Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета Вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы пособия для 11-х классов по алгебре, геометрии, физике и информатике для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и экзаменам в вузы. В дальнейшем предполагается продолжить эту серию пособиями для 9-х классов для подготовки к ГИА.

По математике и физике вышли пособия двух уровней: базовый курс и курс, содержащий сложные задачи части С единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М. В. Ломоносова). Базовый курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач ЕГЭ частей А, В и некоторых задач части С, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Второе пособие содержит задачи, научившись решать которые, вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет значительно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу. **Второй особенностью** наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Директор учебного центра
факультета Вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

Предисловие

Предлагаемый «Углублённый курс» является естественным продолжением «Базового курса» по алгебре и предполагает свободное владение методами и приёмами из «Базового курса».

Задачи в разделах расположены по принципу *«от простого – к сложному»*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если вам не удалось получить правильный ответ или у вас возникли сомнения в правильности вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

При составлении пособия авторы придерживались спиралевидного принципа подачи материала: сначала предлагаются простые задачи по всем основным разделам математики и методы их решения, затем рассматриваются более сложные задачи, для решения которых требуются более сложные методы или их комбинации. Это позволяет не только закрепить, но и осмыслить на новом уровне уже пройденный материал. Такая схема обучения с успехом применяется на очных и дистанционных подготовительных курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения.

Запись (У) после номера задачи означает, что задача предлагалась на устном экзамене по математике в МГУ. Особо сложные задачи помечены звёздочкой.

Для задач письменного экзамена сначала идет сокращённое название факультета, затем – год, в котором была задача (если после года в скобках идет цифра 1 или 2, это значит, что эта задача была на весенней олимпиаде факультета – на мехмате и физфаке весной проходили две олимпиады; на ВМК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения – одна олимпиада весной). После точки идет номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМК-98.3) означает, что задача была в 1998 году летом на вступительных экзаменах на факультете ВМК, третьим номером в варианте, а (М/м-97(2).1) означает, что задача была в 1997 году на второй весенней олимпиаде механико-математического факультета первым номером в варианте.

Сокращения названий факультетов, принятые в данной книге

М/м – механико-математический факультет,
ВМК – факультет Вычислительной математики и кибернетики (.Б – отделение Бакалавров по прикладной математики, .И – отделение Бакалавров по Информационным технологиям),
Физ – физический факультет,
Хим – химический факультет,
ВКНМ – Высший колледж наук о материалах,
ФНМ – факультет наук о материалах (до 2000 года – ВКНМ),
Биол – биологический факультет,
Почв – факультет почвоведения,
Геол – геологический факультет (.ОГ – отделение общей геологии),
Геогр – географический факультет,
Экон – экономический факультет (.М – отделение менеджмента, .К – отделение экономической кибернетики, .В – вечернее отделение),
ВШБ – Высшая школа бизнеса,
Псих – факультет психологии,
Фил – философский факультет,
Филол – филологический факультет,
Соц – социологический факультет,
ИСАА – Институт стран Азии и Африки,
ФГУ – факультет государственного управления (отделение «Антикризисное управление»),
ЧФ – Черноморский филиал МГУ (г.Севастополь).

Используемые обозначения

$\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента a;
$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел;
$\cup$ – объединение; $\cap$ – пересечение; $\emptyset$ – пустое множество;
$\in$ – знак принадлежности; $\subset$ – знак включения подмножества;
$\forall$ – для любого; $A \backslash B$ – разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ – следовательно; $\Longleftrightarrow$ – тогда и только тогда;
ОДЗ – область допустимых значений;
$\begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$ – знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;
$\left[\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Теория и задачи

1. Элементы теории чисел

1.1. Целые числа. Делимость и остатки

Теоретический материал

При решении задач на целые числа необходимо знать следующие факты:

- любое натуральное число единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей) может быть представлено в виде произведения простых чисел;

- при делении натурального числа p на натуральное число q возможны[1] q различных остатков: $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$.

Полезно также помнить признаки делимости натуральных чисел:

- при делении на 5 и на 10 число даёт такой же остаток, как и последняя его цифра;

- при делении на 4, 25, 50 и на 100 число даёт такой же остаток, как и число, записанное двумя его последними цифрами;

- при делении на 3 и на 9 число даёт такой же остаток, как и сумма его цифр. Поэтому, если сумма цифр делится на 3 или на 9, то и само число делится на 3 или на 9.

Заметим, что при изучении делимости чисел достаточно работать не с самими числами, а с остатками от деления этих чисел. Все арифметические действия с остатками, кроме деления, повторяют действия с числами, а именно: при сложении чисел складываются остатки, при возведении в степень в эту степень возводятся остатки и т.д.

В задачах, где требуется установить, что какое-то выражение, зависящее от натурального числа n, делится или не делится при всех n на заданное натуральное число, часто используется следующий факт: произведение k последовательных натуральных чисел делится на k.

[1] Иногда бывает удобно рассматривать отрицательные остатки. Например, в качестве остатка при делении числа 15 на 8 можно использовать 7, а можно (-1).

Примеры решения задач

Пример 1. Остатки от деления на 3 чисел m и n равны 1 и 2 соответственно. Каковы остатки от деления на 3:
а) суммы $m+n$;
б) произведения $m \cdot n$?

Решение. Так как $m = 3k+1$, а $n = 3l+2$, то

$$m+n = 3k+3l+3 = 3\cdot(k+l+1).$$

Следовательно, $m+n$ делится на 3 нацело. Рассмотрим теперь произведение

$$mn = (3k+1)\cdot(3l+2) = 9kl+3l+6k+2 = 3(3kl+l+2l)+2,$$

то есть при делении на 3 произведения mn остаток равен 2.

Ответ. а) 0, б) 2.

Пример 2. Доказать, что для всех натуральных n выражение (n^3+3n^2+2n) делится на 6.

Решение. Так как $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$ – есть произведение трёх последовательных чисел, которое всегда делится и на 2, и на 3, то n^3+3n^2+2n делится на 6.

Пример 3. Дано число 2^{1995}. Найти
а) последнюю цифру этого числа,
б) остаток от деления на 7.

Решение. а) Представим исходное число в виде

$$2^{1995} = 2^{4\cdot 498+3} = 16^{498}\cdot 8.$$

Поскольку 16 в любой натуральной степени оканчивается на 6, а $6\cdot 8 = 48$, последняя цифра числа 2^{1995} равна 8.

б) Рассмотрим остатки степеней двойки от деления на 7:

- 2^1 при делении на 7 даёт остаток 2,
- 2^2 при делении на 7 даёт остаток 4,
- 2^3 при делении на 7 даёт остаток 1.

Эти остатки повторяются с периодом $T = 3$. Так как $1995 = 3\cdot 665$, то 2^{1995} при делении на 7 даёт остаток 1.

Ответ. а) 8, б) 1.

Задачи

1. Доказать, что число $n^5 - n$ делится на 30.
2. Доказать, что число $n^3 - 7n$ делится на 6.
3. Доказать, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каких целых n.
4. Сумма $m^2 + n^2$ делится на 3. Доказать, что она делится на 9.
5. Доказать, что число $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 24.
6. Доказать, что $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при нечётном n.
7. При каких натуральных n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 120?
8. Доказать, что сумма кубов трёх последовательных чисел делится на 9.
9. Цифры трёхзначного числа переписаны в обратном порядке. Доказать, что разность между исходным и полученным числом делится на 9.
10. Докажите, что $43^{43} - 17^{17}$ делится на 10.
11. Делится ли на 7 число $1991^{1917} + 1917^{1991}$?
12. Доказать, что для всех натуральных n выражение $\left(8^{2n-1} - 1\right)$ делится на 7.
13. Доказать, что $5^n - 3^n + 2n$ делится на 4.
14. Найти все натуральные n, при которых число $n \cdot 2^n + 1$ делится на 3.
15. Доказать, что число $\underbrace{11\ldots1}_{81}$ делится на 81.
16. Доказать признак делимости на 11: «число n кратно 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр с чередующимися знаками кратна 11».
17. При каких n число $M = \underbrace{1717\ldots17}_{2n\text{ цифр}}$ делится на 33?

1.2. Уравнения в целых числах

Теоретический материал и примеры решения задач

Приведём основные приёмы решения уравнений в целых числах.

- Разложение на множители с последующим перебором возможных вариантов.

  Пример 1. Решить в натуральных числах уравнение $2xy = x^2 + 2y$.

  Решение. $2xy = x^2 + 2y \iff y^2 - 2y = (x-y)^2 \iff$

  $$\iff (y-1)^2 - (x-y)^2 = 1 \iff (2y - x - 1)(x-1) = 1.$$

  Следовательно, оба множителя равны единице и $x = 2$, $y = 2$.

  Ответ. $(2; 2)$.

Пример 2. Решить в целых числах уравнение $2^x + 1 = y^2$.

Решение. Если $x < 0$, то $0 < 2^x < 1$ и $y^2 \notin \mathbb{Z}$. При $x = 0$ также $y \notin \mathbb{Z}$. Пусть $x > 0$, тогда $2^x = (|y| - 1)(|y| + 1)$, следовательно, $|y| - 1 = 2^p$, $|y| + 1 = 2^q$ и $0 \le p < q$. Откуда $2^q - 2^p = 2 \iff 2^p(2^{q-p} - 1) = 2$. Возможные варианты:

а) $\begin{cases} 2^p = 2, \\ 2^{q-p} - 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 1, \\ q - p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 1, \\ q = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 3, \\ x = 3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^p = 1, \\ 2^{q-p} - 1 = 2 \end{cases} \iff \emptyset.$

Ответ. $(3; 3)$, $(3; -3)$.

- Использование делимости целых чисел.

Пример 3. Доказать, что уравнение $y^2 = 5x^2 + 6$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y^2 - x^2 = 4x^2 + 6 \iff (y - x)(y + x) = 4x^2 + 6.$$

Так как правая часть уравнения является чётным числом, то и левая часть также должна быть чётным числом. Если $(y + x)$ чётно, то $(y - x)$ тоже чётно, и наоборот. Следовательно, левая часть уравнения делится на 4, но правая часть на 4 не делится. Значит уравнение не имеет решений.

- Использование оценок с последующим перебором возможных значений.

Пример 4. Решить в натуральных числах уравнение $2xy + 4z = zx^2 + 4y^2 z$.

Решение. Вынесем z за скобки:

$$z(x^2 + 4y^2 - 4) = 2xy.$$

Выражение в скобках не равно нулю, так как иначе $2xy = 0$, что неверно при $x, y \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$z = \frac{2xy}{x^2 + 4y^2 - 4}.$$

Так как $z \in \mathbb{N}$, то $z \ge 1$, то есть

$$\frac{2xy}{x^2 + 4y^2 - 4} \ge 1 \iff x^2 + 4y^2 - 4 - 2xy \le 0 \iff (x - y)^2 + 3y^2 \le 4.$$

Отсюда видно, что y не может быть больше 1, а при $y = 1$ получаем

$$(x - 1)^2 \le 1.$$

Следовательно, $x = 1$ либо $x = 2$.

Ответ. $(1; 1; 2)$, $(2; 1; 1)$.

- Рассмотрение остатков.

Пример 5. Решить в целых числах уравнение $11x + 7y = 3$.

Решение. Выразив y через x, получим $y = \dfrac{3 - 11x}{7}$. Представим x в виде

$$x = 7k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r = 0, 1, ..., 6.$$

Тогда $y = -11k + \dfrac{3 - 11r}{7}$. Для того чтобы y было целым, надо, чтобы $(3 - 11r)$ делилось на 7. В результате перебора всех значений $r = 0, 1, ..., 6$ оказывается, что подходит только $r = 6$. Следовательно, $x = 7k + 6$, $k \in \mathbb{Z}$, $y = -11k - 9$.

Ответ. $(7k + 6; -11k - 9)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. Решить в целых числах уравнение $xy + 1 = x + y$.
2. Решить в целых числах уравнение $x(x + 1) = y^2$.
3. Решить в целых числах уравнение $2x^2 + xy - y^2 - 7x - 4y = 1$.
4. Доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = 1982$ не имеет решений в целых числах.
5. Доказать, что уравнение $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ не имеет решений в целых числах.
6. Доказать, что уравнение $x^2 = 3y^2 + 17$ не имеет решений в целых числах.
7. Решить в целых числах уравнение $3^y = 1 + x^2$.
8. Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x - \dfrac{1}{5}} + \sqrt{y - \dfrac{1}{5}} = \sqrt{5}$.
9. Решить в целых числах уравнение $3(x - 3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$.
10. Решить в целых числах уравнение $x^2 - 4xy = 4y^2$.
11. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y$.
12. Решить в натуральных числах уравнение $xz + 4y = yx^2 + z^2y$.
13. Решить в натуральных числах уравнение $2^x - 3^y = 1$.
14. Решить в целых числах уравнение $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.
15. Решить в натуральных числах уравнение $3^x - 2^y = 1$.
16. Решить в натуральных числах уравнение $x + y + z = xyz$.
17. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

1.3. Смешанные задачи на целые числа

Теоретический материал

При решении смешанных задач пригодятся методы и приёмы решения задач на целые числа, приведённые в предыдущих разделах, а именно: разложение на множители с последующим перебором возможных вариантов, использование делимости целых чисел, рассмотрение остатков, использование оценок с последующим перебором возможных значений.

Также в этот раздел включены задачи, связанные с исследованием сократимости дробей вида $a(n)/b(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Существует несколько способов решения таких задач.

- Предполагается сократимость дроби на натуральное q, $q \neq 1$. Этот факт переписывается в виде двух равенств для числителя и знаменателя. Затем исключается исходная переменная n и получается равенство для q, из которого находятся возможные значения q.

- Заданная дробь $\dfrac{a(n)}{b(n)}$ представляется в виде
$$\frac{a(n)}{b(n)} = c(n) + \frac{d(n)}{b(n)},$$
где выражения $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ принимают целочисленные значения. Поскольку натуральное число k является общим делителем выражений $a(n)$ и $b(n)$ тогда и только тогда, когда оно является общим делителем выражений $d(n)$ и $b(n)$, вопрос о сократимости исходной дроби сводится к исследованию сократимости дроби $d(n)/b(n)$. В случаях, когда указанное представление исходной дроби является выделением целой части или когда $d(n)$ не зависит от n (то есть является целым числом), исследование сократимости новой дроби $d(n)/b(n)$ является, как правило, менее трудоёмким, чем исследование сократимости исходной дроби $a(n)/b(n)$.

Напомним также, что если числа a и b представлены в виде произведения простых множителей
$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{n_l}, \qquad b = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{m_l},$$
то наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) этих чисел вычисляются следующим образом:
$$\text{НОД}(a,b) = p_1^{\min(n_1,m_1)} \cdot p_2^{\min(n_2,m_2)} \cdot \ldots \cdot p_l^{\min(n_l,m_l)},$$
$$\text{НОК}(a,b) = p_1^{\max(n_1,m_1)} \cdot p_2^{\max(n_2,m_2)} \cdot \ldots \cdot p_l^{\max(n_l,m_l)}.$$

Замечание. $\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОК}(a,b) = a \cdot b$.

Примеры решения задач

Пример 1. При каких $n \in \mathbb{Z}$ выражение $\dfrac{3n+2}{n-1}$ является целым числом?

Р е ш е н и е. Так как $\dfrac{3n+2}{n-1} = \dfrac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \dfrac{5}{n-1}$, то исходное число будет целым, только если целым будет число $\dfrac{5}{n-1}$, что возможно при $n-1 \in \{\pm 5, \pm 1\}$.

О т в е т. $n = -4;\ 0;\ 2;\ 6$.

П р и м е р 2. Доказать, что дробь $\dfrac{n^2-n+1}{n^2+1}$ несократима ни при каком n.

Р е ш е н и е. Преобразуем исходную дробь

$$\frac{n^2-n+1}{n^2+1} = 1 - \frac{n}{n^2+1}.$$

Если сократима дробь $\dfrac{n^2-n+1}{n^2+1}$, то сократима дробь $\dfrac{n}{n^2+1}$. Если сократима дробь $\dfrac{n}{n^2+1}$, то сократима дробь $\dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n}$ и сократима дробь $\dfrac{1}{n}$, что неверно. Следовательно, исходная дробь несократима.

П р и м е р 3. При каких натуральных n число n^4+4 простое?

Р е ш е н и е. Так как

$$n^4+4 = n^4+4n^2+4-4n^2 = (n^2+2)^2-4n^2 = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2),$$

то n^4+4 – простое число, только если $n^2+2n+2=1$ или $n^2-2n+2=1$. Первое уравнение решений в натуральных числах не имеет. Решением второго уравнения является $n=1$, в этом случае выражение n^4+4 равно 5, то есть является простым числом.

О т в е т. $n=1$.

П р и м е р 4. Является ли полным квадратом число $M = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ цифр}}$?

Р е ш е н и е. Так как $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ цифр}} = \dfrac{10^n-1}{9}$, то

$$M = \frac{10^{2n}-1}{9} - 2\cdot\frac{10^n-1}{9} = \frac{10^{2n}-2\cdot10^n+1}{9} = \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2.$$

Так как 10^n-1 делится нацело на 3, то исходное число является полным квадратом.

О т в е т. Да.

Задачи

1. Определить p, если p, $p+10$, $p+14$ – простые числа.

2. Числа p и q – простые, $p, q > 3$. Доказать, что $p^2 - q^2$ делится на 24.

3. При каких целых q существует целое решение уравнения $x^3 + 2qx + 1 = 0$?

4. Доказать, что если две положительные несократимые дроби в сумме равны 1, то их знаменатели равны.

5. Доказать, что число $n^4 + 64$ составное при любом $n \in \mathbb{N}$.

6. Доказать, что число $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ является точным квадратом при любом натуральном n.

7. Покажите, что всякое нечётное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

8. Доказать, что $2^{3^{1995}} + 3^{1995^3}$ – составное число.

9. Доказать, что если число n не является степенью двойки, то число $k^n + l^n$ – составное (n, k, l – натуральные числа; $n, k, l > 1$).

10. Известно, что a, b, c – целые числа и $a + b = c$. Доказать, что $a^4 + b^4 + c^4$ есть удвоенный квадрат целого числа.

11. Пусть p и q – два последовательных простых числа. Может ли их сумма быть простым числом?

12. Сумма $k^2 + m^2 + n^2$ делится на 4. Доказать, что числа k, m, n – чётные.

13. Найти все целые n, при которых дробь $\dfrac{22n+3}{26n+4}$ сократима.

14. Доказать, что дробь $\dfrac{2n^2-1}{n+1}$ несократима ни при каком n.

15. При каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3}$?

16. Доказать, что число, состоящее из n $(n > 1)$ одинаковых цифр, не является точным квадратом.

17. Могут ли числа $11, 12, 13$ быть членами, не обязательно последовательными, одной геометрической прогрессии?

18. Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}} = y$ (всего 1992 знаков корня).

1.4. Рациональные и иррациональные числа

Теоретический материал

Рациональным числом называется действительное число, представимое в виде несократимой дроби p/q, где p – целое число, q – натуральное число.

Иррациональным числом называется действительное число, непредставимое в виде несократимой дроби p/q.

Замечание 1. Любое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби, а любое иррациональное число — в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Замечание 2. Сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел всегда является рациональным числом. Сумма, разность, произведение и частное двух иррациональных чисел может оказаться как рациональным, так и иррациональным числом.

Доказательство иррациональности числа, как правило, проводится от противного. Предполагается, что заданное число можно представить в виде несократимой дроби, после чего полученное равенство с помощью алгебраических преобразований приводится к уравнению в целых числах, не имеющему решений.

Утверждение 1. Если числа $x, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, а $y = \sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$, то y – иррационально.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $y = \sqrt[n]{x} = \dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь, тогда $\dfrac{p^n}{q^n} = x$. Пусть q_1 – делитель числа q и q_1 – простое число. Так как p^n делится на q^n, то p делится на q_1. Следовательно, дробь $\dfrac{p}{q}$ сократима на q_1, а это противоречит нашему предположению. Значит, y иррационально.

Утверждение 2. Если у натуральных чисел $k, n \neq 1$ есть несовпадающие простые множители, то $\log_k n$ – число иррациональное.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\log_k n = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, и пусть k делится на $l \in \mathbb{N}$, а n не делится. Тогда $k^{p/q} = n \iff k^p = n^q$, что невозможно, так как одна часть равенства делится на l, а другая – нет.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать иррациональность числа $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Решение. Пусть $\sqrt{5} - \sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$. Тогда $r^2 = 8 - 2\sqrt{15}$ и, следовательно, $\sqrt{15} = \dfrac{8 - r^2}{2} \in \mathbb{Q}$. Но $\sqrt{15}$ иррационально согласно утверждению 1. Значит наше предположение о том, что $\sqrt{5} - \sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$, неверно.

Пример 2. Доказать, что число $\sin 10^\circ$ иррационально.

Решение. Из формулы синуса тройного угла получим

$$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \sin 10^\circ = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\sin^3 10^\circ.$$

Предположим, что $\sin 10^\circ$ – рациональное число, то есть $\sin 10^\circ = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь. Тогда

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\cdot\frac{p^3}{q^3} \quad \Longleftrightarrow \quad 6pq^2 = q^3 + 8p^3.$$

Из последнего равенства следует, что q – чётное, то есть $q = 2n$. Тогда

$$3pn^2 = n^3 + p^3 \quad \Longleftrightarrow \quad n^2(3p - n) = p^3.$$

Следовательно, $p^3 \,\vdots\, n^2$, а так как дробь $\frac{p}{q} = \frac{p}{2n}$ несократима, то $n = 1$. Поскольку полученное в этом случае уравнение для p

$$3p - 1 = p^3 \quad \Longleftrightarrow \quad p(3 - p^2) = 1$$

решений в целых числах не имеет, число $\sin 10^\circ$ нельзя представить в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$ и, значит, оно является иррациональным.

Пример 3. Доказать, что число $0,1010010001\ldots$ является иррациональным.

Решение. Пусть оно рациональное. Тогда в его десятичной записи есть период из k цифр. Но в записи числа сколь угодно далеко от начала встречаются k нулей подряд. Следовательно, в периоде содержатся одни нули, а это противоречит условию.

Задачи

1. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ иррационально.
2. Доказать, что число $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ иррационально.
3. Является ли рациональным число $\sqrt{3 - \sqrt{4 + \sqrt{12}}} + \sqrt{3 + \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$?
4. Один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найти p и q, если известно, что они рациональные.
5. Является ли рациональным число $\sin 25^\circ$?
6. Определить первые 4 знака после запятой у числа $\sqrt[7]{0,9999}$.
7. Решить в рациональных числах уравнение $2^x = 3^y$.

8. Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?

9. Доказать, что число $0,123456789101112...$ (после запятой выписаны все натуральные числа подряд) является иррациональным.

10. Доказать, что между любыми двумя различными иррациональными числами есть рациональное число.

11. Доказать, что $\cos 2^\circ$ – иррациональное число.

12. Доказать, что $\cos 1^\circ$ и $\sin 1^\circ$ – иррациональные числа.

13. Определить первый знак после запятой у числа $\sin 80^\circ$.

14. Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что $\left|\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} - a\right| < 1$.

15. Доказать, что уравнение $x^3+x^2y+y^3 = 0$ не имеет ненулевых рациональных решений.

1.5. Сравнение чисел

Теоретический материал

При решении задач этого раздела будут полезны следующие приёмы.

- В случае сравнения однотипных числовых выражений следует алгебраическими преобразованиями привести исходную задачу к сравнению двух целых чисел.

- При сравнении разнотипных числовых выражений a и b подбирают такое число c, которое сравнимо и с a, и с b. Например, для обоснования неравенства $a > b$ находят число c такое, что $a > c$ и $c > b$.

- Иногда бывает удобно ввести некоторую вспомогательную функцию $f(x)$ и заменить исходную задачу сравнения на сравнение значений функции $f(x)$ при заданных значениях аргумента.

Также могут оказаться полезными следующие неравенства:

- $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geq 2$, где $a \neq 0$ (оценка суммы двух взаимно обратных величин), равенство достигается при $a = \pm 1$;

- $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, где $x, y \geq 0$, равенство достигается при $x = y$ (среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического);

- $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

- $(1+x)^n \geq 1 + nx$, где $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}_0$ (неравенство Бернулли).

При сравнении логарифмов может быть полезным следующее утверждение.

Утверждение 1. $\log_n(n+1)$ при $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ убывает с ростом n.

Доказательство. Представим $\log_n(n+1)$ в виде

$$\log_n(n+1) = \log_n\left(\frac{n+1}{n}\cdot n\right) = \log_n\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1 = \log_n\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1.$$

Для строгого доказательства убывания первого слагаемого достаточно записать его в виде дроби

$$\log_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lg n},$$

где числитель убывает, а знаменатель возрастает. Таким образом, первое слагаемое убывает, а, следовательно, убывает и сумма. Что и требовалось доказать.

Примеры решения задач

Пример 1. Что больше: $\log_4 5$ или $\log_{1/2} 1/3$?

Решение. $\log_{1/2} 1/3 = \log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5$.

Ответ. $\log_4 5 < \log_{1/2} 1/3$.

Пример 2. Сравнить числа $\sqrt[200]{2}$ и $1,006$.

Решение. Составим формальное неравенство и возведём обе его части в степень 200:

$$2 \ \vee \ 1,006^{200}.$$

Оценим правую часть с помощью неравенства Бернулли:

$$(1+0,006)^{200} \geq 1 + 200\cdot 0,006 = 2,2.$$

То есть $1,006^{200} \geq 2,2 > 2$ и, следовательно, $\sqrt[200]{2} < 1,006$.

Ответ. $\sqrt[200]{2} < 1,006$.

Пример 3. Что больше: $\sin\cos 1^\circ$ или $\cos\sin 1^\circ$?

Решение. Покажем, что $\sin\cos 1^\circ < \cos 1^\circ < \cos\sin 1^\circ$.

1) Неравенство $\sin\cos 1^\circ < \cos 1^\circ$ следует из того, что в первой четверти $\sin x < x$.

2) Неравенство $\cos 1^\circ < \cos\sin 1^\circ$ выполняется потому, что $1^\circ > \sin 1^\circ$, а в первой четверти $\cos x$ убывает.

Ответ. $\sin\cos 1^\circ < \cos\sin 1^\circ$.

Замечание. Неравенство $\sin\cos x < \cos\sin x$ справедливо при всех x.

Пример 4. Сравнить числа $\log_2 5$ и $\sqrt{5}$.

Решение. Оба числа (проверьте самостоятельно) лежат на отрезке $[2;3]$. Сравним их с серединой отрезка, то есть с $\frac{5}{2}$:

$$\log_2 5 \ \vee\ \frac{5}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad 2\log_2 5 \ \vee\ 5 \quad\Longleftrightarrow\quad \log_2 25 \ <\ \log_2 32;$$

$$\sqrt{5} \ \vee\ \frac{5}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad 2 \ \vee\ \sqrt{5} \quad\Longleftrightarrow\quad 4 < 5.$$

Следовательно, числа $\log_2 5$ и $\sqrt{5}$ лежат на отрезке $\left[2\,;\ \frac{5}{2}\right]$. Сравним их с серединой этого отрезка, то есть с $\frac{9}{4}$:

$$\log_2 5 \ \vee\ \frac{9}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad 4\log_2 5 \ \vee\ 9 \quad\Longleftrightarrow\quad \log_2 625 \ >\ \log_2 512;$$

$$\sqrt{5} \ \vee\ \frac{9}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad 4\sqrt{5} \ \vee\ 9 \quad\Longleftrightarrow\quad 80 \ <\ 81.$$

Следовательно, $\log_2 5 > \frac{9}{4} > \sqrt{5}$.

Ответ. $\log_2 5 > \sqrt{5}$.

Пример 5. Доказать, что $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 2\sqrt[3]{3}$.

Решение. Возведём обе части неравенства в куб:

$$2 + 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{32} + 4 < 24 \quad\Longleftrightarrow\quad 3(2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}) < 18 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 3.$$

Обозначим $f(t) = t^2 + t - 3$, $t_0 = \sqrt[3]{2}$ и покажем, что $f(t_0) < 0$.

Неравенство $f(t) < 0$ справедливо при $t \in \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$. Докажем, что $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt[3]{2} < \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Поскольку $\sqrt[3]{2} > 0$, левое неравенства очевидно. Правое неравенство равносильно неравенству $2\sqrt[3]{2} < \sqrt{13} - 1$. Возведём обе части в куб:

$$16 < 13\sqrt{13} - 3\cdot 13 + 3\sqrt{13} - 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 56 < 16\sqrt{13} \quad\Longleftrightarrow\quad 7 < 2\sqrt{13},$$

так как после возведения в квадрат получим очевидное неравенство $49 < 52$. Следовательно, исходное неравенство также справедливо.

Задачи

1. Сравнить числа: $10^{\log_9 3}$ и $7^{\log_4 2}$.

2. Что больше: $\log_4 7$ или $\log_{1/3} 2$?

3. Что больше: $\log_{11} 12$ или $\log_{12} 13$?

4. Сравнить числа: $\log_2 \pi + \log_\pi 2$ и 2.

5. Что больше: $\log_2 5$ или $\log_3 5$?

6. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 2$?

7. Сравнить числа: $\log_{11} 119$ и $\log_{15} 227$.

8. Сравнить числа: $4^{\sqrt{\log_4 5}}$ и $5^{\sqrt{\log_5 4}}$.

9. Выяснить, что больше: 3^{40} или 4^{30}.

10. Что больше: $\sqrt[9]{9!}$ или $\sqrt[8]{8!}$?

11. Определить знак числа $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5$.

12. Какое из чисел больше: $\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1$ или $\dfrac{1}{2}$?

13. Какой знак имеет число $\lg(\operatorname{arctg} 2)$?

14. Что больше: $\dfrac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}$?

15. Что больше: $\sin 3$ или $\sin 3^\circ$?

16. Расположить в порядке возрастания числа: $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$, $\sin\dfrac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$.

17. Сравнить логарифмы: $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

18. Сравнить числа: $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

19. Что больше: $2^{\sqrt{3}}$ или $3^{\sqrt{2}}$?

20. Сравнить числа: $\sin 31^\circ$ и $\operatorname{tg} 30^\circ$.

21. Сравнить числа: $\operatorname{tg} 55^\circ$ и $1,4$.

22. Выяснить, что больше: $10^{\sqrt{11}}$ или $11^{\sqrt{10}}$.

23. Что больше: $\sqrt[3]{40} + 1$ или $\sqrt[3]{88}$?

24. Сравнить числа: $\log_2 14$ и $\sqrt{15}$.

25. Сравнить числа: $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

26. Сравнить два числа: $\dfrac{\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \ldots \cdot \log_3 80}{2\log_3 5 \cdot \log_3 7 \cdot \ldots \cdot \log_3 79}$ и 1.

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

– на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
– для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
– сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

*Президент факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН **Е. И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru