предела последовательности действительных чисел.

Определение 1. Комплексное число z_0 называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - z_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

При этом пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$.

Другими словами, число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = 0. \tag{2}$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Геометрический смысл неравенства (1) заключается в том, что точка z_n лежит в круге радиуса ε с центром в точке z_0 (рис. 6). Этот круг, т. е. множество точек z , удовлетворяющих неравенству $|z_n - z_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, называется ε -окрестностью точки z_0 . Следовательно, точка z_0 является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки z_0 содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа.

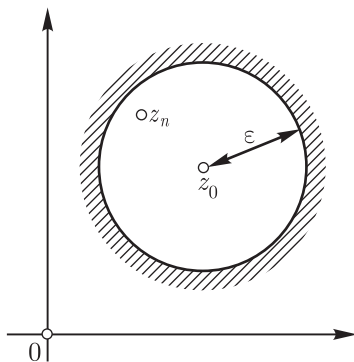


Рис. 6

Таким образом, определение предела последовательности $\{z_n\}$ является обычным определением предела последовательности точек плоскости, сформулированным в терминах комплексных чисел.

Пусть $z_n = x_n + iy_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В курсе математического анализа доказывается

Теорема 1. *Существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ равносильно существованию двух пределов: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.*

Из этой теоремы и свойств сходящихся последовательностей действительных чисел получаются следующие свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел:

если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta_0$, где $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm \zeta_n) = z_0 \pm \zeta_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot \zeta_n) = z_0 \cdot \zeta_0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{z_0}{\zeta_0}$, если $\zeta_n \neq 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$.

Точно так же, как и в курсе математического анализа, доказывается

Критерий Коши. *Последовательность $\{z_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ и $m > N$ выполняется неравенство $|z_n - z_m| < \varepsilon$.*

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число R , что $|z_n| < R$ для всех номеров n .

Из геометрической интерпретации предела последовательности получается, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Сформулируем свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел, связанные со свойствами последовательностей модулей и аргументов этих чисел.

1. Из определения предела последовательности $\{z_n\}$ и неравенства $\left| |z_n| - |z_0| \right| \leq |z_n - z_0|$ получается следующее свойство:
если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z_0|$.
2. Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, где $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Из формулы $z_n = r_n \cos \varphi_n + ir_n \sin \varphi_n$ и теоремы 1 получается следующее достаточное условие сходимости последовательности $\{z_n\}$:
если $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = r_0 e^{i\varphi_0}$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k, \tag{3}$$

составленный из комплексных чисел. Этот ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$.

При этом предел s последовательности $\{s_n\}$ называют *суммой ряда* (3) и пишут $s = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

Ряд (3) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|.$$

Если $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \dots$, то по теореме 1 исследование свойств ряда (3) сводится к исследованию свойств рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

2. Расширенная комплексная плоскость

Понятие «бесконечность» вводится с помощью следующего определения.

Определение 2. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называют *сходящейся к бесконечности* и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty, \tag{4}$$

если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty. \tag{5}$$

Это определение формально совпадает с соответствующим определением для действительных чисел, так как соотношение (5) означает, что для любого $R > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n| > R. \quad (6)$$

Геометрически неравенство (6) означает, что точка z_n лежит вне круга радиуса R с центром в точке O (рис. 7). Это множество называется *окрестностью бесконечности*. Следовательно, точка $z = \infty$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки $z = \infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа.

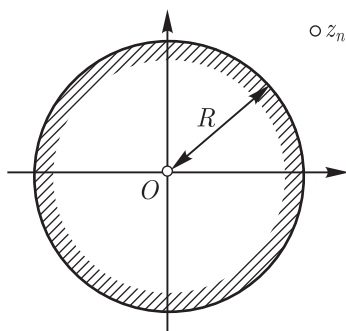


Рис. 7

Таким образом, «числу» $z = \infty$ ставится в соответствие символическая бесконечно удаленная точка. Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\mathbb{C}}$. Приведем геометрическую интерпретацию расширенной комплексной плоскости.

Рассмотрим сферу S , касающуюся комплексной плоскости в точке O (рис. 8). Обозначим через P точку сферы S , диаметрально противоположную точке O . Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M , которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P (рис. 8). При этом последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек сферы S , сходящаяся к точке P . Поэтому точке $z = \infty$ поставим в соответствие точку P .

Такое соответствие между точками расширенной комплексной плоскости и точками сферы S является взаимно однозначным. Оно на-

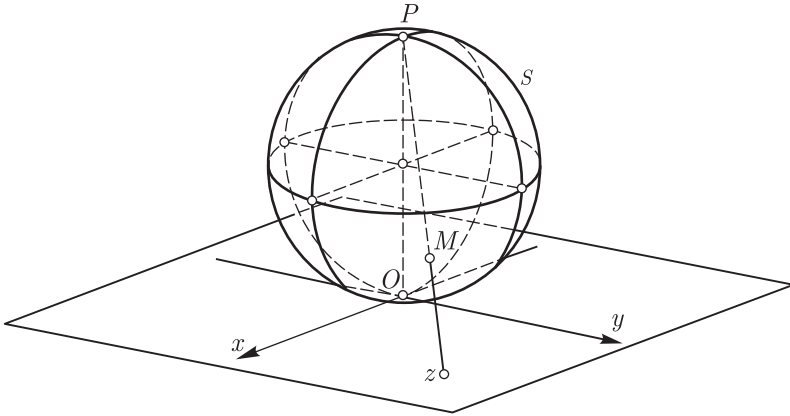


Рис. 8

зывается *стереографической проекцией*, а сфера S называется *сферой Римана*.

Комплексные числа (включая $z = \infty$) можно изображать точками сферы Римана. При этом сходящиеся последовательности комплексных чисел изображаются на сфере Римана сходящимися последовательностями точек.

При стереографической проекции окружности переходят в окружности, угол между пересекающимися кривыми на плоскости равен углу между образами этих кривых на сфере Римана.

Теорема 2. *Расширенная комплексная плоскость компактна, т. е. из любой последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся (может быть, к бесконечности) подпоследовательность.*

Эта теорема доказывается в курсе математического анализа.

§ 3. Кривые и области на комплексной плоскости

1. Непрерывные кривые

Пусть на конечном отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$ заданы две непрерывные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Тогда на этом отрезке задана непрерывная комплекснозначная функция действительного переменного:

$$z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Учебник по теории функций комплексного переменного написан авторами на основе многолетнего опыта преподавания этого предмета в Московском физико-техническом институте.

Изложение теоретического материала подкреплено большим количеством примеров с решениями.

Содержание настоящего учебника тесно связано с книгой М. И. Шабунина, Е. С. Половинкина, М. И. Карлова «Сборник задач по теории функций комплексного переменного».

Для студентов инженерно-физических и физико-технических вузов, а также для студентов университетов.