

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой повторение шестого издания «Сборника задач по математике для поступающих во втузы» (М.: Высшая школа, 1992; Столетие, 1997–1999) с дополнительной корректировкой условий всех задач и ответов к ним, а также с исправлением замеченных неточностей. Кроме того, существенно расширен справочный материал в гл. 5, 9 и 13. При этом, учитывая, что данное издание «Сборника» используется учащимися и преподавателями в течение многих лет, авторы практически полностью сохранили весь массив его задач и их нумерацию.

«Сборник» написан в соответствии с программой по математике для поступающих во втузы. В каждой главе приведены теоретические сведения справочного характера и примеры решения задач с объяснением применяемых методов. При этом начало и конец решения примера отмечаются соответственно знаками \square и \blacksquare .

«Сборник» состоит из двух частей: «Арифметика, алгебра, геометрия» (часть I); «Алгебра, геометрия (дополнительные задачи). Начала анализа. Координаты и векторы» (часть II).

Задачи части I разделены на три группы (А, Б, В) по их нарастающей сложности. Хотя такое деление имеет более или менее условный характер, авторы полагают, что умение решать задачи из группы А должно определять минимально необходимый уровень подготовки учащихся к вступительным экзаменам в вузы. Успешное решение задач из группы Б определяет более высокое качество усвоения школьной программы. К группе В отнесены задачи повышенной трудности. Однако практика решения таких задач полезна для развития и укрепления способности к самостоятельному логическому мышлению, для обогащения математической культуры и может быть использована в школе и на факультативных занятиях.

В части II помещены не разделенные на группы по степени трудности дополнительные задачи по алгебре и геометрии, задачи по началам математического анализа, задачи на применение координат и векторов, а также задачи по теме «Комплексные числа» (гл. 18). Эта тема не входит в ныне действующую программу для поступающих во втузы, но является весьма полезной для учащихся школ, лицеев и гимназий, изучающих математику по расширенной программе и готовящихся к вступительным экзаменам во втузы. По этим же соображениям к части II следовало бы отнести и тему «Комбинаторика и бином Ньютона», однако ее пришлось оставить в части I (гл. 5), чтобы сохранить нумерацию всех глав и задач «Сборника» для удобства тех, кто использует в своей работе именно шестое его издание.

Вместе с тем в интересах учащихся и преподавателей, использующих в своей работе как шестое, так и десятое издание «Сборника», в конце книги указаны

Предисловие

номера всех задач настоящего издания, для которых эти же задачи (под другими номерами) решены в десятом издании.

В соответствии со школьной программой обучения математике всюду (за исключением гл. 18) рассматриваются только области действительных чисел: действительные корни функций, уравнений, систем уравнений.

Начиная с третьего издания работа над «Сборником» выполнялась коллективом авторов без участия самого активного соавтора и научного редактора его первого и второго изданий М. И. Сканави, умершего в 1972 г. Специальное редактирование третьего и последующих изданий осуществлял Б. А. Кордемский. Он проделал большую работу и в процессе подготовки настоящего издания, но, к сожалению, книга вышла в свет уже без него. Мы сохраним светлую память о нем и о других наших коллегах, ушедших из жизни за последние годы, — И. Ф. Орловской, Р. И. Позойском, В. К. Егереве, В. В. Зайцеве.

Авторы сердечно благодарят учащихся и преподавателей школ, подготовительных курсов и факультетов вузов, рецензентов «Сборника», высказавших критические замечания и добрые советы, предложивших поправки. В особенности авторы признательны Р. И. Борковскому (г. Челябинск), приславшему наибольшее количество пожеланий и замечаний, учтенных при работе над книгой.

Авторы

ЧАСТЬ I
АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА,
ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА 1
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Пример. Вычислить

$$\left(\frac{928 \cdot 10^{-2}}{0,8} - 0,6 \right) : \left(\frac{\left(42 \cdot 3 \frac{5}{6} + 3,3 : 0,03 \right) : \frac{1}{15}}{\left(3 \frac{3}{4} : 0,625 - 0,84 : 0,8 \right) : 0,03} \right)^{-1}.$$

□ Обозначим выражение в первых скобках через A , а выражение во вторых скобках — через B . Последовательно находим:

1) $A = \frac{928}{80} - 0,6 = 11,6 - 0,6 = 11;$

2) числитель дроби B :

а) $42 \cdot 3 \frac{5}{6} = 42 \cdot 3 + \frac{42 \cdot 5}{6} = 161;$

б) $3,3 : 0,03 = 110;$

в) $(161 + 110) \cdot 15 = 271 \cdot 15;$

3) знаменатель дроби B :

а) $\frac{15}{4} : \frac{5}{8} = 6;$

б) $\frac{84}{80} = \frac{21}{20};$

в) $\left(6 - \frac{21}{20} \right) \cdot \frac{100}{3} = 200 - 35 = 165;$

4) $B = 271 \cdot \frac{15}{165} = \frac{271}{11}.$

Окончательно получим $A : B^{-1} = AB = 11 \cdot \frac{271}{11} = 271. \blacksquare$

В задачах этой главы надо выполнить указанные действия, не пользуясь микрокалькулятором, не делая округлений и приближенных вычислений, так как предполагается, что все заданные числа являются точными.

Вычислить (1.001–1.040):

$$1.001. \frac{(7 - 6,35) : 6,5 + 9,9}{\left(1,2 : 36 + 1,2 : 0,25 - 1 \frac{5}{16}\right) : \frac{169}{24}}.$$

$$1.002. \left(\left(\frac{7}{9} - \frac{47}{72}\right) : 1,25 + \frac{7}{40}\right) : (0,358 - 0,108) \cdot 1,6 - \frac{19}{25}.$$

$$1.003. \frac{\left(0,5 : 1,25 + \frac{7}{5} : 1 \frac{4}{7} - \frac{3}{11}\right) \cdot 3}{\left(1,5 + \frac{1}{4}\right) : 18 \frac{1}{3}}.$$

$$1.004. \left(\frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2 \frac{1}{3}}{(5,2 - 1,4) : \frac{3}{70}} + 0,125\right) : 2 \frac{1}{2} + 0,43.$$

$$1.005. \frac{2 \frac{3}{4} : 1,1 + 3 \frac{1}{3} : \frac{5}{7} - \left(2 \frac{1}{6} + 4,5\right) \cdot 0,375}{2,5 - 0,4 \cdot 3 \frac{1}{3}}.$$

$$1.006. \frac{\left(13,75 + 9 \frac{1}{6}\right) \cdot 1,2}{\left(10,3 - 8 \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{9}} + \frac{\left(6,8 - 3 \frac{3}{5}\right) \cdot 5 \frac{5}{6}}{\left(3 \frac{2}{3} - 3 \frac{1}{6}\right) \cdot 56} - 27 \frac{1}{6}.$$

$$1.007. \frac{\left(\frac{1}{6} + 0,1 + \frac{1}{15}\right) : \left(\frac{1}{6} + 0,1 - \frac{1}{15}\right) : 2,52}{\left(0,5 - \frac{1}{3} + 0,25 - \frac{1}{5}\right) : \left(0,25 - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{7}{13}}.$$

$$1.008. \left(\frac{3 \frac{1}{3} + 2,5}{2,5 - 1 \frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6 - 2 \frac{1}{3}}{4,6 + 2 \frac{1}{3}} \cdot 5,2\right) : \left(\frac{0,05}{\frac{1}{7} - 0,125} + 5,7\right).$$

$$1.009. \frac{0,4 + 8 \left(5 - 0,8 \cdot \frac{5}{8}\right) - 5 : 2 \frac{1}{2}}{\left(1 \frac{7}{8} \cdot 8 - \left(8,9 - 2,6 : \frac{2}{3}\right)\right)} \cdot 34 \frac{2}{5}.$$

$$1.010. \frac{\left(5\frac{4}{45} - 4\frac{1}{6}\right) : 5\frac{8}{15} \cdot 34\frac{2}{7} + \frac{0,3 : 0,01}{70} + \frac{2}{7}}{\left(4\frac{2}{3} + 0,75\right) \cdot 3\frac{9}{13}}$$

$$1.011. \frac{\left(\frac{3}{5} + 0,425 - 0,005\right) : 0,1 \cdot 6\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2}}{30,5 + \frac{1}{6} + 3\frac{1}{3}} + \frac{26 : 3\frac{5}{7}}{26} - 0,05.$$

$$1.012. \frac{3\frac{1}{3} \cdot 1,9 + 19,5 : 4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75} - 0,16} : \frac{3,5 + 4\frac{2}{3} + 2\frac{2}{15}}{0,5\left(1\frac{1}{20} + 4,1\right)}$$

$$1.013. \frac{\left(1\frac{1}{5} : \left(\frac{17}{40} + 0,6 - 0,005\right)\right) \cdot 1,7}{\frac{5}{6} + 1\frac{1}{3} - 1\frac{23}{30}} + \frac{4,75 + 7\frac{1}{2}}{33 : 4\frac{5}{7}} : 0,25.$$

$$1.014. \frac{\left(4,5 \cdot 1\frac{2}{3} - 6,75\right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1\frac{4}{11} \cdot 0,22 : 0,3 - 0,96}{11}}{\left(3\frac{1}{3} \cdot 0,3 + 5\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) : 2\frac{2}{3} + \left(0,2 - \frac{3}{40}\right) \cdot 1,6}$$

$$1.015. \frac{\left(1,88 + 2\frac{3}{25}\right) \cdot \frac{3}{16} + \left(\frac{0,216}{0,15} + 0,56\right) : 0,5}{0,625 - \frac{13}{18} : \frac{26}{9}} + \frac{\left(7,7 : 24\frac{3}{4} + \frac{2}{15}\right) \cdot 4,5}{\left(7,7 : 24\frac{3}{4} + \frac{2}{15}\right) \cdot 4,5}$$

$$1.016. \left(16\frac{1}{2} - 13\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{18}{33} + 2,2\left(\frac{8}{33} - \frac{1}{11}\right) + \frac{2}{11}.$$

$$1.017. \frac{0,128 : 3,2 + 0,86 \cdot \left(1\frac{32}{63} - \frac{13}{21}\right) \cdot 3,6}{\frac{5}{6} \cdot 1,2 + 0,8} : \frac{0,505 \cdot \frac{2}{5} - 0,002}{0,505 \cdot \frac{2}{5} - 0,002}$$

$$1.018. \frac{3\frac{1}{3} : 10 + 0,175 : 0,35 \cdot \left(\frac{11}{18} - \frac{1}{15}\right) : 1,4}{1,75 - 1\frac{11}{17} \cdot \frac{51}{56}} - \frac{\left(\frac{11}{18} - \frac{1}{15}\right) : 1,4}{\left(0,5 - \frac{1}{9}\right) \cdot 3}$$

$$1.019. \frac{0,125 : 0,25 + 1\frac{9}{16} : 2,5}{(10 - 22 : 2,3) \cdot 0,46 + 1,6} + \left(\frac{17}{20} + 1,9\right) \cdot 0,5.$$

$$1.020. \left(\left(1\frac{1}{7} - \frac{23}{49} \right) : \frac{22}{147} - \left(0,6 : 3\frac{3}{4} \right) 2\frac{1}{2} + 3,75 : 1\frac{1}{2} \right) : 2,2.$$

$$1.021. \left(2 : 3\frac{1}{5} + \left(3\frac{1}{4} : 13 \right) : \frac{2}{3} + \left(2\frac{5}{18} - \frac{17}{36} \right) \cdot \frac{18}{65} \right) \cdot \frac{1}{3}.$$

$$1.022. \frac{0,5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + 0,125}{\frac{1}{3} + 0,4 + \frac{14}{15}} + \frac{(3,75 - 0,625) \cdot \frac{48}{125}}{12,8 \cdot 0,25}.$$

$$1.023. \left(26\frac{2}{3} : 6,4 \right) \cdot \left(19,2 : 3\frac{5}{9} \right) - \frac{8\frac{4}{7} : 2\frac{26}{77}}{0,5 : 18\frac{2}{3} \cdot 11} - \frac{1}{18}.$$

$$1.024. \frac{0,725 + 0,6 + \frac{7}{40} + \frac{11}{20}}{0,128 \cdot 6\frac{1}{4} - 0,0345 : \frac{3}{25}} \cdot 0,25.$$

$$1.025. \left((520 \cdot 0,43) : 0,26 - 217 \cdot 2\frac{3}{7} \right) - \left(31,5 : 12\frac{3}{5} + 114 \cdot 2\frac{1}{3} + 61\frac{1}{2} \right).$$

$$1.026. \frac{(3,4 - 1,275) \cdot \frac{16}{17}}{\frac{5}{18} \cdot \left(1\frac{7}{85} + 6\frac{2}{17} \right)} + 0,5 \cdot \left(2 + \frac{12,5}{5,75 + \frac{1}{2}} \right).$$

$$1.027. \left(\frac{3,75 + 2\frac{1}{2}}{2} - \frac{2\frac{3}{4} + 1,5}{2,75 - 1\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{10}{11}.$$

$$1.028. ((21,85 : 43,7 + 8,5 : 3,4) : 4,5) : 1\frac{2}{5} + 1\frac{11}{21}.$$

$$1.029. \left(1\frac{2}{5} + 3,5 : 1\frac{1}{4} \right) : 2\frac{2}{5} + 3,4 : 2\frac{1}{8} - 0,35.$$

$$1.030. \frac{\left(0,3275 - \left(2\frac{15}{88} + \frac{4}{33} \right) : 12\frac{2}{9} \right) : 0,07}{(13 - 0,416) : 6,05 + 1,92}.$$

$$1.031. \frac{\frac{5}{6} - \frac{21}{45}}{1\frac{5}{6}} \cdot \frac{1,125 + 1\frac{3}{4} - \frac{5}{12}}{0,59}.$$

$$1.032. \frac{\left(3^{-1} - \sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^{-2} : 0,25}{\frac{37}{300} : 0,0925} + 12,5 \cdot 0,64.$$

$$1.033. \frac{\left(\frac{5}{8} + 2\frac{17}{24}\right) : 2,5}{\left(1,3 + \frac{23}{30} + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{110}{401}} \cdot 0,5.$$

$$1.034. \frac{((7 - 6,35) : 6,5 + 9,9) \cdot \frac{1}{12,8}}{\left(1,2 : 36 + 1\frac{1}{5} : 0,25 - 1\frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{1}{4}} : 0,125.$$

$$1.035. \frac{\left(2\frac{38}{45} - \frac{1}{15}\right) : 13\frac{8}{9} + 3\frac{3}{65} \cdot \frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2} - 13\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{1}{85}} \cdot 0,5.$$

$$1.036. \frac{3,75 : 1\frac{1}{2} + \left(1,5 : 3\frac{3}{4}\right) \cdot 2\frac{1}{2} + \left(1\frac{1}{7} - \frac{23}{49}\right) : \frac{22}{147}}{2 : 3\frac{1}{5} + \left(3\frac{1}{4} : 13\right) : \frac{2}{3} - \left(2\frac{5}{18} - \frac{17}{36}\right) \cdot \frac{18}{65}}.$$

$$1.037. \frac{\left(\left(4,625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26}\right) : \frac{9}{4} + 2,5 : 1,25 : 6,75\right) : 1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2} - 0,375\right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0,358 - 1,4796 : 13,7)}.$$

$$1.038. \frac{\left(\left(3\frac{7}{12} - 2\frac{11}{18} + 2\frac{1}{24}\right) \cdot 1\frac{5}{31} - \frac{3}{52} \left(3\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right)\right) \cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84} : \left(5\frac{13}{42} - 2\frac{13}{28} + \frac{5}{24}\right) + 1\frac{2}{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}}.$$

$$1.039. \left(\frac{(3,2 - 1,7) : 0,003 - \left(1\frac{13}{20} - 1,5\right) \cdot 1,5}{\left(\frac{29}{35} - \frac{3}{7}\right) \cdot 4 : 0,2 - \left(2,44 + 1\frac{14}{25}\right) \cdot \frac{1}{8}}\right) : 62\frac{1}{20} + 1,364 : 0,124.$$

$$1.040. 5\frac{4}{7} : \left(8,4 \cdot \frac{6}{7} \cdot \left(6 - \frac{(2,3 + 5 : 6,25) \cdot 7}{8 \cdot 0,0125 + 6,9}\right) - 20,384 : 1,3\right).$$

Найти X из пропорции (1.041–1.045):

$$1.041. \frac{\left(4 - 3,5 \cdot \left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5}\right)\right) : 0,16}{X} = \frac{3\frac{2}{7} - \frac{3}{14} : \frac{1}{6}}{41\frac{23}{84} - 40\frac{49}{60}}.$$

$$1.042. \frac{1,2 : 0,375 - 0,2}{6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} + 0,8} = \frac{0,016 : 0,12 + 0,7}{X}.$$

$$1.043. \frac{0,125X}{\left(\frac{19}{24} - \frac{21}{40}\right) \cdot 8\frac{7}{16}} = \frac{\left(1\frac{28}{63} - \frac{17}{21}\right) \cdot 0,7}{0,675 \cdot 2,4 - 0,02}.$$

$$1.044. \frac{10,5 \cdot 0,24 - 15,15 : 7,5}{X} = \frac{9\left(1\frac{11}{20} - 0,945 : 0,9\right)}{1\frac{3}{40} - 4\frac{3}{8} : 7}.$$

$$1.045. \frac{15,2 \cdot 0,25 - 48,51 : 14,7}{X} = \frac{\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2\frac{1}{2}\right) \cdot 1\frac{1}{5}}{3,2 + 0,8\left(5\frac{1}{2} - 3,25\right)}.$$

Вычислить наиболее рациональным способом (1.046–1.048):

$$1.046. \frac{\sqrt{6,3 \cdot 1,7} \left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}} - \sqrt{\frac{1,7}{6,3}}\right)}{\sqrt{(6,3 + 1,7)^2 - 4 \cdot 6,3 \cdot 1,7}}.$$

$$1.047. \left(\frac{\sqrt{561^2 - 459^2}}{4\frac{2}{7} \cdot 0,15 + 4\frac{2}{7} : \frac{20}{3}} + 4\sqrt{10}\right) : \frac{1}{3}\sqrt{40}.$$

$$1.048. \left(\sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3}\right)^2.$$

Вычислить (1.049–1.050):

$$1.049. \frac{2^{-2} + 5^0}{(0,5)^{-2} - 5(-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4,75.$$

$$1.050. \frac{(0,6)^0 - (0,1)^{-1}}{(3 : 2^3)^{-1} \cdot (1,5)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}.$$

ГЛАВА 2

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Свойства степеней

Для любых x и y и любых положительных a и b верны следующие равенства:

$$a^0 = 1; \quad (2.1)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad (2.2)$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \quad (2.3)$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \quad (2.4)$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad (2.6)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (2.7)$$

Формулы преобразования многочленов

Для любых a , b и c верны следующие равенства:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (2.8)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (2.9)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (2.10)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

или $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b); \quad (2.11)$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

или $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b); \quad (2.12)$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad (2.13)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \quad (2.14)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (2.15)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k , больших 1, и любых неотрицательных a и b верны следующие равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad (2.16)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \quad (2.17)$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \quad (2.18)$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \quad (2.19)$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad (2.20)$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geq 0); \quad (2.21)$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \quad (2.22)$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad (2.24)$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0). \quad (2.25)$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} + 2\left(\sqrt[6]{27x^3} - \frac{1}{2}\right).$$

□ Обозначим дробь через A , а выражение в скобках – через B ; тогда заданное выражение примет вид $A + 2B$. Заметим, что для $\sqrt{3x}$ и $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимыми являются только значения $x \geq 0$, при которых знаменатель дроби A не равен нулю. Поэтому и для заданного выражения допустимыми являются только значения $x \geq 0$.

Используя формулу (2.9), выделяем в числителе дроби A полный квадрат:

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 3x = (x^2 + 1)^2 - 3x.$$

Так как $x \geq 0$, то в силу равенства (2.21) имеем $3x = (\sqrt{3x})^2$. Тогда полученное выражение с помощью формулы (2.8) можно разложить на множители как разность квадратов:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3x})^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3x})(x^2 + 1 + \sqrt{3x}).$$

Следовательно,

$$A = \frac{(x^2 - \sqrt{3x} + 1)(x^2 + \sqrt{3x} + 1)}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} = x^2 - \sqrt{3x} + 1.$$

Далее на основании формулы (2.20) имеем $\sqrt[6]{27x^3} = \sqrt[6]{(3x)^3} = \sqrt{3x}$, откуда

$$B = \sqrt{3x} - \frac{1}{2}. \text{ Итак, } A + 2B = x^2 - \sqrt{3x} + 1 + 2\sqrt{3x} - 1 = x^2 + \sqrt{3x}. \blacksquare$$

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b}, \quad 0 < a < 2b.$$

□ Имеем $\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} = \sqrt{(a - 2b)^2} = |a - 2b| = 2b - a$, аналогично,

$$\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2} = |a + 2b| = a + 2b; \quad \text{здесь были использованы формулы (2.9),}$$

(2.10) и (2.23). Следовательно, $\frac{\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}} = \frac{2b - a}{2b + a}$. Теперь находим

$$\frac{2b - a}{2b + a} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b} = \frac{(2b - a)(a - 2b) - 8ab + 2b(a + 2b)}{a^2 - 4b^2} = \frac{a}{2b - a}. \blacksquare$$

Пример 3. Упростить выражение

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5 + (x - 5)\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4x - 5 + (x + 5)\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

□ Используя формулу (2.15), разложим на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе дроби:

$$f(x) = \frac{(x + 5)(x - 1) + (x - 5)\sqrt{x^2 - 1}}{(x - 5)(x + 1) + (x + 5)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Так как $x > 1$, то в силу соотношения (2.21) имеем $x - 1 = \sqrt{(x - 1)^2}$ и

$x + 1 = \sqrt{(x + 1)^2}$. Значит,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x - 1}((x + 5)\sqrt{x - 1} + (x - 5)\sqrt{x + 1})}{\sqrt{x + 1}((x - 5)\sqrt{x + 1} + (x + 5)\sqrt{x - 1})},$$

откуда после сокращения получим $f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$. ■

Пример 4. Не прибегая к приближенным вычислениям, упростить числовое выражение

$$A = (4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}} - \sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}) \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$

□ Используя формулы (2.16), (2.8), (2.20) и (2.10), находим:

$$1) 4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}} = 4\sqrt[3]{\frac{12-1}{11}} = 4;$$

$$\begin{aligned} 2) \sqrt[6]{13+4\sqrt{3}} \sqrt[6]{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2} &= \sqrt[6]{(13+4\sqrt{3}) \frac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{(13+4\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})}{11^2}} = \sqrt[6]{\frac{169-48}{11^2}} = 1. \end{aligned}$$

Окончательно получим $A = 4 - 1 = 3$. ■

Пример 5. Проверить справедливость равенства

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}} = 4.$$

□ Положим $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}} = x$. Возведем в куб обе части этого равенства. Используя формулу (2.11), получаем

$$38 + \sqrt{1445} + 38 - \sqrt{1445} + 3\sqrt[3]{(38 + \sqrt{1445})(38 - \sqrt{1445})} x = x^3,$$

или $x^3 + 3x - 76 = 0$. Подстановкой $x = 4$ убеждаемся в том, что $x = 4$ является одним из корней полученного кубического уравнения: $64 + 12 - 76 = 0$.

Преобразуем это кубическое уравнение:

$$x^3 - 64 = 3(4 - x); (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 3(x - 4) = 0; (x - 4)(x^2 + 4x + 19) = 0.$$

Но множитель $x^2 + 4x + 19$ не имеет действительных корней. Значит, 4 — единственное возможное действительное значение для x , чем и доказано требуемое равенство (поскольку очевидно, что $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — действительное число). ■

Пример 6. Проверить справедливость равенства

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}} - \sqrt{3} = 2.$$

□ Рассмотрим равенство

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Очевидно, что если оно верно, то верно и заданное равенство. Пусть

$$a = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}, \quad b = 2 + \sqrt{3}.$$

Легко установить, что $a > 0$ и $b > 0$. Если

при этом выполняется равенство $a^2 = b^2$, то $a = b$. Находим

$$a^2 = \frac{(7+4\sqrt{3})(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2} = \frac{(7+4\sqrt{3})(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}} = 7+4\sqrt{3};$$

$$b^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Так как $a^2 = b^2$, то $a = b$, т.е. заданное равенство справедливо.

Этот пример можно решить быстрее, если догадаться, что оба подкоренных выражения в условии являются квадратами положительных чисел, а именно:

$$7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2 \quad \text{и} \quad 19-8\sqrt{3} = (4-\sqrt{3})^2.$$

Тогда левая часть заданного равен-

ства есть $\frac{(2+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}} - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$ и $2 = 2$. ■

Пример 7. Чему равна сумма выражений $\sqrt{24-t^2}$ и $\sqrt{8-t^2}$, если известно, что их разность равна 2 (значение переменной t находить не нужно)?

□ Согласно условию, $\sqrt{24-t^2} - \sqrt{8-t^2} = 2$. Используя формулу

$$a+b = \frac{a^2-b^2}{a-b}, \quad \text{получим} \quad \sqrt{24-t^2} + \sqrt{8-t^2} = \frac{24-8}{2} = 8. \quad \blacksquare$$

Группа А

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (2.001–2.124):

2.001. $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

2.002. $((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2} + (\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}) : \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$.

2.003. $\frac{(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}} - \sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}})^2}{2\sqrt{a^3b}} : \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - 2 \right); a > b > 0$.