Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии и физике. По каждому предмету вышли два пособия: основной курс и углубленный курс, содержащий сложные задачи единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М.В. Ломоносова). Основной курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач первой части ЕГЭ и некоторых задач второй части, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Углубленный курс содержит задачи, научившись решать которые, вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

В серии «ВМК МГУ – школе» вышли два пособия по информатике. Первое рекомендуется в качестве пособия при подготовке к ЕГЭ по информатике и ИКТ. Разделы этого пособия соответствуют темам, включенным в ЕГЭ. Второе – пособие по программированию – поможет вам подготовиться к экзамену по информатике, научиться решать задачи по программированию на языке Паскаль.

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет значительно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу. **Второй особенностью** наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Заместитель декана по учебной работе
факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
М. В. Федотов

Предисловие

Предлагаемый «Углублённый курс» является естественным продолжением «Основного курса» по геометрии и предполагает свободное владение методами и приёмами из «Основного курса».

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах расположены по принципу «*от простого – к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если Вам не удалось получить правильный ответ или у Вас возникли сомнения в правильности Вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

Необходимо отметить, что в формулировках задач параллельно с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Теория и задачи

1. Треугольники

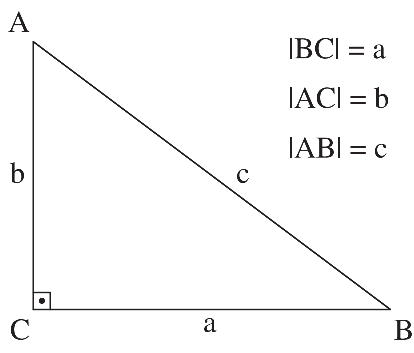
1.1. Прямоугольные треугольники

Теоретический материал

Этот раздел всецело посвящен прямоугольным треугольникам. Для успешного решения задач, относящихся к этой теме, необходимо знать и уметь обосновывать **все** факты, перечисленные ниже по тексту.

1. Соотношения между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим **прямоугольный треугольник** ABC, будем считать, что его угол C прямой (то есть его величина равна $\pi/2$), длины отрезков AB, AC и BC (которые везде в пособии будут обозначены как $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$) равны c, b и a соответственно. Тогда



$$a = b \cdot \operatorname{tg} \widehat{A} = b \cdot \operatorname{ctg} \widehat{B} = c \cdot \sin \widehat{A} = c \cdot \cos \widehat{B},$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} = a \cdot \operatorname{ctg} \widehat{A} = c \cdot \sin \widehat{B} = c \cdot \cos \widehat{A},$$

$$c = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{a}{\cos \widehat{B}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{b}{\cos \widehat{A}}.$$

З а м е ч а н и е. Полезно знать, что эти формулы на самом деле есть не что иное, как переписанные утверждения, вытекающие из определений тригонометрических функций величин острых углов, а именно:

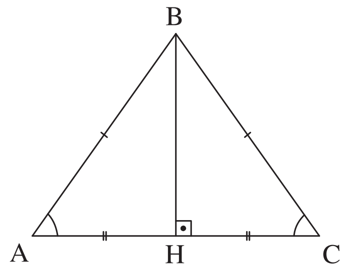
Синус величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **противолежащего** этому углу, к длине гипотенузы;

Косинус величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **прилежащего** к этому углу, к длине гипотенузы;

Тангенс величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **противолежащего** этому углу, к длине катета, **прилежащего** к этому углу;

Котангенс величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **прилежащего** к этому углу, к длине катета, **противолежащего** этому углу.

2. Соотношения между длинами сторон и величинами углов в равнобедренном треугольнике



Пользуясь вышеизложенными фактами, получим непосредственно вытекающие из них важные соотношения между длинами сторон, длиной высоты, проведенной к основанию, и величинами углов в равнобедренном треугольнике. Как показывает практика, при решении задач очень часто возникают различные конфигурации, в которые входят равнобедренные треугольники, и, как следствие, возникает необходимость применять нижеприведённые формулы. Рассмотрим **равнобедренный треугольник** ABC, в котором $|AB| = |BC|$, BH — высота, проведенная к основанию AC. Справедливы следующие утверждения:

I. *Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна частному длины его основания и удвоенного косинуса величины угла при основании этого треугольника*:

$$|AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2\cos\widehat{BAC}}, \quad |AC| = 2\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{BAC}.$$

II. *Длина высоты равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию, равна частному длины этого основания и удвоенного котангенса величины угла при основании этого треугольника*:

$$|BH| = \frac{|AC|}{2\operatorname{ctg}\widehat{BAC}}, \quad |AC| = 2\cdot|BH|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAC}.$$

Доказательство этих фактов несложно: ясно, что прямоугольные треугольники ABH и CBH равны по гипотенузе и катету. Из этого равенства вытекает, что $|AH| = |HC|$, а, с другой стороны, из прямоугольного треугольника ABH следует, что $|AH| = |AB|\cdot\cos\widehat{BAC}$, $|AH| = |BH|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAC}$. Поэтому

$$|AC| = 2\cdot|AH| = 2\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{BAC} \quad\Longleftrightarrow\quad |AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2\cos\widehat{BAC}};$$

$$|AC| = 2\cdot|AH| = 2\cdot|BH|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAC} \quad\Longleftrightarrow\quad |BH| = \frac{|AC|}{2\operatorname{ctg}\widehat{BAC}}.$$

Утверждение доказано.

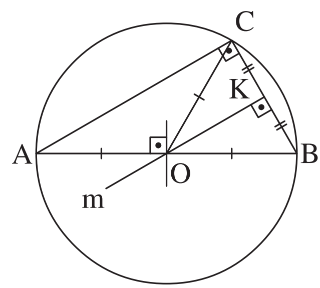
3. Формула площади прямоугольного треугольника

Площадь прямоугольного треугольника может быть вычислена как половина произведения длин его катетов $\left(S = \dfrac{ab}{2}\right)$.

Доказательство этого факта практически очевидно – ясно, что если в прямоугольнике, длины сторон которого равны a и b, провести диагональ, то он будет разделён на два равных прямоугольных треугольника, длины катетов которых равны a и b. Осталось лишь вспомнить, что площадь прямоугольника равна произведению длин двух его смежных сторон, то есть ab.

4. Окружность, описанная около прямоугольного треугольника

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, находится на середине его гипотенузы; длина радиуса этой окружности равна половине длины гипотенузы $\left(R = \dfrac{c}{2}\right)$.



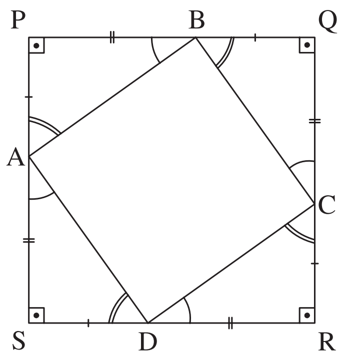
Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем, что центр окружности, описанной около **произвольного** треугольника, лежит на пересечении **серединных перпендикуляров** к его сторонам. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), обозначим буквой K середину его стороны BC, проведем через точку K прямую m, перпендикулярную BC (она как раз и будет серединным перпендикуляром к отрезку BC) и обозначим буквой O точку пересечения m и AB.

Рассматривая прямоугольные треугольники ABC и OBK, имеем $\cos\widehat{B} = |BK| : |OB| = |BC| : |AB|$, из чего следует $|OB| : |AB| = |BK| : |BC|$. Но поскольку $|BK| : |BC| = 1 : 2$, точка O – **середина** отрезка AB. Наконец, в силу того, что серединный перпендикуляр к AB тоже проходит через точку O, точка O есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC, то есть она является центром окружности, описанной около треугольника ABC. Длина радиуса этой окружности, очевидно, равна длине отрезка OA, то есть половине длины гипотенузы AB.

З а м е ч а н и е. Верно и обратное утверждение: если у некоторого треугольника центр описанной около него окружности находится на середине одной из его сторон (что эквивалентно тому, что длина радиуса этой окружности равна половине длины одной из его сторон), то этот треугольник прямоугольный.

5. Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы ($a^2 + b^2 = c^2$).



Приведем доказательство этого факта. Рассмотрим четыре **равных** между собой прямоугольных треугольника ABP, BCQ, CDR и DAS, будем считать, что

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = c,$$

$$|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = a,$$

$$|BP| = |CQ| = |DR| = |AS| = b,$$

и расположим их так, как показано на рисунке. Заметим, что $|PQ| = |QR| = |RS| = |SP| = a + b$, углы P, Q, R и S прямые, поэтому $PQRS$ – квадрат. С другой стороны, из теоремы о сумме величин углов треугольника вытекает, что сумма величин острых углов прямоугольного треугольника равна $\pi/2$. Но тогда величины углов ABC, BCD, CDA и DAB тоже равны $\pi/2$. Это следует из того, что, например, $\widehat{ABC} + \widehat{ABP} + \widehat{CBQ} = \pi$, $\widehat{ABP} + \widehat{CBQ} = \pi/2$. Пользуясь этим фактом и равенством длин отрезков AB, BC, CD и DA, мы получаем, что $ABCD$ тоже является квадратом.

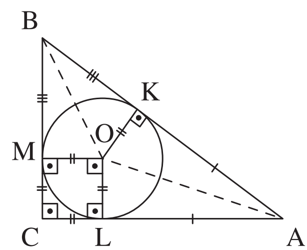
Наконец, очевидно, что площадь квадрата $PQRS$ равна сумме площади квадрата $ABCD$ и учетверённой площади треугольника ABP. Пользуясь формулами площади квадрата и прямоугольного треугольника, находим

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{ab}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad a^2+2ab+b^2 = c^2+2ab \quad\Longleftrightarrow\quad a^2+b^2=c^2.$$

З а м е ч а н и е. Верна и обратная теорема: если в некотором треугольнике сумма квадратов длин двух его сторон равна квадрату длины его третьей стороны, то он прямоугольный.

6. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник

Длина радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равна полуразности суммы длин его катетов и длины его гипотенузы $\left(r = \dfrac{a+b-c}{2}\right)$.



Доказательство этого факта чуть более сложно, чем предыдущие доказательства. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), обозначим центр вписанной в него окружности буквой O, точки её касания со сторонами AB, BC и AC – буквами K, M и L соответственно, а длину её радиуса – буквой r.

Ясно, что $OK \perp AB$, $OM \perp BC$ и $OL \perp AC$. Из этого следует, что $OLCM$ – квадрат (у четырёхугольника $OLCM$ три прямых угла, поэтому он прямоугольник, и равны длины смежных сторон OL и OM, поэтому он квадрат), стало быть, $|CM| = |CL| = |OL| = r$. Также заметим, что равны пары прямоугольных треугольников AOL и AOK, BOM и BOK (по гипотенузе и катету), из чего вытекает, что $|AL| = |AK|$, $|BM| = |BK|$. Наконец, запишем цепочку соотношений

$$|AB| = |AK| + |BK| = |AL| + |BM| =$$
$$= (|AC| - |CL|) + (|BC| - |CM|) = |AC| + |BC| - 2r,$$

откуда и следует требуемая формула.

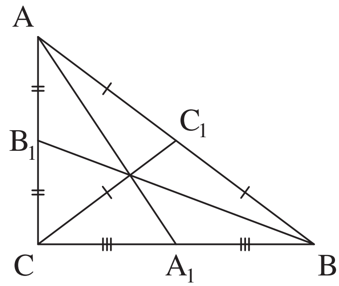
З а м е ч а н и е. Обратное утверждение опять-таки верно: если длина радиуса окружности, вписанной в некоторый треугольник, может быть вычислена как полуразность суммы длин двух его сторон и длины его третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный.

7. Медианы прямоугольного треугольника

Длина медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна половине длины гипотенузы, длина медианы, проведённой к катету, равна корню из суммы четверти квадрата длины этого катета и квадрата длины другого катета:

$$m_c = \frac{c}{2},\ m_a = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}},\ m_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Доказательство этого факта тривиально. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), его медианы обозначим как AA_1, BB_1 и CC_1. Так как C_1 – середина гипотенузы, то C_1 – центр окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому



$$|AC_1| = |BC_1| = |CC_1| = \frac{|AB|}{2}.$$

Для нахождения длин отрезков AA_1 и BB_1 надо всего лишь применить теорему Пифагора для треугольников AA_1C и BB_1C.

Следствие. *Сумма квадратов длин медиан прямоугольного треугольника, проведённых к катетам, в пять раз больше, чем квадрат длины его медианы, проведённой к гипотенузе* ($5m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$).

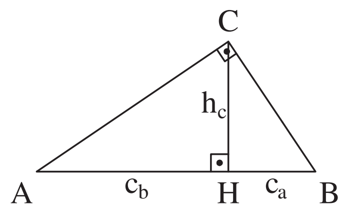
Замечание. Опять-таки верны обратные утверждения: если в некотором треугольнике длина медианы, проведённой к одной из его сторон, равна половине длины этой стороны или выполнено соотношение $5m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$, то этот треугольник – прямоугольный.

8. Высоты прямоугольного треугольника

I. *Длина высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна частному произведения длин катетов и длины гипотенузы* $\left(h_c = \dfrac{ab}{c}\right)$.

II. *Квадрат длины высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению длин отрезков гипотенузы, на которые её делит основание этой высоты* ($h_c^2 = c_a \cdot c_b$).

Доказать эти утверждения несложно: возьмем прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), проведём его высоту CH и с помощью соотношений между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике выразим двумя способами синус величины угла A (рассмотрев треугольники ABC и ACH):



$$\sin\widehat{A} = \frac{|BC|}{|AB|},\ \sin\widehat{A} = \frac{|CH|}{|AC|} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|CH|}{|AC|} \quad\Longleftrightarrow\quad |CH| = \frac{|AC|\cdot|BC|}{|AB|}.$$

С другой стороны, из прямоугольных треугольников ACH и BCH имеем

$$\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{|CH|}{|AH|},\ \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{|CH|}{|BH|} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\widehat{A}\cdot\operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{|CH|^2}{|AH|\cdot|BH|},$$

из чего, пользуясь тем, что $\operatorname{tg}\widehat{A}\cdot\operatorname{tg}\widehat{B} = \dfrac{|BC|}{|AC|}\cdot\dfrac{|AC|}{|BC|} = 1$, мы получаем требуемое соотношение: $|CH|^2 = |AH|\cdot|BH|$.

З а м е ч а н и е 1. Верны и обратные утверждения:

I. Если в некотором треугольнике длина высоты, проведённой к одной из его сторон, равна отношению произведения длин двух других его сторон и длины стороны, к которой проведена высота, то этот треугольник прямоугольный;

II. Если в некотором треугольнике квадрат длины высоты, проведённой к одной из его сторон, равен произведению длин отрезков, на которые её основание делит эту сторону, то этот треугольник прямоугольный.

З а м е ч а н и е 2. Ясно, что высота прямоугольного треугольника, проведённая к одному из его катетов, совпадает с другим его катетом. То есть $h_a = b$, $h_b = a$.

Отметим, что все приведённые обратные утверждения даны без доказательств. Это сделано по причине того, что их доказательства требуют применения различных фактов, связанных с произвольными треугольниками и впрямую не относящихся к теме этого параграфа, или же решения различных тригонометрических уравнений. Тем не менее, попробуйте их доказать.

Наконец, перечислим некоторые факты, относящиеся к произвольным треугольникам, которые также необходимо знать и уметь использовать при решении задач, в которых встречаются прямоугольные треугольники.

В нижеприведённых формулах a, b, c – длины сторон произвольного треугольника, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ – величины соответствующих противолежащих им углов треугольника, h_a, h_b, h_c – длины высот, проведённых к сторонам, длины которых равны a, b и c соответственно, p – полупериметр треугольника, r – длина радиуса вписанной в треугольник окружности, R – длина радиуса описанной около треугольника окружности.

Теорема о сумме величин внутренних углов треугольника

Сумма величин внутренних углов треугольника равна π. (Сумма градусных мер внутренних углов треугольников равна $180°$.)

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R.$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

Различные формулы площади произвольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\widehat{A},$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S = p\cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = 2R^2\cdot\sin\widehat{A}\cdot\sin\widehat{B}\cdot\sin\widehat{C}.$$

Теоремы о медианах и высотах треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой на отрезки, длины которых относятся как 2:1, считая от вершины.

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке. Если треугольник остроугольный, то эта точка лежит внутри треугольника. Если он тупоугольный, то эта точка лежит вне него.

Теоремы об описанной и вписанной окружностях

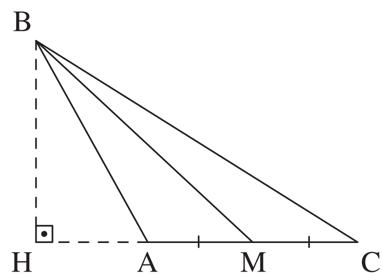
Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведённых к сторонам треугольника. Причем этот центр лежит внутри треугольника, если он остроугольный; вне треугольника, если он тупоугольный; на середине гипотенузы, если он прямоугольный.

Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис всех трёх внутренних углов треугольника, причем всегда внутри треугольника.

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольнике ABC из вершины B к стороне AC проведены медиана BM и высота BH. Известно, что $|AB| = \sqrt{5}$, $|BM| = 2\sqrt{2}$, $|BH| = 2$. Найдите длину стороны BC, если $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \pi/2$.

Решение. При решении этой задачи главное – выяснить, где находится основание высоты BH. Для этого рассмотрим данное нам про величины углов треугольника соотношение и используем теорему о сумме величин углов треугольника:



$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \frac{\pi}{2},$$

$$\widehat{BAC} = \pi - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BAC} > \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, угол BAC тупой. Из этого вытекает, что точка H лежит **на продолжении** стороны AC за точку A, поэтому $|AH|+|AM| = |HM|$. Применяя теорему Пифагора для треугольников BAH и BMH, получаем

$$|BH|^2 + |AH|^2 = |BA|^2 \quad \Longrightarrow \quad 2^2 + |AH|^2 = (\sqrt{5})^2 \quad \Longrightarrow \quad |AH| = 1,$$

$$|BH|^2 + |MH|^2 = |BM|^2 \quad \Longrightarrow \quad 2^2 + |MH|^2 = (2\sqrt{2})^2 \quad \Longrightarrow \quad |MH| = 2.$$

Отсюда вытекает, что $|AM| = |MH| - |AH| = 1$. Далее, M – середина AC, значит, $|AC| = 2 \cdot |AM| = 2$, а $|CH| = |AH| + |AC| = 3$.

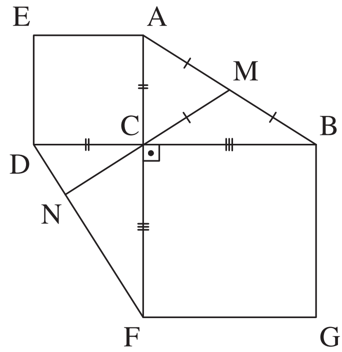
Наконец, записываем теорему Пифагора для треугольника BHC:

$$|BH|^2 + |HC|^2 = |BC|^2 \quad \Longrightarrow \quad |BC|^2 = 2^2 + 3^2 = 13.$$

Ответ. $|BC| = \sqrt{13}$.

Пример 2. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину отрезка CN, если известно, что $|AC| = 1, |BC| = 4$.

Решение. CM – медиана треугольника ABC, проведённая к его гипотенузе, значит, $|AM| = |BM| = |CM|$ и треугольники ACM и BCM равнобедренные.



С учётом этого и того, что углы FCN и MCA вертикальные, получаем

$$\widehat{FCN}=\widehat{MCA}=\widehat{MAC}=\frac{\pi}{2}-\widehat{MBC}.$$

А из равенства прямоугольных треугольников FCD и BCA (по двум катетам) вытекает равенство углов CFN и MBC. Отсюда следует, что

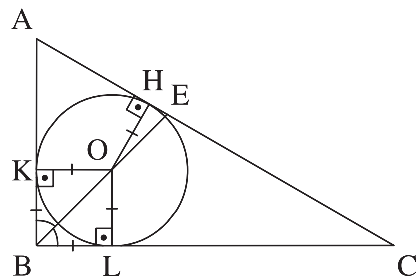
$$\widehat{FCN}+\widehat{CFN}=\frac{\pi}{2}\quad\Longrightarrow\quad\widehat{CNF}=\frac{\pi}{2}.$$

То есть CN – высота треугольника FCD. Её длину можно легко вычислить с помощью формулы длины высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе:

$$|DF|=\sqrt{|CF|^2+|CD|^2}=\sqrt{17};\ |CN|=\frac{|CD|\cdot|CF|}{|DF|}=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Ответ. $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

Пример 3. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $\sqrt{3}:\sqrt{2}$, считая от вершины B. Найдите величины острых углов треугольника ABC.



Решение. Проведём из центра вписанной окружности радиусы OH, OK и OL в точки касания её с гипотенузой и катетами, положим $|OH|=|OK|=|OL|=r$.

Поскольку углы OKB, OLB, ABC прямые, а $|OK|=|OL|$, $OKBL$ – квадрат. Поэтому $|BO|=r\sqrt{2}$. Теперь выразим длину отрезка OE. Так как BE – биссектриса угла ABC, величина угла ABE равна $\pi/4$. Обозначим величину угла A через α, тогда, так как сумма величин углов треугольника ABE равна π, величина угла AEB равна $3\pi/4-\alpha$. С учётом этого из прямоугольного треугольника OHE получаем

$$|OE|=\frac{|OH|}{\sin\widehat{OEH}}=\frac{r}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)}.$$

Подставляя выраженные нами длины отрезков BO и OE в соотношение из условия задачи и учитывая тот факт, что, поскольку угол A – острый, то $0<\alpha<\pi/2$ и величина $3\pi/4-\alpha$ может принимать только значения из интервала $(\pi/4, 3\pi/4)$, имеем

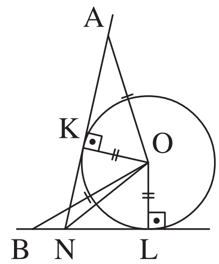
$$\frac{r\sqrt{2}}{\dfrac{r}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{3\pi}{4}-\alpha=\dfrac{\pi}{3},\\[2mm] \dfrac{3\pi}{4}-\alpha=\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{5\pi}{12},\\[2mm] \alpha=\dfrac{\pi}{12}.\end{array}\right.$$

Мы получили два варианта для величины угла α, в сумме они дают $\pi/2$. Это и есть величины острых углов треугольника, поскольку, если мы выберем в качестве α одно из двух полученных значений, величина другого острого угла будет равна как раз второму из этих значений.

Ответ. $\dfrac{5\pi}{12}$ и $\dfrac{\pi}{12}$.

Пример 4. Через точку N проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка A, а на другой взята точка B так, что $|OA| = |OB|$, $|OA| > |ON|$, $|NA| \neq |NB|$. Известно, что $|NA| = a, |NB| = b, |OA| = c$. Найдите длину отрезка ON.

Решение. Обозначим точки касания прямых и окружности из условия задачи буквами K и L, без ограничения общности будем считать, что точка A лежит на прямой NK, а точка B – на прямой NL.



Заметим, что $\triangle NOK = \triangle NOL$ и $\triangle AOK = \triangle BOL$ (по гипотенузе и катету), откуда следует, что $|NK| = |NL|$ и $|AK| = |BL|$. Также отметим, что из данных в условии задачи неравенств $|OA| > |ON|$, $|OB| > |ON|$ и теоремы Пифагора вытекает, что $|AK| > |KN|$ и $|BL| > |LN|$. После этого мы можем сделать вывод о расположении точек A и B. Если предположить, что точка A лежит на луче $[NK)$, а точка B – на луче $[NL)$, то необходимо получается, что точка K лежит на отрезке NA, а точка L – на отрезке NB, то есть

$$|NA| = |NK| + |AK|; \ |NB| = |NL| + |BL| \quad \Longrightarrow \quad |NA| = |NB|.$$

Это противоречит условию задачи. Аналогично доказывается, что невозможен случай, когда точка A лежит на луче, дополнительном к $[NK)$, а точка B – на луче, дополнительном к $[NL)$. Будем полагать, что A лежит на луче $[NK)$, а B – на луче, дополнительном к $[NL)$. Тогда $|NA| = |NK| + |AK|$, $|NB| = |BL| - |NL|$, и в силу того, что $|NK| = |NL|$, $|AK| = |BL|$, мы находим

$$|NA| + |NB| = |AK| + |BL| \quad \Longrightarrow \quad |AK| = |BL| = \frac{a+b}{2}; \ |NK| = |NL| = \frac{a-b}{2}.$$

Теперь запишем теорему Пифагора для треугольников AOK и NOK:

$$\begin{cases} |OK|^2 = |OA|^2 - |AK|^2; \\ |OK|^2 = |ON|^2 - |NK|^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |OA|^2 - |AK|^2 = |ON|^2 - |NK|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |ON|^2 = |OA|^2 + |NK|^2 - |AK|^2 = c^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = c^2 - ab.$$

Случай, когда A лежит на луче, дополнительном к $[NK)$, а B – на луче $[NL)$, рассматривается аналогично.

Ответ. $|ON| = \sqrt{c^2 - ab}$.

Задачи

1. В треугольнике ABC угол BAC прямой, $|AB| = 1$, $|BC| = 3$. Точка K делит сторону AC в отношении $7:1$, считая от точки A. Что больше: $|AC|$ или $|BK|$?

2. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $|CD| = |CE| = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на 0,5. Известно, что $|AD| = \sqrt{10}$. Найдите длину гипотенузы AB.

3. В равнобедренном треугольнике длины высот, опущенных на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найдите длины сторон этого треугольника.

4. В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна c, а величина одного из его острых углов равна α. Найдите длину биссектрисы прямого угла этого треугольника.

5. В треугольнике ABC угол A прямой, $|AB| = 1$, $|BC| = 2$. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке L. G – точка пересечения медиан треугольника ABC. Что больше: $|BL|$ или $|BG|$?

6. В треугольнике ABC $|AB| = c$, $|BC| = a$, а медианы AD и CE взаимно перпендикулярны. Найдите длину стороны AC.

7. В треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна $\pi/6$. В треугольник вписана окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB.

8. В треугольнике ABC величина угла BAC равна $\pi/3$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, равна $\sqrt{3}$, а длина радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, равна 5. Найдите длины сторон треугольника ABC.

9. В прямоугольном треугольнике отношение длины радиуса вписанной окружности к длине радиуса описанной окружности равно $2/5$. Найдите величины острых углов треугольника.

10. В треугольнике ABC угол B тупой, продолжения высот AM и CN пересекаются в точке O, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \gamma$, $|AC| = b$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC.

11. В треугольнике, величина одного из углов которого равна разности величин двух других его углов, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найдите длину большей стороны треугольника.

12. В прямоугольном треугольнике KLM проведён отрезок MD, соединяющий вершину прямого угла KML с точкой D, лежащей на гипотенузе KL таким образом, что $|DL| = 1$, $|DM| = \sqrt{2}$, $|DK| = 2$. Найдите величину угла KMD.

13. В треугольнике ABC угол C прямой, катет BC разделён точками D и E на три равные части. Найдите сумму величин углов AEC, ADC и ABC, если известно, что $|BC| = 3|AC|$.

14. В прямоугольном треугольнике ABC расстояние от середины гипотенузы AB до катета BC равно 5, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4. Найдите площадь треугольника ABC.

15. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках P, Q и R. Найдите площадь треугольника PQR, если длины катетов треугольника ABC равны 3 и 4.

16. В треугольнике ABC угол C прямой, CD – высота. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 6 и 8 соответственно.

17. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, до его вершин A и B равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$ соответственно. Найдите длины катетов треугольника ABC.

18. В треугольнике ABC точка M расположена на стороне AC таким образом, что $|AM| : |MC| = 1 : 3\sqrt{3}$. Величина угла ABM равна $\pi/6$, $|BM| = 6$, угол B прямой. Найдите величину угла BAC.

19. Дан треугольник KLM. Через точки K и L проведена окружность, центр которой лежит на высоте LF, опущенной на сторону KM. Известно, что точка F лежит на стороне KM. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью, если $|KL| = 1$, $|KM| = \sqrt{3}/2$, $|FM| = \sqrt{3}/6$.

20. В прямоугольнике $ABCD$ длины отрезков AB и BD равны 3 и 6 соответственно. На продолжении биссектрисы BL треугольника ABD за точку L взята точка N такая, что отношение $|BL| : |LN|$ равно $10 : 3$. Что больше: длина отрезка BN или длина отрезка CL?

21. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой, AM – медиана, BH – высота. Найдите величину угла BAM, если известно, что величина угла между прямыми AM и BH равна φ. При каких φ задача имеет решение?

22. В треугольнике ABC угол C прямой, отношение длины медианы CM к длине биссектрисы CL равно $\sqrt{6} : 1$, длина высоты CH равна 2. Найдите площадь треугольника ABC.

23. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок ED соединяет середины сторон AB и BC. Точка F лежит на стороне BC, отрезки AF и ED пересекаются в точке M. Известно, что отношение площадей четырёхугольника $AMDC$ и треугольника ABC равно $7/10$, а длины катетов BC и AC равны a и b соответственно. Найдите длину отрезка AM.

24. В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана BM. Найдите $|BM|$, если известно, что $|BH| = h$, $\widehat{ABH} = \widehat{CBM}$, $\widehat{HBM} = 2 \cdot \widehat{CBM}$.

25. В треугольник ABC вписана окружность, длина радиуса которой равна 2; D – точка касания этой окружности со стороной AC, $|AD| = 2$, $|DC| = 4$. Найдите длину биссектрисы треугольника ABC, проведённой из вершины B.

26. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой, AL – биссектриса. Известно, что $|AC| = 5$, $|AL| = 5/\sqrt{3}$. Найдите $|LC|$.

27. Треугольники ABC и ABD имеют общую сторону AB и не имеют общих внутренних точек, углы BAC и ADB прямые. Найдите $|CD|$, если $|AD| = 3$, $|BC| = 13$, $|AC| + |BD| = 16$.

28. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Также известно, что основание D высоты CD лежит на стороне AB и $|AD| = |BC|$. Найдите длину стороны AC.

29. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 4, а длина катета AC равна 3. Точка D делит гипотенузу пополам. Найдите расстояние между центром окружности, вписанной в треугольник ACD, и центром окружности, вписанной в треугольник ABD.

30. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 20, а длина диаметра описанной около него окружности равна 25. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.

31. Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведён луч, перпендикулярный гипотенузе и пересекающий один из его катетов. На этом луче отложен отрезок DE, длина которого равна половине длины отрезка AB. Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

32. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC – в точке E, причем длина отрезка DE равна 2, а длина отрезка BE равна 1. На гипотенузе взята точка F так, что $|BF| = 1$. Известно также, что величина угла FCB равна α. Найдите площадь треугольника ABC.

33. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности, длина радиуса которой равна 10. Вершина C лежит на диаметре этой окружности, параллельном гипотенузе. Градусная мера угла CAB равна 75°. Найдите площадь треугольника ABC.

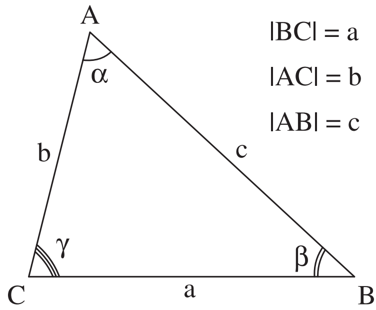
34. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в этот треугольник, до его высоты, проведённой к гипотенузе.

35. Середины высот треугольника лежат на одной прямой. Какое максимальное значение может принимать его площадь, если длина его наибольшей стороны равна 10?

1.2. Теоремы синусов и косинусов

Теоретический материал

Во всех материалах этого параграфа будут использоваться следующие обозначения: a, b, c – длины сторон произвольного треугольника, α, β, γ – величины соответствующих противоположных им углов, p – полупериметр треугольника, R – длина радиуса описанной около треугольника окружности, r – длина радиуса вписанной в треугольник окружности, h_a, h_b, h_c – длины высот, проведённых к сторонам, длины которых равны a, b и c соответственно.



Приведем некоторые базовые факты, касающиеся общих треугольников. Часть из них приводится без доказательства, поскольку их подробное обоснование можно найти в любом школьном учебнике геометрии.

1. Различные формулы площади произвольного треугольника

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c,\quad S = p\cdot r,\quad S = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R},$$

$$S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\ \text{(формула Герона).}$$

2. Теорема синусов

Отношение длины любой стороны треугольника к синусу величины внутреннего угла треугольника, противолежащего этой стороне, равно удвоенной длине радиуса окружности, описанной около этого треугольника:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Отметим, что теорема синусов является одним из наиболее часто используемых средств для решения задач на треугольники. Однако для нахождения величины угла треугольника лучше пользоваться теоремой косинусов. Это соображение можно пояснить так: с помощью теоремы синусов можно найти лишь синус величины угла треугольника, а вот однозначно найти эту величину нельзя, так как уравнение $\sin\alpha = a$ $(0 < a < 1)$ имеет два решения, лежащих в интервале $(0, \pi)$. То есть некоторому значению синуса величины угла треугольника соответствуют два угла, острый и тупой, сумма величин которых равна π.

3. Теорема косинусов

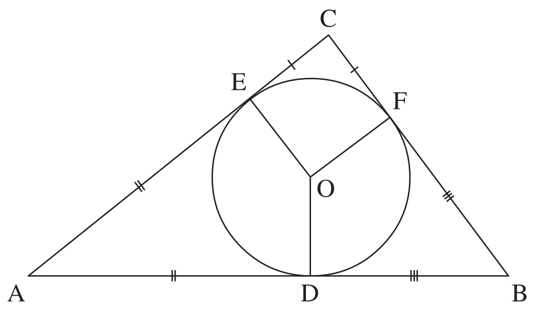
Квадрат длины любой стороны треугольника равен разности суммы квадратов длин двух других его сторон и удвоенного произведения длин этих сторон и косинуса величины внутреннего угла треугольника, заключенного между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

4. Окружность, вписанная в треугольник

В произвольный треугольник можно вписать окружность, причем только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника, причем всегда расположен внутри треугольника.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, буквой O обозначим центр вписанной в него окружности, буквами D, E и F обозначим точки, в которых она соответственно касается его сторон AB, AC и BC. Сформулируем и докажем важное утверждение, связывающее длины сторон треугольника ABC и длины отрезков, на которые они разбиты точками D, E и F.



Теорема. *Длина любого из отрезков, на которые стороны треугольника разбиваются точками их касания с вписанной в этот треугольник окружностью, может быть вычислена как разность полупериметра треугольника и длины стороны треугольника, не содержащей ни один из концов этого отрезка:*

$$|AD| = |AE| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2} = p_{\triangle ABC} - |BC|;$$

$$|BD| = |BF| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2} = p_{\triangle ABC} - |AC|;$$

$$|CE| = |CF| = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = p_{\triangle ABC} - |AB|.$$

Доказательство. Равенство длин пар отрезков AD и AE, BD и BF, CE и CF следует из равенства по гипотенузе и катету пар прямоугольных треугольников AOD и AOE, BOD и BOF, COE и COF соответственно. С учётом этого положим $|AD| = |AE| = x$, $|BD| = |BF| = y$, $|CE| = |CF| = z$ и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} |AB| = |AD| + |BD|, \\ |AC| = |AE| + |CE|, \\ |BC| = |BF| + |CF| \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |AB| = x + y, \\ |AC| = x + z, \\ |BC| = y + z \end{cases} \Longrightarrow$$

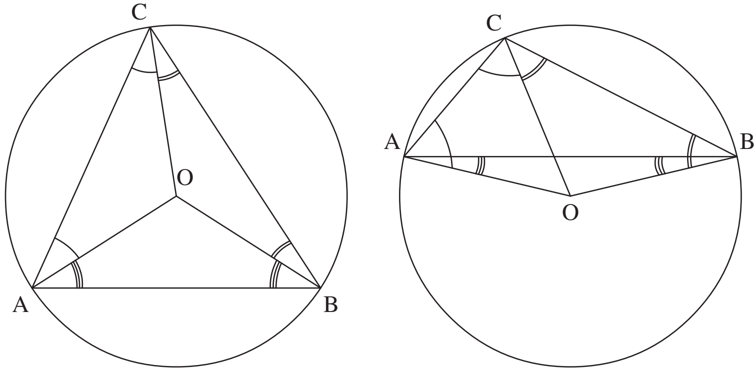
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \\ y = \dfrac{|AB| + |BC| - |AC|}{2}, \\ z = \dfrac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{|AB| + |AC| + |BC|}{2} - |BC|, \\ y = \dfrac{|AB| + |BC| + |AC|}{2} - |AC|, \\ z = \dfrac{|AC| + |BC| + |AB|}{2} - |AB|. \end{cases}$$

Теорема доказана.

5. Окружность, описанная около треугольника

Около произвольного треугольника можно описать окружность, причем только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, причем расположен вне треугольника, если треугольник тупоугольный, и внутри треугольника, если треугольник остроугольный.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, буквой O обозначим центр описанной около него окружности.



Теорема. *Величина угла, образованного стороной треугольника и радиусом описанной около этого треугольника окружности, проведённым в один из концов этой стороны, может быть вычислена как модуль разности числа $\pi/2$ и величины угла, противолежащего этой стороне*:

$$\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{ABC}\right|;\ \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{BAC}\right|;$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{ACB}\right|.$$

Доказательство. Поскольку OA, OB и OC – радиусы окружности, описанной около треугольника ABC, имеем $|OA| = |OB| = |OC|$, поэтому треугольники AOB, AOC и BOC равнобедренные. Из этого факта вытекает, что $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$, $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Введем обозначения $\widehat{OAC} = \varphi$, $\widehat{OBC} = \psi$, $\widehat{OAB} = \theta$ и рассмотрим два варианта.

Если треугольник ABC остроугольный, то точка O лежит внутри него и

$$\begin{cases} \widehat{OAB} + \widehat{OAC} = \widehat{BAC}, \\ \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = \widehat{ABC}, \\ \widehat{OCA} + \widehat{OCB} = \widehat{ACB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta + \varphi = \widehat{BAC}, \\ \theta + \psi = \widehat{ABC}, \\ \psi + \varphi = \widehat{ACB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB} - \widehat{ABC}}{2}, \\ \psi = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB} - \widehat{BAC}}{2}, \\ \theta = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{BAC} - \widehat{ACB}}{2}. \end{cases}$$

Наконец, с учётом того, что $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = \pi$, и того, что $\widehat{ABC} < \pi/2$,

$\widehat{BAC} < \pi/2$, $\widehat{ACB} < \pi/2$, мы получаем

$$\begin{cases} \widehat{OAC} = \varphi = \dfrac{(\pi - \widehat{ABC}) - \widehat{ABC}}{2} = \pi/2 - \widehat{ABC} = |\pi/2 - \widehat{ABC}|, \\ \widehat{OBC} = \psi = \dfrac{(\pi - \widehat{BAC}) - \widehat{BAC}}{2} = \pi/2 - \widehat{BAC} = |\pi/2 - \widehat{BAC}|, \\ \widehat{OAB} = \theta = \dfrac{(\pi - \widehat{ACB}) - \widehat{ACB}}{2} = \pi/2 - \widehat{ACB} = |\pi/2 - \widehat{ACB}|. \end{cases}$$

Если же треугольник ABC тупоугольный (будем считать, что угол C тупой), то точка O лежит вне треугольника, поэтому

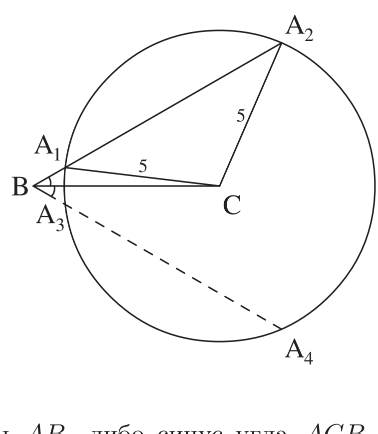
$$\begin{cases} \widehat{OAC} - \widehat{OAB} = \widehat{BAC}, \\ \widehat{OBC} - \widehat{OBA} = \widehat{ABC}, \\ \widehat{OCA} + \widehat{OCB} = \widehat{ACB} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \widehat{OAC} = \pi/2 - \widehat{ABC} = |\pi/2 - \widehat{ABC}|, \\ \widehat{OBC} = \pi/2 - \widehat{BAC} = |\pi/2 - \widehat{BAC}|, \\ \widehat{OAB} = \widehat{ACB} - \pi/2 = |\pi/2 - \widehat{ACB}|. \end{cases}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Эту теорему можно доказать и более простым способом, используя соотношения между величинами центральных и вписанных углов. Попробуйте сделать это самостоятельно.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. В треугольнике ABC дано $|BC| = 6$, $|AC| = 5$, $\widehat{ABC} = \pi/6$. Найдите площадь треугольника ABC, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше $1/\sqrt{2}$.



Р е ш е н и е. В этой задаче данным из условия задачи соответствуют **два** различных треугольника ABC. В самом деле, можно построить отрезок BC длины 6, отложить из точки B два симметричных относительно прямой BC луча, составляющих с лучом $[BC)$ угол величины $\pi/6$, и построить окружность с центром в точке C, длина радиуса которой равна 5. Точка A – одна из точек пересечения лучей и этой окружности. Таких точек будет, вообще говоря, четыре, но поскольку лучи симметричны, треугольники получатся тоже попарно симметричными. Так что **различных** треугольников будет все-таки два.

Для того чтобы найти площадь треугольника ABC, нам необходимо найти либо длину стороны AB, либо синус угла ACB. $|AB|$ найти попроще, для этого достаточно написать теорему косинусов:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{ABC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 25 = |AB|^2 + 36 - 12 \cdot |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad |AB|_{1,2} = 3\sqrt{3} \pm 4.$$

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

– на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
– для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
– сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Президент факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН ***Е. И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru