Steven G. Krantz

The Proof is in the Pudding

The Changing Nature of Mathematicial Proof

Springer

ОГЛАВЛЕНИЕ

Посвящается Джерри Лайонсу,
учителю и другу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Название этой книги не совсем уж легкомысленное[1]. Я так и слышу упреки, что правильно говорить «The proof of the pudding is in the eating», что нет никакого смысла во фразе «The proof is in the pudding». Однако так все говорят, и совершенно ясно, что при этом имеют в виду. Так же и с математическим доказательством. *Доказательство* в математике — психологический инструмент, предназначенный для убеждения некоего лица или аудитории в том, что некоторое математическое утверждение истинно. Структуру и язык для построения такого доказательства выбирает его автор, но оно должно быть скроено по меркам той аудитории, которая будет его воспринимать и оценивать. Поэтому не бывает «единственного» или «правильного», или «наилучшего» доказательства какого бы то ни было результата. Доказательство — часть ситуациональной этики: ситуации меняются, математические ценности и стандарты развиваются и эволюционируют, и именно таким изменчивым путем математика меняется и растет.

Эта книга об изменчивой и растущей природе математического доказательства. В ранней математике «истины» устанавливались эвристически и эмпирически. Основное внимание уделялось вычислениям. Почти не было теории, никакого формализма, и очень мало математических обозначений в том виде, как мы сейчас их понимаем. Поэтому те, кто желали изучить какие-либо математические вопросы, оказывались в невыгодном положении — им было сложно выражать свои мысли. Особенно сложно было формулировать общие утверждения о математических идеях. Практически невозможно было формулировать теоремы и доказывать их.

Хотя есть некоторые намеки на доказательства даже в табличках древнего Вавилона (таких как Плимптон 322) за 1800 до н. э., понятие доказательства возникло, видимо, только в Древней Греции. Самые ранние математические таблички содержали числа и элементарные вычисления. Из-за скудости текстов, дошедших до наших дней, мы не знаем, как это случилось, как кому-то пришло в голову, что некоторые из математических

[1] Оригинальное название книги «The proof is in the pudding» на русский язык можно перевести как «Доказательство в пудинге». Эта фраза получила популярность от другой: «The proof of the pudding is in the eating», т. е. «Чтобы распробовать пудинг, надо его съесть». Похоже, что автор афоризма неизвестен. Его использовали в качестве перевода похожего выражения на испанском языке: «al freír de los huevos lo verá» («увидишь, когда изжаришь яичницу»), автор этой фразы — Мигель Сервантес. — *Прим. перев.*

процедур требуют *логического обоснования*. И мы действительно не представляем, как возникло формальное понятие доказательства. «Республика» Платона уже содержит явное его описание. В «Физике» Аристотеля не просто обсуждаются доказательства, но изучаются тонкие различия в их методах. Многие древние греки, включая Евдокса, Теэтета, Фалеса, Евклида и Пифагора, либо использовали доказательства, либо ссылались на них. Протагор был софистом, работы которого признавал сам Платон. Его «Антилогии» были искусно сплетенными строгими рассуждениями, которые можно считать ростками доказательств.

Считается, что Евклид был первым, кто систематически использовал точные определения, аксиомы, строгие правила логики, чтобы сформулировать и *доказать* каждое утверждение (т. е. каждую теорему). Формализм Евклида, как и его методология, стал образцом — и даже для наших современников — для установления математических фактов.

Интересно, что математическая формулировка факта — это самостоятельная сущность, обладающая собственной ценностью и значимостью. А доказательство — это средство общения. Создатель или первооткрыватель нового математического результата хочет, чтобы другие тоже его приняли и в него поверили. В естественных науках (химии, биологии или физике, например) для этого используется специальный метод — *воспроизводимый эксперимент*[1)]. Для математика воспроизводимый эксперимент — это доказательство, которое может прочесть, понять и оценить другой человек.

Идея доказательства возникает в разных жизненных ситуациях, не только в математике. В суде юрист (адвокат или прокурор) должен установить истину с помощью принятых версий доказательств. Для криминального дела это означает «вне разумных сомнений», а для гражданского — что доводы одной стороны должны перевешивать доводы другой. К математическим доказательствам такое представление не приближается ни на йоту. В реальном окружающем нас мире нет формальных определений или аксиом; нет смысла устанавливать факты путем строгих интерпретаций. Адвокат использует, конечно же, логику. Скажем, «обвиняемый слеп и поэтому не мог вести машину в Каньон Топанга ночью 23 марта» или «обвиняемый неграмотен и поэтому не мог построить атомную бомбу, которая использовалась с целью…». Но главное орудие адвоката, конечно же, не логика, а *факты*. Адвокат приводит

[1)]Точнее, воспроизводимый эксперимент *с контролем*, поскольку аккуратный ученый сравнивает результаты своих экспериментов с некоторым стандартом или нормой. Это позволяет оценить результаты.

доводы, не допускающие разумных сомнений, собирая доказательства с решительным перевесом в пользу своего клиента.

В то же время в обычной, в повседневной речи тоже есть понятие доказательства, и оно тоже отличается от математического. Муж может сказать «Думаю, моя жена беременна», в то время как жена может это *знать наверняка*. Беременность — это не вневременный непреложный факт (вроде теоремы Пифагора), а факт «временный», который нарушится через несколько месяцев. Так что в этом контексте понятие истины отличается от того, что используется в математике, и методы проверки истинности тоже. В действительности здесь проявляется различие между знанием и уверенностью, которая никогда не играет формальной роли в математике.

В современном обществе «доказательств» для предъявления штрафа за превышение скорости нужно гораздо меньше, чем для обвинения в убийстве. Похоже, что еще меньше доказательств требуется для оправдания военных действий[1)]. Широкая панорама мнений о современном понятии доказательства — в самых разных контекстах — представлена в [NCBI]. Говорят (см. [MCI]), что в некоторых областях математики (таких как топология малой размерности) доказательство можно пересказать на языке жестов.

Французский математик Жан Лере (1906–1998) так пишет о системе ценностей в современной математике.

> …разные области математики нераздельны как части живого организма; как живой организм, математика должна постоянно создаваться заново; каждое поколение должно перестроить ее вновь — шире, больше и прекраснее прежней. Смерть математических исследований стала бы концом математического мышления, которое составляет структуру научного языка, и таким образом, концом нашей научной цивилизации. Поэтому мы должны передать нашим детям силу характера, моральные ценности и стремление к полной жизни.

Лере говорит нам, что математические идеи хорошо приживаются на новых местах и хорошо переносят проверку временем, потому что у нас есть такой строгий и проверенный стандарт для формулирования и записи идей. Это великая традиция, она стоит того, чтобы ее сохраняли.

В доказательстве есть и человеческий фактор, который нельзя игнорировать. Принятие новой математической истины — это социологический процесс. Это что-то, что происходит в математическом сообществе. Оно включает понимание, усваивание, обдумывание и обсуждение. Самые

[1)]Эти идеи раскрываются в [SWD]. К этой же теме относятся захватывающие статьи [ASC], [MCI]. Целый выпуск журнала Philosophical Transactions of the Royal Society, осень 2005 г., посвящен статьям такого рода. Все они были написаны в связи с конференцией в Британии, где стояли вопросы вроде тех, что обсуждаются в этой книге. См. также [PTRS].

выдающиеся математики иногда ошибаются и объявляют новые результаты, а потом выясняется, что *неизвестно*, как их доказать. В 1879 г. А. Кемпе опубликовал доказательство теоремы о четырех красках, и оно продержалось целых 11 лет, пока П. Хивуд не нашел фатальную ошибку в работе. Первая совместная работа Харди и Литтлвуда была заявлена на заседании Лондонского математического общества в июне 1911 г. Но она никогда не была опубликована, поскольку позднее они обнаружили ошибку в доказательстве. Коши, Ламе и Куммер — каждый из них в тот или иной момент своей карьеры полагал, что доказал Великую теорему Ферма. И каждый из них ошибался. Радемахер в 1945 г. думал, что опроверг гипотезу Римана. Его работа была даже опубликована в Time Magazine. Позднее Радемахеру пришлось отозвать свое утверждение, поскольку Зигель нашел ошибку. В этой книге мы изучаем социальную базу математических дисциплин, разбираемся, как во взаимодействии разных математиков и разных математических культур творится форма нашей науки. Математические ошибки исправляются, причем не формальной логикой, а другими математиками. Это один из краеугольных камней нашей науки[1)].

В самом начале XX в. Брауэр дал революционное доказательство своей теоремы о неподвижной точке, а спустя некоторое время решительно отрекся от доказательств от противного (по крайней мере в отношении доказательств существования, а результат о неподвижной точке был именно таким) и создал движение интуиционизма. Позднее эту программу поддержал Эррет Бишоп, и его работа Foundations of Constructive Analysis, написанная в 1967 г., была довольно заметной (переработанное издание, написанное в соавторстве с Дугласом Бриджесом, опубликовано в 1985 г.). Эти идеи представляют особенный интерес для специалистов в теории компьютерных наук, ведь значимость доказательств от противного в компьютерных науках небесспорна (несмотря даже на то, что в свое время Алан Тьюринг расшифровал код Энигмы, применив как раз идеи доказательства от противного в контексте вычислительных машин).

В последние тридцать лет или около того стало ясно, что мы переосмыслили и решительно расширили наше представление о доказательстве. В этом явлении важную динамичную роль сыграли компьютеры. Они могут делать сотни миллионов операций в секунду. Это открывает возможности для экспериментирования, вычисления и визуализации таких

[1)] Математики делают ошибки на каждом шагу. Почти всякая опубликованная статья по математике содержит ошибки. В книге [LEC] задокументировано много важных ошибок в математической литературе до 1935 г.

вещей, что были немыслимы полвека назад. Следует иметь в виду, что математическое мышление включает овладение понятиями и рассуждениями, в то время как компьютер — просто средство для манипулирования данными, это совершенно разные вещи. Непохоже (см. блестящую книгу Роджера Пенроуза «Новый ум короля»), что когда-либо компьютер сможет думать и доказывать математические теоремы так, как это делает человек. Тем не менее компьютер может предоставить ценную информацию и натолкнуть на идею. Он может изобразить для пользователя вещи, которые тот раньше представить себе не мог. Это ценный инструмент. В нашей книге мы уделим много места изучению роли компьютеров в современной человеческой мысли.

Размышляя о роли компьютеров в математике, уместно напомнить известную историю. Тихо Браге (1546–1601) был одним из величайших астрономов Возрождения. Он разработал научную процедуру, которая позволила ему создать обширную базу данных о движении планет. Его даровитый ученик Иоганн Кеплер (1571–1630) страстно желал получить доступ к этим данным, поскольку у него были идеи о том, как сформулировать математические законы, описывающие движение планет. И Браге, и Кеплер были целеустремленными людьми, однако их взгляды на очень многие вещи разнились. Браге опасался, что Кеплер воспользуется данными, чтобы подтвердить теорию Коперника о Солнечной системе (а именно, что в центре системы находится вовсе не Земля, а *Солнце*, — это представление противоречило христианской догме). Пока Браге был жив, Кеплер так и не получил доступа к его расчетам.

Однако в эту историю странным образом вмешалось провидение. Спонсор Тихо Браге передал ему остров, где тот построил обсерваторию и работал в ней. Поэтому Браге приходилось выполнять некоторые социальные обязанности — выказывать свою признательность и сообщать о достижениях. На одном приеме Браге выпил так много пива, что его мочевой пузырь лопнул, и он умер. Кеплер вступил с семьей Браге в торг за данные, которые ему были так нужны. Течение научной истории изменилось навсегда.

Кеплер *не использовал* ни дедуктивное мышление или рассуждение, ни аксиоматический метод, ни стратегии математических доказательств для вывода своих трех законов движения планет. Он просто всматривался в сотни страниц данных Браге о планетах и считал, считал, считал…

Примерно в то же время свою теорию логарифмов разрабатывал Джон Непер (1550–1617). Это замечательный инструмент вычислений, он мог бы резко упростить задачу Кеплера. Но тот не мог понять смысла логарифмов и отказался от них. Он не шел простым путем. Только вообразите себе, что мог бы сделать Кеплер, будь у него компьютер! Правда, он мог бы и от компьютера отказаться просто оттого, что не понял принципа работы процессора.

Мы говорим здесь о Кеплере и Непере потому, что эта история предвосхитила современные споры об использовании компьютеров в математике. Одни утверждают, что компьютер позволяет нам видеть (вычислительно и визуально) вещи, которых мы раньше не могли представить. А другие считают, что все эти вычисления, конечно, очень хороши и полезны, но не составляют математического доказательства. Похоже, что первые смогут снабдить вторых информацией, и так возникнет симбиоз, приводящий к серьезным результатам. Мы обсудим эти соображения в книге.

Давайте вернемся к изменениям, которые произошли в математике за последние тридцать лет и были отчасти обусловлены пришествием высокоскоростных компьютеров. Вот матрикул некоторых компонентов этого процесса.

- В 1974 г. Аппель и Хакен [APH1] объявили, что задача о четырех красках решена. Иначе говоря, получен ответ на вопрос о том, сколько нужно красок, чтобы раскрасить любую карту так, что соседние страны получаются разных цветов. Построенное доказательство потребовало 1200 часов работы суперкомпьютера в университете Иллинойса. Математическое общество было в замешательстве, ведь такое «доказательство» никто не мог изучить или проверить. Или хотя бы понять. До сих пор не существует доказательства теоремы о четырех красках, которое может быть изучено и проверено человеком.
- Со временем люди все более и более свыклись с использованием компьютеров в доказательствах. В первые дни своего существования теория вейвлетов (к примеру) зависела от оценок некоторых постоянных, а их можно было получить только с помощью компьютера. Оригинальное доказательство де Бранжа гипотезы Бибербаха [DEB2] опиралось на результат теории специальных функций, который тоже можно было проверить только на компьютере (позднее обнаружилось, что это результат Аски и Гаспера, который доказан традиционно).
- Развитие новых обучающих средств, таких как программное обеспечение The Geometer’s Sketchpad, многих, включая Филдсовского медалиста Уильяма Тёрстона, навело на мысль, что традиционные доказательства могут уступить дорогу экспериментированию, т. е. проверке тысяч или миллионов частных случаев на компьютере.

Так что приход компьютеров действительно изменил наш взгляд на то, что можно считать доказательством. Ведь смысл в том, чтобы убедить другого человека в том, что какое-то утверждение истинно. Очевидно, есть много разных способов сделать это.

Еще интереснее, возможно, некоторые новые социальные тренды в математике, приводящие к построению нестандартных доказательств (мы подробно обсудим их позднее).

- Одним из грандиозных предприятий математики XX в. стала классификация конечных простых групп. Даниэль Горенштейн из Ратгерского университета дирижировал этим процессом. Сейчас считается, что эта задача решена. Замечательно здесь то, что одна теорема потребовала усилий многих сотен ученых. «Доказательство» здесь — собрание сотен статей и работ, охватывающих период более 150 лет. Сейчас оно включает более 10 000 страниц, и его до сих пор подчищают и упорядочивают. Окончательная «запись доказательства» займет несколько томов, и нет никакой уверенности в том, что работающие сейчас эксперты проживут достаточно долго, чтобы увидеть результат своих усилий.
- Решение Томаса Хейлса задачи Кеплера об упаковке сфер во многом (как и решение задачи о четырех красках) опирается на компьютерные вычисления. Особенно интересно, что его доказательство вытеснило более раннее доказательство Ву Йи Хсианга, опирающееся на сферическую тригонометрию, *а не на компьютерные вычисления*. Хейлс допускает, что его «доказательство» нельзя проверить традиционным путем. Он организовал группу FlySpeck энтузиастов со всего света, чтобы построить процедуру проверки своих компьютерных аргументов.
- Про доказательство гипотезы Пуанкаре, построенное Григорием Перельманом, и про программу геометризации Тёрстона слышали все. В 2003 г. Перельман написал три статьи о том, как использовать теорию Ричарда Гамильтона о потоках Риччи, чтобы осуществить идею Тёрстона (она называется «программой геометризации») разбить трехмерное многообразие на части. У этого результата есть одно важное следствие — доказательство знаменитой гипотезы Пуанкаре. Хотя статьи Перельмана не совсем строгие и исчерпывающие, они исполнены воображения и глубоких геометрических идей. Эта работа подтолкнула бурную деятельность и спекуляции о том, как программу можно завершить и оценить. Джон Лотт и Брюс Кляйнер (из Мичиганского университета), Ганг Тиан (Принстон) и Джон Морган (Колумбия) предприняли огромные усилия, чтобы завершить программу Гамильтона—Перельмана, построить и записать настоящее доказательство, которое другие смогут изучить и проверить.

- Программа геометризации Тёрстона — это отдельная история. В начале 1980-х гг. он объявил, что получил результат о структуре трехмерных многообразий, по крайней мере, для некоторых важных подклассов многообразий, и знает, как его доказать. Классическая гипотеза Пуанкаре оказалась бы простым следствием из программы геометризации Тёрстона. Он написал множество работ [THU3] (объемом в целую книгу), а математический факультет Принстонского университета сделал их доступными по всему миру. Эти работы под общим названием The Geometry and Topology of Three-Manifolds [THU4] написаны увлекательно и захватывающе. Но написаны они довольно неформальным стилем, хотя содержат глубокую качественную математику. Их трудно понять и оценить.

Цель этой книги — изучить все идеи и направления, представленные выше. По дороге мы познакомим читателя с пластом культуры: кто такие математики, что их заботит и чем они занимаются. Мы расскажем, почему математика важна и почему так сильно влияет на сегодняшний мир. Мы надеемся, что читатель не только познакомится, но и будет очарован этой древней прославленной наукой и почувствует, как много еще предстоит узнать.

Декабрь, 2010

Стивен Кранц,
Сент-Луис, Миссури

БЛАГОДАРНОСТИ

Очень приятно быть вхожим в писательскую среду — всегда можешь получить толковые замечания и помощь от коллег. Я благодарен Джессу Алама, Давиду Бейли, Джону Блэнду, Джонатану Боруайну, Роберту Беркелю, Давиду Коллинзу, Брайану Дэйвису, Кейту Девлину, Эду Данну, Майклу Иствуду, Джерри Фолланду, Гопалкришне Гадияру, Джереми Грэю, Джеффу Лагариасу, Барри Мазуру, Роберту Стричарцу, Эрику Тресслеру, Джеймсу Уолкеру, Рассу Вудруфу и Дорону Цайлбергеру за то, что они внимательно прочитали черновой вариант моей книги и поделились своими знаниями и мудростью. Роберт Беркель и Давид Коллинз вычитали рукопись особенно тщательно и внесли много полезных идей и исправлений. Большое спасибо Эду Данну из Американского математического общества — он предложил тему книги и вдохновил меня на ее написание. И конечно же, я благодарю Сидни Харриса за любезное разрешение использовать его рисунки.

Анна Костант — редактор из издательства Birkhäuser/Springer — как всегда, была очень активна и помогала мне во всем. Это она предложила написать книгу для серии Copernicus, давала замечательные советы и поддерживала в ходе работы над книгой. Другой редактор, Эдвин Бешлер, помог мне отточить и оживить стиль. Давид Крамер — неизменно превосходный корректор. Я горжусь результатом нашей работы. И наконец, я благодарен Рэнди Руден за ее помощь и поддержку во время работы над книгой.

Глава 1

ЧТО ТАКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И С ЧЕМ ЕГО ЕДЯТ?

The proof of the pudding is in the eating.

— Мигель Сервантес

В математике нет настоящих противоречий.

— Карл Фридрих Гаусс

Логика — это искусство ошибаться, будучи уверенным в своей правоте.

— Джозеф Вудкратч

Чтобы проверить человека, доводы плывут.

— Роберт Браунинг

Ньютон был очень счастливым человеком, ведь Вселенная только одна, а он, Ньютон, смог открыть ее законы.

— Пьер-Симон Лаплас

Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и поведал нам на языке математики.

— Иоганн Кеплер

Терьер может не суметь дать определение крысы, но узнает ее, когда увидит.

— А. Е. Хаусман

1.1 КТО ТАКОЙ МАТЕМАТИК?

Как-то раз я услыхал, как благонамеренная мамаша рассказывала своему малышу, что математик — это человек, который занимается «научной арифметикой». А есть люди, которые полагают, что математик — это тот, кто целыми днями не отрывается от компьютера.

Нельзя сказать, что такие представления совсем уж неверны, однако они даже близко не подходят к сути такого явления, как математик. Перефразируя слова математика и лингвиста Кита Девлина [DEV1], мы замечаем, что математик — это тот, кто

- наблюдает и интерпретирует явления;
- анализирует научные явления и информацию;
- формулирует концепции;
- обобщает концепции;
- проводит рассуждения по индукции;
- проводит рассуждения по аналогии;
- прибегает к методу проб и ошибок (и оценивает их);

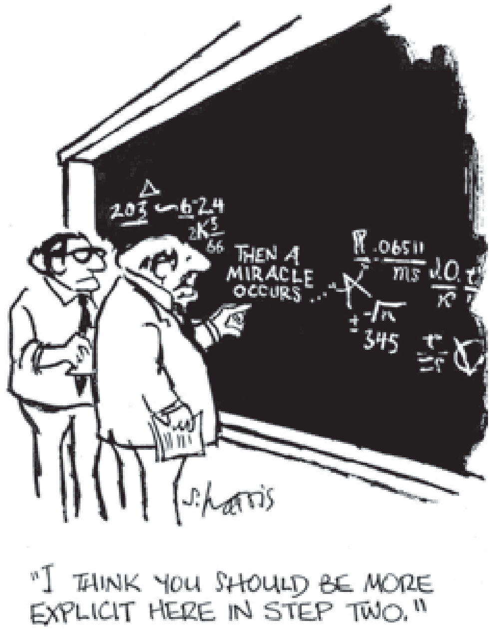

Рис. 1.1. («Я думаю, шаг 2 нужно описать подробнее»
© Sidney Harris, `www.sciencecartoonsplus.com`)

- моделирует идеи и явления;
- формулирует задачи;
- абстрагируется от задач;
- решает задачи;
- пользуется вычислениями, чтобы делать аналитические выводы;
- делает дедуктивные выводы;
- строит догадки;
- доказывает теоремы.

И даже этот список неполон. Математик должен в совершенстве владеть критическим мышлением, анализом, дедуктивной логикой. Эти умения универсальны, они могут применяться в самых разных ситуациях и в самых разных областях знания. В наше время математические умения широко используются в медицине, физике, юриспруденции, коммерции, интернет-дизайне, техническом проектировании, химии, биологии, социальных науках, антропологии, генетике, производстве оружия, криптографии, пластической хирургии, анализе безопасности, обработке данных, компьютерных и многих других науках и практических приложениях.

Одно из поразительных и бурных приложений математики возникло всего каких-то двадцать лет назад — это финансовая математика. Работа Фишера Блэка из Гарварда и Мирона Сколеса из Станфорда привела к первому методу установления цены на опционы. Найденный метод базируется на теории стохастических интегралов — разделе абстрактной теории вероятностей. В результате во всем мире инвестиционные фирмы стали нанимать в штат докторов наук по математике. Когда на математических факультетах преподают курс теории меры — раньше его слушали исключительно для того, чтобы сдать экзамен на научную степень, — приходит удивительно много слушателей, в основном студенты экономико-финансовых специальностей.

Математика очень повлияла и на другую область современной науки, в которой работает значительное число математиков с очень высоким уровнем образования, — это генетика и проект «геном». Многие люди до сих пор не осознают, что спираль ДНК может включать миллиарды генов. Находить соответствия генетических маркеров — вовсе не то же самое, что искать пару для носка; приходится привлекать вероятностные соображения. Поэтому над проектом «геном» работает много математиков с ученой степенью.

В этой книге мы будем работать над понятием *математического доказательства*. Хотя большинство математиков проводят немного времени за доказательством теорем[1)], однако доказательство — это lingua franca математики. Это связующая нить, которая собирает все воедино. Именно доказательство вдыхает в математику жизнь и гарантирует бессмертие математическим идеям (см. [CEL], где понятие доказательства рассматривается с философской точки зрения).

Нет ни одной другой естественнонаучной или аналитической дисциплины, где доказательство использовалось бы с такой же готовностью и привычкой, как в математике. Это орудие делает теоретическую математику особенной: проложенная с тщанием дорога, которая следует строгим аналитическим правилам и неуклонно ведет к определенному выводу. Доказательство — это наше орудие для установления абсолютной и безупречной истинности математических утверждений. Именно поэтому мы можем опираться на математику Евклида, созданную 2300 лет назад, с той же готовностью, что и на современную. Ни в одной другой дисциплине это невозможно (хотя много интересного по этому вопросу можно найти в разд. 1.10).

[1)] Это объясняется тем, что очень много математиков работают не в университетах. Вместо этого они работают (например) в NSA (Агентство национальной безопасности) или NASA (Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства), или Hughes Aircraft, или Lawrence Berkeley Labs, или в Microsoft. Широко распространено мнение, что большинство специалистов в математических науках — ненастоящие математики, но так думают не все.

В нашей книге мы познакомим читателя с математиками и их занятиями, используя понятие «доказательства» как пробный камень. По пути мы познакомимся с причудами и характерными чертами некоторых математиков и их профессии в целом. Это захватывающее путешествие, сулящее много удовольствий и сюрпризов.

1.2 ПОНЯТИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Мы начнем обсуждение с вдохновенной цитаты математика Майкла Атья (р. 1929) [ATI2]:

> Мы все знаем, что нам нравится в музыке, живописи или поэзии, а вот объяснить, почему нам это нравится, гораздо сложнее. То же самое относится и к математике, которую отчасти тоже можно назвать формой искусства. Можно составить длинный список желательных качеств: красота, изящество, важность, оригинальность, польза, глубина, широта, краткость, простота и ясность. Однако отдельно взятая работа вряд ли может сочетать их все; более того, некоторые из них несочетаемы. Как в сонатах, квартетах или симфониях приемлемы разные качества, точно так же и математические сочинения разных типов требуют разных подходов. Полезную аналогию представляет собой и архитектура. Собор, дворец или замок требуют совершенно разных выразительных средств, нежели офисное здание или жилой дом. Здание привлекает нас тем, что в нем соразмерно сочетаются качества, соответствующие его цели, но в конце концов наша эстетическая оценка инстинктивна и субъективна. Лучшие критики часто несогласны друг с другом.

Математика имеет длинную и славную историю. Наряду с философией она относится к старейшей точке приложения человеческого интеллектуального интереса. Человеческой природе присуще стремление понять

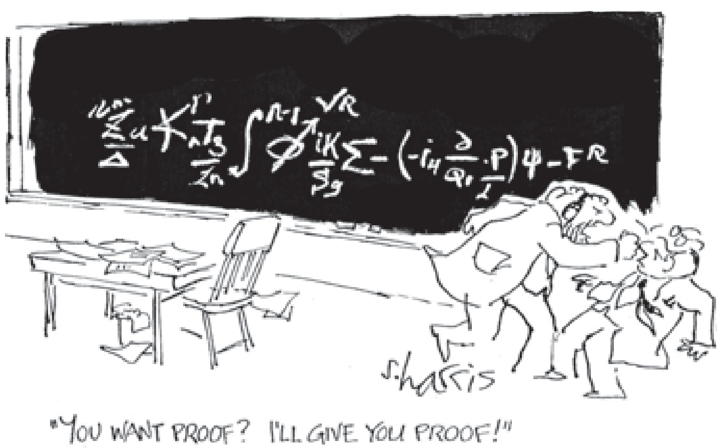

Рис. 1.2. («Вы хотите доказательство? Я Вам дам доказательство!» © Sidney Harris, `www.sciencecartoonsplus.com`)

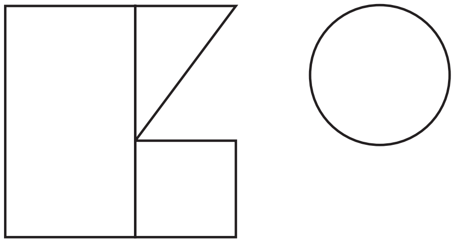

Рис. 1.3. Вопросы землемерия

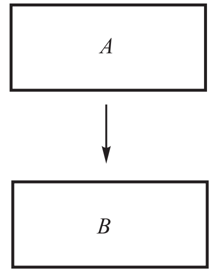

Рис. 1.4. Логический вывод

окружающий мир, и математика — естественный проводник на этом пути. Но для древних математика была прекрасна и ценна сама по себе; схоластическое стремление обладало внутренней ценностью и эстетической привлекательностью. Математику стоило изучать ради нее самой.

С самых первых дней математика была ограничена практическими вопросами. Египтян, как и греков, заботили вопросы землемерия (см. рис. 1.3). Естественным образом рождались геометрические и тригонометрические задачи. В них возникали треугольники и прямоугольники, так что ранние геометрии занимались этими объектами. Естественно было рассматривать и окружности — для проектирования арен, водных резервуаров и тому подобных объектов. Поэтому античная геометрии (и аксиомы Евклида для нее) имела дело с окружностями.

Ранняя математика была феноменологичной. Если можно было сделать разумное изображение, оно считалось достаточным подтверждением математического «факта». Иногда рассуждали по аналогии или призывали на помощь богов. Представление о том, что математическое утверждение может быть *доказано*, не было еще развитой идеей. Не было стандартов понятия доказательства. Аналитическая структура — «правила игры» — еще не была создана. Если бы один древний египтянин сказал другому: «Я не понимаю, почему это математическое утверждение верно. Пожалуйста, докажи его,» — такое требование было бы невозможно понять. Понятие доказательства не входило в активный словарь математиков того времени.

Итак, что же такое доказательство? Если подходить эвристически, доказательство — это такой инструмент риторики, который используется, чтобы один человек убедил другого, что некоторое математическое утверждение верно. А как это можно сделать? Поразмыслив, можно предположить, что естественный способ доказать, что что-то есть новое (назовем его B) — это как-то связать его с чем-то старым (назовем его A), про которое уже известно, что оно истинно. Таким образом, возникает понятие *вывода* нового результата из старого (см. рис. 1.4). И тогда возникает вопрос:

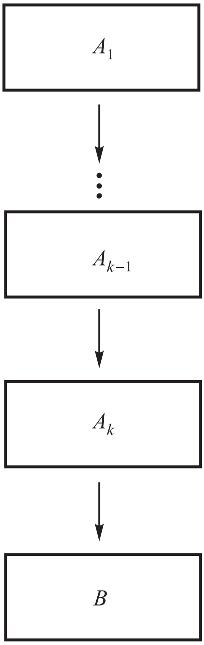

Рис. 1.5. Последовательность логических выводов

«Как была установлена истинность старого результата?» Если повторять эту процедуру, то мы придем к последовательности логических выводов, вроде изображенной на рис. 1.5. Неизбежно придется поинтересоваться, где же начало этой цепочки, — а это фундаментальный вопрос.

Мы не можем сказать, что у такого пути рассуждений нет начала, что он тянется бесконечно далеко к туманному началу времен. Ведь в таком случае становятся безосновательными наши размышления о том, каким следует быть доказательству. Мы пытаемся подтвердить новые математические факты, исходя из старых. А если вывод уходит бесконечно далеко в прошлое, мы не можем даже ухватить, на чем изначально обоснована наша логика.

Эти вопросы заставили античных математиков размышлять о природе математического доказательства. Фалес (640–546 до н. э.), Евдокс (408–355 до н. э.) и Теэтет Афинский (417–369 до н. э.) формулировали теоремы как формальные объявления некоторых идей, которые они хотели провозгласить как факты или истины. Считается, что Фалес доказал некоторые из этих теорем в геометрии (а позднее они были включены в более широкую систему Евклидом). *Теорема* — это формальное провозглашение математиком некоторого факта или истины. Но Евдоксу не удалось найти способ доказать свои теоремы. Его труды имели явный практический уклон, и он слишком увлекался вычислениями.

Впервые нынешний способ размышлять о математике был формализован Евклидом Александрийским. Вначале он дал определения, затем аксиомы, а потом уже теоремы — именно в таком порядке. Нельзя не согласиться, что Евклид создал парадигму, которой следовали все математики на протяжении 2300 лет. Это была правильная математика. Чтобы справиться с проблемой бесконечных логических цепочек, мы, следуя Евклиду, начнем с того, что примем набор *определений* и набор *аксиом*.

Что такое определение? Определение объясняет смысл какого-то термина, но даже с таким простым подходом связаны аналитические проблемы. Взять хотя бы первое определение, которое мы собираемся сформулировать. Предположим, что мы хотим определить *прямоугольник*. Это будет первый термин в нашей математической системе. Какие слова мы можем использовать? Скажем, мы определяем прямоугольник через точки,

Рис. 1.6. (Урок чтения формул в Музее Математики
© Sidney Harris, `www.sciencecartoonsplus.com`)

прямые и плоскости. Неизбежно встают вопросы: что такое точка? что такое прямая? что такое плоскость?

Ясно, что наше *первое* определение (определения) должно быть сформулировано в терминах общепринятых слов, которые не требуют дальнейших объяснений. Аристотель (384–322 до н. э.) настаивал на том, что определение должно описывать определяемое понятие в терминах уже известных понятий. Часто это вызывает заметные трудности. Например, Евклид определял *точку* как нечто, не имеющее частей. При этом, чтобы объяснить точное математическое понятие «точка», ему пришлось использовать *нематематические слова*, относящиеся к повседневной речи.[1] Как только «точка» определена, этот термин можно использовать в других определениях. А затем можно пользоваться повседневным языком, не требующим дальнейших объяснений. Так мы строим систему определений.

Определения дают нам язык для занятий математикой. Мы формулируем наши результаты, или *теоремы*, пользуясь словами, введенными в определениях. Хотя нет, к теоремам мы еще не готовы — мы еще не установили краеугольный камень, на котором будет основана наша теория вывода. Нам нужны аксиомы.

---

[1] Среди тех, кто занимается основаниями математики, принято те понятия, которые определяются нематематическим языком (т. е. те, которые нельзя определить через другие математические термины), называть неопределяемыми. Так, к неопределяемым относится понятие «множество», которое мы обсудим позднее; а также «точка».

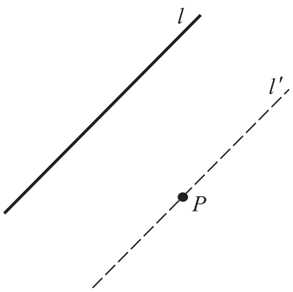

Рис. 1.7. Постулат о параллельных

Что такое аксиома? Аксиома[1] (или постулат[2]) — это математическое выражение факта, который считается самоочевидным, сформулированное с использованием терминологии, введенной в принятых определениях. Аксиомы не доказывают. Их считают данными, такими очевидными и заслуживающими доверия, что никаких доказательств для них не требуется.

Аксиомы можно использовать, чтобы объяснять основания. Это идеи в основании предмета исследования; их содержание считается ясным или самоочевидным. Подчеркнем еще раз: проверить утверждения аксиом нельзя. Они даются для удовольствия читателя; подразумевается, что они будут использованы далее для доказательства математических результатов. Одна из самых известных аксиом во всей математике — *постулат о параллельных Евклида*. Этот постулат (в формулировке Плейфэра[3]) утверждает, что если P — точка, а l — прямая, не проходящая через эту точку, то существует *единственная* прямая l', проходящая через точку P и параллельная l (рис. 1.7). Постулат о параллельных стал частью евклидовой геометрии 2300 лет назад. И больше двух тысяч лет было неизвестно, действительно ли это утверждение следовало объявить аксиомой. Нельзя ли его вывести из других четырех аксиом геометрии (подробный разбор аксиом Евклида проведен в разд. 2.2). Были предприняты невероятные усилия, чтобы построить такое доказательство, было сделано много знаменитых ошибок (историю этого вопроса см. в [GRE]). Но в 1820-х гг. Янош Бойяи и Николай Лобачевский установили, что постулат о параллельных доказать нельзя, и тому есть поразительная причина — существуют модели геометрии, в которых все остальные аксиомы Евклида выполняются, однако постулат о параллельных неверен. Так что этот постулат — одна из аксиом нашей самой привычной геометрии.

Вообще говоря, в любой области математики принято начинать с краткого перечисления определений и краткого списка аксиом. После того как

[1] Слово «аксиома» греческого происхождения, оно означает «что-то ценное».

[2] Слово «постулат» появилось в средневековой латыни, оно означает «называть» или «требовать».

[3] Джон Плейфэр (1748–1819) — геометр из Эдинбургского университета. Многие не отдают себе отчета, что евклидова геометрия, как мы знаем ее сегодня, — вовсе не та, что создавал Евклид. Плейфэр, Гильберт и многие другие поработали над тем, чтобы сделать ее более современной и последовательной.

они сформулированы, приняты и поняты, можно формулировать и доказывать теоремы. Доказательство может принимать много разных форм. Самая традиционная форма доказательства — точная последовательность утверждений, связанных между собой строгими правилами логики. Однако цель этой книги — выяснить и обсудить, какие еще формы может принимать доказательство. В наше время доказательство может (часто так и происходит) принимать традиционную форму, восходящую к Евклиду. Но приемов доказательства существует много: прямое доказательство, по индукции, перечисления, исчерпывания, по случаям, от противного — и это далеко не все. Доказательство может включать компьютерное моделирование. Или заключаться в построении физической модели. Или состоять из алгебраических вычислений с использованием программных пакетов Mathematica, Maple или MATLAB. Доказательство может сочетать различные перечисленные приемы.

Одна из основных задач этой книги — представить и изучить различные формы математического доказательства и роль, которую они играют в современной математике. Несмотря на многочисленные изменения и сдвиги в подходах к технике доказательства, эта фундаментальная методология остается краеугольным камнем в инфраструктуре математической мысли. Как уже было сказано, ключевая часть любого доказательства — какую форму оно бы ни принимало — логика. Но что такое логика? Это мы обсудим в следующем разделе.

Философ Карл Поппер полагал [POP], что *ничего* нельзя знать с абсолютной уверенностью. Он даже ввел доктрину фальсификационизма. В ее рамках научной может считаться только такая теория, для которой существует методологическая возможность ее опровержения.

Традиционная математика отвергает эту точку зрения. Считается, что математические утверждения, доказанные в соответствии с принятыми канонами математического вывода, неоспоримо верны. И такими останутся. Эта перманентная природа математики — уникальная черта, выделяющая ее из всех интеллектуальных деяний человека.

В статье [YEH] имеется поучительное обсуждение различных видов доказательства и их роли в нашем мышлении. Что же такое доказательство, почему оно важно и почему нам нужно продолжать строить доказательства?

1.3 КАК РАБОТАЕТ МАТЕМАТИК?

Мы все более-менее представляем себе работу мясника, врача или каменщика — мы *видели*, как эти люди практикуют свое ремесло. Нет сомнений или тайн относительно того, чем они занимаются.

С математиками все не так. Они могут работать без свидетелей и часто предпочитают уединение. Многие математики сидят в своих офисах или дома и неслышно размышляют. У одних есть любимые предметы, которыми они играют или манипулируют. Другие рисуют каракули. У кого-то есть дартс. Например, обладатель филдсовской медали Пол Дж. Коэн (1924–2007) частенько играл в дартс, представляя себе, что кидает дротики в своего брата (против которого его настраивали родители, воспитывая таким образом соревновательность в характере).

У некоторых математиков совершенно непредсказуемые и удивительные способы заниматься своим делом. Математик и физик Ричард Фейнман (1918–1988) любил размышлять о физике в стрип-клубе недалеко от Калтеха. Он бывал там каждый вечер. Когда у стрип-клуба возникли неприятности с законом, единственным уважаемым завсегдатаем (а среди них были доктора, адвокаты и даже священники), который не постеснялся свидетельствовать в пользу клуба, оказался Ричард Фейнман!

Лауреат Нобелевской премии по физике Стивен Вайнберг (р. 1933) работал над своими космологическими теориями во время просмотра телевизионных мыльных опер. Он абсолютно не мог обходиться без «As the World Turns», но у него были и другие любимые сериалы.

Хотя мы часто воображаем, что математик просто сидит и думает, в действительности все не так. Математики гуляют, играют в настольный теннис, поднимают тяжести, медитируют, разговаривают, читают лекции, участвуют в совещаниях и спорят. Они показывают свои незаконченные доказательства недоделанных утверждений в надежде получить помощь и довести результат до настоящей теоремы. Они прорабатывают идеи со своими студентами. Они ведут семинары, делают записи, публикуют планы исследований. Они ездят на конференции и разбрасываются идеями. Они слушают лекции[1)] коллег, читают и рыщут в Интернете. Они экспериментируют и вычисляют. Одни математики строят замысловатые компьютерные модели, а другие — физические. Мой учитель Фред

[1)] Как-то раз я смог решить задачу, которая давно не давала мне покоя, воспользовавшись идеей из лекции одного знаменитого французского математика, которая не была близка моей теме. Я даже не вполне могу рассказать, о чем именно была эта лекция, но один шаг в доказательстве натолкнул меня на идею.

Альмгрен любил окунать изогнутую проволоку в мыльный раствор и рассматривать, какие получаются мыльные пузыри. По-моему, годится все, что срабатывает. Если ты достигаешь цели, на самом деле не так важно, как ты туда добрался.

1.4 ОСНОВАНИЯ ЛОГИКИ

В наше время математическая логика имеет собственную ценность. Это развитая ветвь математики, как геометрия, дифференциальные уравнения или алгебра. Но для практикующих математиков логика — это краткий и доступный набор правил, которым подчинена жизнь.

Отец той логики, которую мы знаем сегодня — Аристотель (384–322 до н. э.). Его труд «Органон» заложил фундамент того, чем логика должна быть. Здесь мы рассмотрим некоторые из положений Аристотеля.

1.4.1 Закон исключенного третьего

Одно из правил логики Аристотеля заключается в том, что каждое разумное утверждение, ясное и непротиворечивое, должно быть либо истинным, либо ложным. Никакое утверждение не может быть чем-то «средним» или «с нерешенным статусом». Так, утверждение

Если на Марсе есть жизнь, то рыбы летают

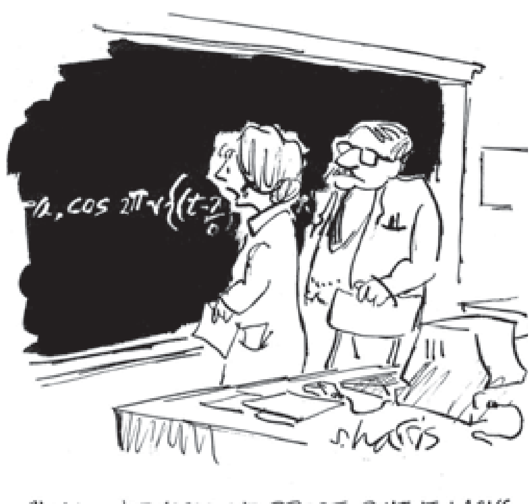

Рис. 1.8. («Это прекрасное доказательство, однако ему не хватает теплоты и чувственности» © Sidney Harris, `www.sciencecartoonsplus.com`)

истинно или ложно. Это утверждение может показаться легкомысленным или глупым. Нет никакой возможности проверить его, поскольку мы не знаем (и в ближайшем будущем так и не узнаем), есть ли жизнь на Марсе. Но у этого утверждения есть ясный смысл, так что оно должно быть либо истинным, либо ложным. Известно, что рыбы *не летают*[1]. Но истинность или ложность изучаемого утверждения мы установить не можем, так как не знаем, есть ли жизнь на Марсе.

Вы можете подумать: «Профессор Кранц, ваш анализ некорректен. Данному утверждению следует присвоить истинностное значение 'не решено'. Мы не знаем ничего про жизнь на Марсе, поэтому не можем определить, истинно ли утверждение. Возможно, через пару столетий что-нибудь прояснится, и нам удастся придать какое-то истинностное значение данному утверждению, но сейчас это сделать невозможно. Пока мы можем ограничиться только ярлыком 'не решено'».

Это интересное рассуждение, но в математике мы судим не с этой позиции. В математике мы считаем, что *Создателю* известно все — *Он* знает, есть ли жизнь на Марсе — и поэтому Ему, конечно, известно, истинно ли данное утверждение или ложно. То, что данный факт неизвестен нам, — лишь печальный артефакт нашей цивилизации. Но это не меняет основополагающего факта — *утверждение либо истинно, либо ложно*. Точка.

Для нас не так важно, что *существуют* версии логики, в которых допускаются функции истинности, принимающие много значений. В таких версиях утверждению может соответствовать не только одно из двух истинностных значений («истина» или «ложь»), допустимы и другие значения. Например, утверждение «Барак Обама — президент США» истинно в этот момент, когда я создаю данный текст, но оно не будет оставаться истинным вечно. Так что мы можем ввести специальное истинностное значение, которое будет фиксировать преходящую истину. В книге [KRA4] обсуждается многозначная логика. Но традиционно в математике используются только два истинностных значения: *истина* и *ложь*. Традиционная математика отвергает положение о том, что осмысленное утверждение может иметь нерешенный или преходящий истинностный статус.

1.4.2 Модус понендо поненс и его друзья

В этом месте мы хотели бы совершить с читателем краткий экскурс в терминологию и методологию математической логики. Это один из способов понять, как мыслят математики.

[1] Обычно. — *Прим. перев.*

Что такое доказательство и для чего его придумали математики?

Как менялись его сущность и форма на протяжении многих веков и что с ним случилось в наше время, когда появились компьютеры?

А как выглядит доказательство в других науках и вообще в нашей жизни, ведь мы пользуемся им везде, к примеру, на суде, слушая, как адвокаты и прокуроры доказывают нам невиновность или виновность обвиняемого?

Обо всем этом — в увлекательной книге известного американского ученого и блестящего популяризатора науки Стивена Кранца. Его герои — великие мыслители и математики прошлого и настоящего, от гениального грека Евклида до нашего современника и соотечественника Григория Перельмана, люди, сумевшие повлиять не только на развитие математики как науки, но и на весь образ мышления современного человека.