

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

1. Числа и вычисления	12
1.1. Натуральные числа	12
1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация. Цифры. Знаки для записи чисел	12
1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами	13
1.1.3. Степень с натуральным показателем.	17
1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители	18
1.1.5. Признаки делимости.	20
1.1.6. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК).	21
1.1.7. Деление с остатком.	23
1.2. Дроби	24
1.2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей. Сокращение дроби	24
1.2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями	28
1.2.3. Нахождение части от целого и целого по его части	34
1.2.4. Десятичная дробь, сравнение десятичных дробей	36
1.2.5. Арифметические действия с десятичными дробями.	37
1.2.6. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби.	39

1.3. Рациональные числа	40
1.3.1. Целые числа	40
1.3.2. Модуль (абсолютная величина) числа	40
1.3.3. Сравнение рациональных чисел	41
1.3.4. Арифметические действия с рациональными числами	42
1.3.5. Степень с целым показателем.	43
1.3.6. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок	44
1.4. Действительные числа	45
1.4.1. Квадратный корень из числа	45
1.4.2. Корень третьей степени	46
1.4.3. Нахождение приближённого значения корня	46
1.4.4. Запись корней с помощью степени с дробным показателем	47
1.4.5. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби	47
1.4.6. Сравнение действительных чисел	47
1.5. Измерения, приближения, оценки	48
1.5.1. Единицы измерения	48
1.5.2. Стандартный вид числа	50
1.5.3. Представление зависимости между величинами в виде формул.	50
1.5.4. Проценты. Нахождение процента от величины и величины по её проценту	51
1.5.5. Отношение, выражение отношения в процентах.	52
1.5.6. Пропорция. Прямая и обратно пропорциональная зависимости	53
1.5.7. Округление чисел	54

2. Алгебраические выражения	56
2.1. Буквенные выражения (выражения с переменными)	56
2.1.1. Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения	56
2.1.2. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения	57
2.1.3. Подстановка выражений вместо переменных	57
2.1.4. Равенство буквенных выражений, тождество. Преобразования выражений	58
2.2. Свойства степени с целым показателем.	58
2.3. Многочлены	59
2.3.1. Многочлен. Сложение, вычитание, умножение многочленов	59
2.3.2. Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности, формула разности квадратов	60
2.3.3. Разложение многочлена на множители	61
2.3.4. Квадратный трёхчлен. Теорема Виета. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители	62
2.3.5. Степень и корень многочлена с одной переменной	62
2.4. Алгебраическая дробь.	63
2.4.1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей.	63
2.4.2. Рациональные выражения и их преобразования	63
2.5. Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях	64
3. Уравнения и неравенства	65
3.1. Уравнения	65
3.1.1. Уравнение с одной переменной, корень уравнения	65

3.1.2. Линейное уравнение	65
3.1.3. Квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения	67
3.1.4. Решение рациональных уравнений	69
3.1.5. Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители	71
3.1.6. Уравнение с двумя переменными; решение уравнения с двумя переменными	72
3.1.7. Система уравнений; решение системы.	73
3.1.8. Система двух линейных уравнений с двумя переменными; решение подстановкой и алгебраическим способом.	74
3.2. Неравенства	78
3.2.1. Числовые неравенства и их свойства	78
3.2.2. Неравенства с одной переменной. Решение неравенства	80
3.2.3. Линейное неравенство с одной переменной	81
3.2.4. Системы линейных неравенств	82
3.2.5. Квадратные неравенства	84
3.3. Текстовые задачи	88
3.3.1. Решение текстовых задач арифметическим способом	88
3.3.2. Решение текстовых задач алгебраическим способом.	90
4. Числовые последовательности.	95
4.1 Понятие последовательности.	95
4.1.1. Понятие последовательности	95
4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии.	96
4.2.1. Арифметическая прогрессия	96
4.2.2. Геометрическая прогрессия	97
4.2.3. Сложные проценты.	98

5. Функции	99
5.1. Числовые функции	99
5.1.1. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции	99
5.1.2. График функции, возрастание и убывание, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства	100
5.1.3. Пример графических зависимостей, отражающих реальные процессы	101
5.1.4. Линейная функция, её график, геометрический смысл коэффициентов	102
5.1.5. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график. Гипербола.	103
5.1.6. Квадратичная функция, её график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии	104
5.1.7. График функции $y = \sqrt{x}$	105
5.1.8. График функции $y = \sqrt[3]{x}$	105
5.1.9. График $y = x $	106
5.1.10. Использование графиков функций для решения уравнений и систем	106
6. Координаты на прямой и в плоскости	108
6.1. Координатная прямая	108
6.1.1. Изображение чисел точками координатной прямой	108
6.1.2. Геометрический смысл модуля	108
6.1.3. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч.	109
6.2. Декартовы координаты на плоскости	110
6.2.1. Декартовы координаты на плоскости; координаты точки	110
6.2.2. Координаты середины отрезка	110
6.2.3. Формула расстояния между двумя точками плоскости.	111

6.2.4. Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых	111
6.2.5. Уравнение окружности	112
6.2.6. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и их систем.	112
7. Статистика и теория вероятности	114

ГЕОМЕТРИЯ

8. Геометрия	120
8.1. Геометрические фигуры и их свойства.	
Измерение геометрических величин	120
8.1.1. Начальные понятия геометрии	120
8.1.2. Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла и её свойства.	122
8.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых	124
8.1.4. Отрезок. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой	127
8.1.5. Понятие о геометрическом месте точек	129
8.1.6. Преобразования плоскости. Движения. Симметрия	130
8.2. Треугольник	132
8.2.1. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника; точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан, высот или их продолжений.	132
8.2.2. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Свойства и признаки равнобедренного треугольника	133

8.2.3. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора	136
8.2.4. Признаки равенства треугольников	138
8.2.5. Неравенство треугольника	139
8.2.6. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника	139
8.2.7. Теорема Фалеса	140
8.2.8. Подобие треугольников, коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников	140
8.2.9. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180° . . .	143
8.2.10. Решение прямоугольных треугольников. Основное тригонометрическое тождество. Теорема косинусов и теорема синусов	144
8.3. Многоугольники	146
8.3.1. Параллелограмм, его свойства и признаки	146
8.3.2. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки	148
8.3.3. Трапеция, средняя линия трапеции; равнобедренная трапеция	150
8.3.4. Сумма углов выпуклого многоугольника	151
8.3.5. Правильные многоугольники.	152
8.4. Окружность и круг	153
8.4.1. Центральный, вписанный угол; величина вписанного угла	153
8.4.2. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей	155
8.4.3. Касательная и секущая к окружности; равенство отрезков касательных, проведённых из одной точки	156
8.4.4. Окружность, вписанная в треугольник	157
8.4.5. Окружность, описанная около треугольника.	157

8.4.6. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника	159
8.4.7. Вписанные и описанные четырёхугольники	160
8.5. Измерение геометрических величин	161
8.5.1. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой.	161
8.5.2. Длина окружности	162
8.5.3. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности	162
8.5.4. Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника	163
8.5.5. Площадь параллелограмма	164
8.5.6. Площадь трапеции	164
8.5.7. Площадь треугольника	165
8.5.8. Площадь круга, площадь сектора.	166
8.5.9. Формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, куба, шара	167
8.6. Векторы на плоскости	168
8.6.1 Вектор, длина (модуль) вектора	168
8.6.2. Равенство векторов.	169
8.6.3. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число)	170
8.6.4. Угол между векторами	172
8.6.5. Коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	173
8.6.6. Координаты вектора	174
8.6.7. Скалярное произведение векторов	176

АЛГЕБРА

1. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

1.1. *Натуральные числа*

1.1.1. *Десятичная система счисления. Римская нумерация. Цифры. Знаки для записи чисел*

Цифры — знаки для записи чисел.

Система счисления — способ записи чисел в виде, удобном для чтения и выполнения арифметических операций.

В десятичной системе счисления используют цифры:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Всего 10 цифр.

Римские цифры	I	V	X	L	C	D	M
Арабские цифры	1	5	10	50	100	500	1000

Примеры

1) $XXVII = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 27$.

2) $MDCCLXIV = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 +$
 $+ (5 - 1) = 1764$.

1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами

Натуральные числа — числа, которые используют при счёте предметов.

Действия над натуральными числами

Сложение	$a + b = c$, $a = c - b$, $b = c - a$, где a — слагаемое, b — слагаемое, c — сумма
Вычитание	$a - b = c$, $a = b + c$, $b = a - c$, где a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность
Умножение	$ab = c$, $a = \frac{c}{b}$, $b = \frac{c}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, где a — множитель, b — множитель, c — произведение
Деление	$\frac{a}{b} = c$ или $a : b = c$, $a = bc$, $b = \frac{a}{c}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, где a — делимое, b — делитель, c — частное

Свойства сложения и умножения

Переместительное свойство сложения	$a + b = b + a$
Сочетательное свойство сложения	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Переместительное свойство умножения	$ab = ba$
Сочетательное свойство умножения	$(ab)c = a(bc)$

Распределительное свойство умножения относительно сложения	$a(b + c) = ab + ac$
--	----------------------

Общие правила при действиях с 0 и 1	
$a + 0 = a$	$a : 1 = a$
$a - 0 = a$	$a : a = 1$
$a - a = 0$	$a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 1 = a$	$0 : a = 0$
$a : 0$ — нет числового решения	

Проверка результатов арифметических действий с помощью остатков от деления на 9
<i>Действия</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Остаток любого числа от деления на 9 можно получить, складывая цифры числа, при этом в полученной сумме нужно продолжить сложение цифр до получения однозначного остатка. При сложении цифр суммы и отдельные числа, кратные 9, а также нуль можно игнорировать, они не влияют на конечный результат. • Умножаем или складываем остатки. В результате вычислений тем же способом находим остаток и сравниваем его с остатком суммы или произведения. При верном решении они должны совпадать. • При делении и вычитании проверку этим способом можно производить, умножая остаток частного на остаток делителя, соответственно складывая остаток разности с остатком вычитаемого.

Примеры

1) $44 \cdot 46 = 2024$

$4 + 4 = 8; 4 + 6 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1;$

$2 + 0 + 2 + 4 = 8;$

$8 \cdot 1 = 8$ (верно)

2) $327 + 48 = 375$

$3 + 2 + 7 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$

$4 + 8 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$

$3 + 7 + 5 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6; \quad 3 + 3 = 6$ (верно)

3) $156 : 12 = 13 \rightarrow 13 \cdot 12 = 156$

$1 + 3 = 4; 1 + 2 = 3;$

$1 + 5 + 6 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$

$4 \cdot 3 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$ (верно)

4) $58 - 22 = 36 \rightarrow 36 + 22 = 58$

$3 + 6 = 9; 2 + 2 = 4; 5 + 8 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4;$

$9 + 4 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$ (верно)

Приёмы быстрого устного счёта

Умножение чисел от 101 до 109 между собой

$$(100 + a)(100 + b) = 10\,000 + 100(a + b) + ab$$

<i>Порядок действий</i>	<i>Примеры</i>
1) Записываем число 1.	1) $102 \cdot 104 = 10\,000 +$ $+ 100(2 + 4) + 2 \cdot 4 =$ $= 10\,000 + 600 + 8 = 10\,608.$
2) Справа записываем сумму чисел из разряда единиц у множителей.	2) $109 \cdot 108 = 10\,000 +$ $+ 100(9 + 8) + 9 \cdot 8 =$ $10\,000 + 1700 + 72 =$ $= 11\,772.$
3) Ещё правее записываем произведение этих же чисел.	