Содержание

12

Практические задачи интегрального исчисления

- 12.1. Площадь фигуры, ограниченной кривыми
- 12.2. Интегрирование в экономических задачах
- 12.3. Интегрирование по частям
- 12.4. Таблицы интегралов
- Ключевые слова, основные обозначения и формулы
- Упражнения для повторения
- Домашнее задание 12.1. Анализ концентрации дохода по исходным данным
- Домашнее задание 12.2. Рынок зерна

Введение

В этой главе рассматриваются дополнительные темы, связанные с интегрированием. Поскольку все они совершенно не зависят друг от друга, их можно рассматривать в любом порядке, а определенные разделы при необходимости можно даже пропустить.

12.1. Площадь фигуры, ограниченной кривыми

- Площадь фигуры между кривой и осью x
- Площадь фигуры между двумя кривыми
- Практическая задача: распределение доходов

В главе 11 мы выяснили, что определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ представляет собой сумму площадей фигур, лежащих между графиком функции $y = f(x)$ и осью x от точки $x = a$ до точки $x = b$, причем площадь над осью x учитывается со знаком "плюс", а площадь под осью x — со знаком "минус" (рис. 12.1). В этом разделе рассматривается применение определенного интеграла для вычисления площади фигур, лежащих между кривой и осью x, а также между двумя кривыми. Эти площади всегда являются неотрицательными величинами, поскольку **площадь может представляться только положительным значением**.

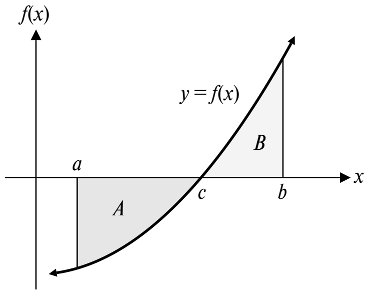


Рис. 12.1. Графическое представление интеграла $\int_a^b f(x)\,dx = -A + B$

Площадь фигуры между кривой и осью x

На рис. 12.1 величина A соответствует площади фигуры, лежащей между кривой $y = f(x)$ и осью x от точки $x = a$ до точки $x = c$, а величина B — площади фигуры, расположенной между кривой $y = f(x)$ и осью x от точки $x = c$ до точки $x = b$. Обе эти величины являются положительными. Поскольку на отрезке $[c, b]$ выполняется условие $f(x) \geqslant 0$, то

$$\int_c^b f(x)\,dx = B.$$

Кроме того, поскольку на отрезке $[a, c]$ выполняется условие $f(x) \leqslant 0$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx = -A,$$

или

$$A = -\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^c [-f(x)]\,dx.$$

Таким образом, площадь фигуры, лежащей между графиком отрицательной функции и осью x, равна определенному интегралу функции, взятой со знаком минус.

Задание 12.1.
Постройте график такой функции f, чтобы на отрезке $[1, 5]$ выполнялось условие $f(x) \leqslant 0$. (Записывать уравнение не нужно.) Постройте график функции $y = -f(x)$ на том же интервале в той же системе координат. Объясните, как эти рисунки связаны с рассуждениями, приведенными выше. ■

Все предыдущие интерпретации основывались на трактовке определенного интеграла как предела суммы Римана.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k.$$

На рис. 12.2 показан частный случай суммы Римана, демонстрирующий применение формулы суммы значений в средних точках для вычисления величины M_5 на интервале $[a, b]$. Произведение $f(c_k)\Delta x_k$ отрицательно для всех прямоугольников на отрезке $[a, c]$ и положительно для всех прямоугольников на отрезке $[c, b]$. Таким образом, величины $f(c_k)\Delta x_k$ представляют собой площади прямоугольников, взятые со знаком минус на отрезке $[a, c]$, а величины $-f(c_k)\Delta x_k$ являются реальными площадями прямоугольников на этом отрезке. Следовательно, для отрезка $[a, c]$, на котором выполняется условие $f(x) \leqslant 0$, справедливо следующее утверждение.

$$\text{Площадь} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [-f(c_k)]\,\Delta x_k = \int\limits_a^c [-f(x)]\,dx.$$

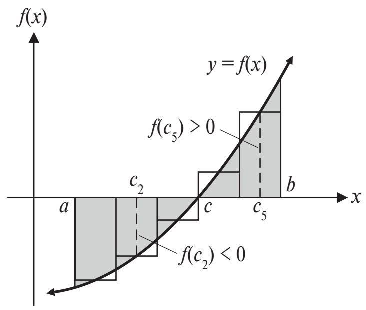


Рис. 12.2. Площадь и суммы Римана

Однако на отрезке $[c, b]$, где выполняется условие $f(x) \geqslant 0$, справедливо следующее утверждение.

$$\text{Площадь} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Площадь фигуры между кривой и осью x

Для функции f, непрерывной на отрезке $[a, b]$, площадь фигуры, лежащей между кривой $y = f(x)$ и осью x от точки $x = a$ до точки $x = b$, можно найти по следующим формулам.

$$\textbf{Если } f(x) \geqslant 0 \textbf{ на отрезке } [a, b]\textbf{, то площадь} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$$\textbf{Если } f(x) \leqslant 0 \textbf{ на отрезке } [a, b]\textbf{, то площадь} = \int_a^b [-f(x)]\, dx.$$

Если на некотором отрезке функция $f(x)$ меняет знак (как показано на рис. 12.1), площадь между графиком f и осью x можно получить, разделив интервал на подынтервалы, на которых функция f имеет постоянный знак, найдя площади на каждом из этих подынтервалов и просуммировав эти площади.

Пример 12.1 (Площадь между кривой и осью x). Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x) = 6x - x^2$ и $y = 0$ для $1 \leqslant x \leqslant 4$.

Решение. Прежде всего построим график функции $f(x)$ (рис. 12.3). (Решение любой задачи, связанной с вычислением площади, должно начинаться с построения графика.) Поскольку на отрезке $[1, 4]$ выполняется условие $f(x) \geqslant 0$, то

$$\begin{aligned} A = \int_1^4 (6x - x^2)\, dx &= \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 = \\ &= \left[3 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right] - \left(3 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3}\right) = \\ &= 48 - \frac{64}{3} - 3 + \frac{1}{3} = \\ &= 48 - 21 - 3 = \\ &= 24. \end{aligned}$$

■

Упражнение 12.1.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x) = x^2 + 1$ и $y = 0$ на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 3$. ■

Пример 12.2 (Площадь фигуры между кривой и осью x). Вычислите площади фигур, лежащих между графиком $f(x) = x^2 - 2x$ и осью x, на указанных отрезках

1. $[1, 2]$.

2. $[-1, 1]$.

Решение. Прежде всего построим график функции f, показанный на рис. 12.4.

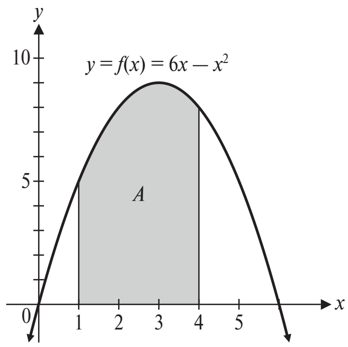


Рис. 12.3. График функции $f(x) = 6x - x^2$

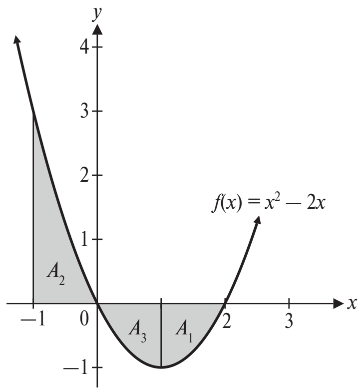


Рис. 12.4. График функции $f(x) = x^2 - 2x$

1. Из графика следует, что для чисел $1 \leqslant x \leqslant 2$ выполняется условие $f(x) \leqslant 0$, следовательно, нужно интегрировать $-f(x)$.

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_1^2 [-f(x)]\,dx = \\ &= \int_1^2 \left(2x - x^2\right) dx = \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \\ &= \left[1^2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[1^2 - \frac{1^3}{3}\right] = \\ &\boxed{= 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667.\end{aligned}$$

2. Поскольку из графика видно, что $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[-1, 0]$ и $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[0, 1]$, для вычисления этой площади потребуется два интеграла.

$$\begin{aligned}A &= A_2 + A_3 = \\ &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 [-f(x)]\,dx = \\ &= \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x\right) dx + \int_0^1 \left(2x - x^2\right) dx =\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} =$$

$$\boxed{= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}} = 2.$$

■

Упражнение 12.2.
Вычислите площадь фигуры, лежащей между графиком функции $f(x) = x^2 - 9$ и осью x на указанных отрезках.

1. $[0, 2]$. **2.** $[2, 4]$. ■

Площадь фигуры между двумя кривыми

Теперь рассмотрим площадь, ограниченную функциями $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ для $a \leqslant x \leqslant b$, как показано на рис. 12.5.

$$\begin{pmatrix}\text{Площадь } A \text{ между}\\ f(x) \text{ и } g(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Площаль}\\ \text{под } f(x)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Площаль}\\ \text{под } g(x)\end{pmatrix} =$$

Площади вычисляются от $x = a$ до $x = b$ над осью x.

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx =$$

Воспользуемся свойством определенного ингерала 4 (раздел 11.5).

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

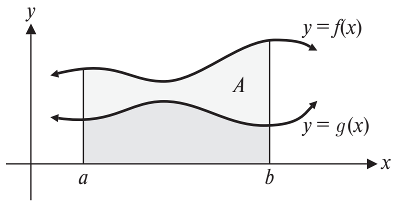


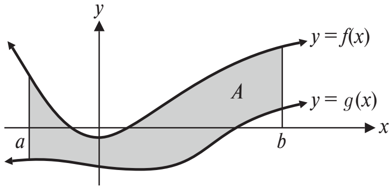
Рис. 12.5. Графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$

В этой формуле не требуется, чтобы функции $f(x)$ или $g(x)$ оставались положительными на интервале $[a, b]$. Более общий результат представлен в следующей врезке.

Площадь фигуры между двумя кривыми

Если функции f и g непрерывны и $f(x) \geqslant g(x)$ на отрезке $[a,\ b]$, то площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, вычисляется по следующей формуле.

$$A = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$



Задание 12.2.

Сумма Римана для интеграла, описывающего площадь фигуры, расположенной между графиками $y = f(x)$ и $y = g(x)$, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\, \Delta x_k.$$

Если $f(x) \geqslant g(x)$, каждое слагаемое в этой сумме представляет собой площадь прямоугольника с высотой $f(c_k) - g(c_k)$ и шириной Δx_k. Проанализируйте взаимосвязь между этими прямоугольниками и площадью фигуры, лежащей между графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. ■

Пример 12.3 (Площадь фигуры между двумя кривыми). Вычислите площадь фигуры, ограниченную графиками $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $g(x) = -x^2 + 1$, $x = -2$, и $x = 1$.

Решение. Прежде всего нарисуем эту фигуру (рис. 12.6), а затем запишем определенный интеграл и найдем его значение. Из графика следует, что $f(x) \geqslant g(x)$ для $-2 \leqslant x \leqslant 1$, так что

$$A = \int\limits_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int\limits_{-2}^{1} \left[\left(\frac{x}{2} + 3\right) - \left(-x^2 + 1\right)\right] dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(x^2 + \frac{x}{2} + 2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{-8}{3} + \frac{4}{4} - 4\right) = \frac{33}{4} = 8{,}25.$$ ■

Упражнение 12.3.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = -\frac{1}{2}x - 3$, $x = -1$ и $x = 2$. ■

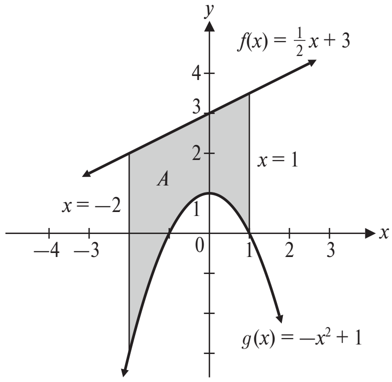


Рис. 12.6. Графики $f\ (x) = \frac{1}{2}x{+}3$, $g(x) = -x^2 + 1$, $x = -2$, и $x = 1$

Пример 12.4 (Площадь между двумя кривыми). Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x) = 5 - x^2$ и $g(x) = 2 - 2x$.

Решение. Прежде всего построим графики f и g, как показано на рис. 12.7. Поскольку в формулировке задачи нет никаких предельных значений x, соответствующие значения необходимо определить по графику. Как показано на рисунке, график f — это парабола, а график g — это прямая. Площадь, ограниченная этими двумя графиками, находится между точкой пересечения графиков слева и точкой пересечения графиков справа. Чтобы найти эти точки пересечения, решим уравнение $f(x) = g(x)$ относительно x.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \\ 5 - x^2 &= 2 - 2x, \\ x^2 - 2x - 3 &= 0, \\ x &= -1;\ 3. \end{aligned}$$

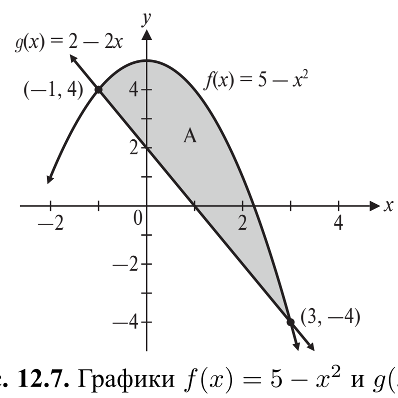


Рис. 12.7. Графики $f(x) = 5 - x^2$ и $g(x) = 2 - 2x$

Всегда можно проверить эти значения, подставив их в исходные уравнения. (Следует отметить, что фигура, лежащая между графиками для $x < -1$, слева не ограничена, а фигура между графиками для $x > 3$ не ограничена справа.) На рис. 12.7 показано, что $f(x) \geqslant g(x)$ на интервале $[-1, 3]$, так что

$$A = \int_{-1}^{3} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-1}^{3} \left[5 - x^2 - (2 - 2x)\right] dx =$$
$$= \int_{-1}^{3} \left(3 + 2x - x^2\right) dx =$$
$$= \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$
$$= \left[3 \cdot 3 + 3^2 - \frac{3^3}{3}\right] - \left[3 \cdot (-1) + (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \frac{32}{3} \approx 10{,}667. \qquad \blacksquare$$

Упражнение 12.4.
Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x) = 6 - x^2$ и $g(x) = x$. $\blacksquare$

Пример 12.5 (Площадь между двумя кривыми). Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x) = x^2 - x$ и $g(x) = 2x$ для $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

Решение. Графики f и g показаны на рис. 12.8. Изучив график, можно увидеть, что $f(x) \geqslant g(x)$ на интервале $[-2, 0]$, но $g(x) \geqslant f(x)$ на интервале $[0, 3]$. Таким образом, для вычисления площади понадобится найти два интеграла.

$$A_1 = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx = \qquad \boldsymbol{f(x) \geqslant g(x)} \text{ на } \boldsymbol{[-2, 0]}$$
$$= \int_{-2}^{0} \left[x^2 - x - 2x\right] dx =$$
$$= \int_{-2}^{0} \left(x^2 - 3x\right) dx =$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} =$$
$$= 0 - \left[\frac{(-2)^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2\right] = \frac{26}{3} \approx 8{,}667;$$

$$A_2 = \int_{0}^{3} [g(x) - f(x)]\, dx = \qquad \boldsymbol{g(x) \geqslant f(x)} \text{ на } \boldsymbol{[0, 3]}$$

$$= \int_0^3 \left[2x - \left(x^2 - x\right)\right] dx =$$
$$= \int_0^3 \left(3x - x^2\right) dx =$$
$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$
$$= \left[\frac{3}{2} \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3}\right] - 0 = \frac{9}{2} \approx 4{,}5.$$

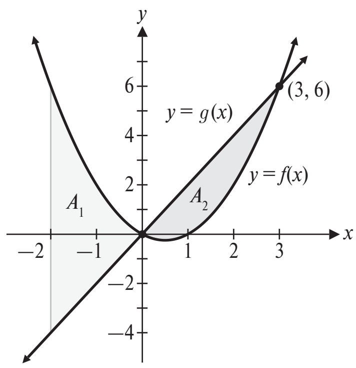


Рис. 12.8. Графики функций $f(x) = x^2 - x$ и $g(x) = 2x$

Общая площадь между двумя графиками равна

$$A = A_1 + A_2 = \frac{26}{3} + \frac{9}{2} = \frac{79}{6} \approx 13{,}167.$$

■

Упражнение 12.5.
Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x) = 2x^2$ и $g(x) = 4 - 2x$ для $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

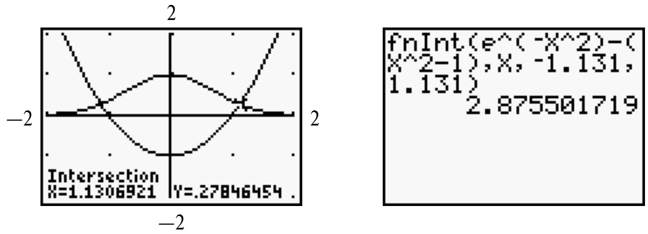
■

Пример 12.6 (Вычисление площади методом численного интегрирования). Вычислите площадь фигуры (с точностью до трех десятичных знаков), ограниченной графиками $f\,(x) = e^{-x^2}$ и $g(x) = x^2 - 1$.

Решение. Прежде всего воспользуемся графической утилитой, построим графики функций f и g и найдем точки пересечения графиков (рис. 12.9, *а*). Легко видеть, что график f имеет колоколообразную форму, а график g представляет собой параболу. Отметим также, что $f(x) \geqslant g(x)$ на интервале $[-1{,}131; 1{,}131]$. Вычислим теперь площадь A, используя метод численного интегрирования (рис. 12.9, *б*).

$$A = \int\limits_{-1{,}131}^{1{,}131} \left[e^{-x^2} - \left(x^2 - 1\right)\right] dx = 2{,}876.$$

■



а) б)

Рис. 12.9. Результаты вычислений

Упражнение 12.6.
Вычислите площадь фигуры (с точностью до трех десятичных знаков), ограниченной графиками $f(x) = x^2 \ln x$ и $g(x) = 3x - 3$. ■

Практическая задача: распределение доходов

Бюро переписи населения США собрало и проанализировало множество данных, касающихся распределения доходов среди семей в Соединенных Штатах Америки. Бюро сообщило, что за 1997 год 20% беднейших семей получили 4% всех семейных доходов, а 20% богатейших семей получили 47% таких доходов. В табл. 12.1 и на рис. 12.10 дана подробная картина распределения семейных доходов в 1997.

Таблица 12.1. Распределение семейных доходов в Соединенных Штатах Америки в 1997 году

Уровень доходов, долл.	x	y
Ниже 21 000	0,20	0,04
Ниже 36 000	0,40	0,14
Ниже 54 000	0,60	0,30
Ниже 80 000	0,80	0,53

График $y = f(x)$ на рис. 12.10 называется **кривой Лоренца**, которая, как правило, вычисляется с помощью *регрессионного анализа*, т.е. путем аппроксимации набора данных на заданном интервале определенной элементарной функцией. Переменная x **описывает суммарную долю семей, уровень доходов которых не превышает заданный**, а переменная y **описывает суммарную долю всех семейных доходов**. Например, точка $(0{,}40;\ 0{,}14)$ в табл. 12.1 указывает на то, что 40% семей (доход которых ниже 36 000 долл.) получают 14% общего дохода всех семей; точка $(0{,}60;\ 0{,}30)$ указывает на то, что 60% семей получают 30% общего дохода всех семей и т.д.

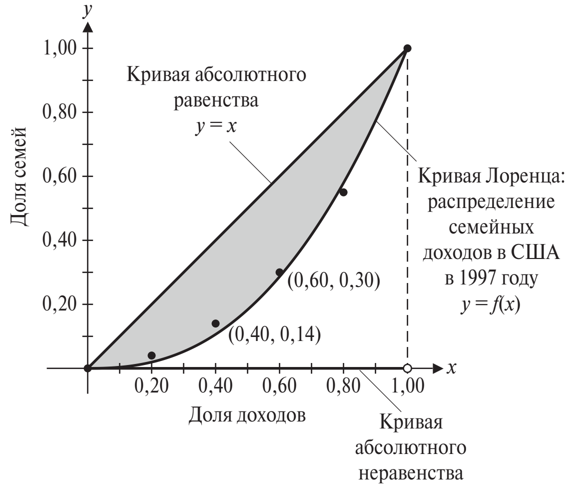


Рис. 12.10. Кривая Лоренца

Абсолютное равенство доходов наступило бы тогда, когда площадь между кривой Лоренца и кривой $y = x$ стала бы равна 0. В этом случае кривая Лоренца имела бы вид $y = x$, и все семьи получали бы равные доли общего дохода. Иначе говоря, 5% семей получало бы 5% дохода, 20% семей получало бы 20% дохода, 65% семей получало бы 65% дохода и т. д. Максимально возможная площадь между кривой Лоренца и кривой $y = x$ равна $\frac{1}{2}$, т.е. площади треугольника, лежащего под графиком $y = x$. В этом случае возникло бы **абсолютное неравенство** — весь доход был бы сосредоточен в руках одной семьи, а остальные семьи не имели бы дохода. В действительности кривая Лоренца лежит между этими двумя крайностями. Однако по мере роста окрашенной серым цветом области начинает расти неравенство в распределении доходов.

Отношение площади, ограниченной графиком $y = x$ и кривой Лоренца $y = f(x)$, к площади треугольника, лежащего под прямой $y = x$ от точки $x = 0$ до точки $x = 1$, называется показателем концентрации дохода. Площадь, ограниченная графиками $y = x$ и $y = f(x)$ равна интегралу $\int_0^1 [x - f(x)]\, dx$, а площадь треугольника под прямой $y = x$ равна $\frac{1}{2}$.

Показатель концентрации доходов

Если $y = f(x)$ — уравнение кривой Лоренца, то

$$\textbf{показатель концентрации доходов} = 2\int_0^1 [x - f(x)]\, dx.$$

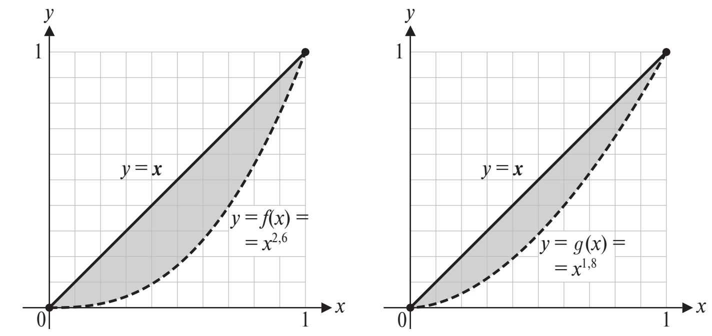
Показатель концентрации доходов всегда больше нуля и меньше единицы.

Нуль соответствует абсолютному равенству — доходы равномерно распределяются между всеми людьми, а единица соответствует абсолютному неравенству — один человек получает весь доход, а остальные не получают ничего.

Чем ближе показатель концентрации доходов к нулю, тем ближе распределение доходов к равномерному. Чем ближе этот показатель к единице, тем ближе положение к ситуации, когда весь доход сосредоточен в одних руках. Показатель концентрации доходов используется для сравнения распределения доходов в разные моменты времени, между различными группами людей, до и после выплаты налогов, между различными странами и т. п.

Пример 12.7 (Распределение доходов). Кривая Лоренца для распределения доходов в определенной стране в 1990 году описывается функцией $f(x) = x^{2,6}$. Экономисты предсказали, что кривая Лоренца в этой стране в 2010 году будет иметь вид $g(x) = x^{1,8}$. Вычислите показатель концентрации дохода для каждой кривой и объясните полученные результаты.

Решение. Кривые Лоренца показаны на рис. 12.11.



а) кривая Лоренца в 1990 году

б) прогнозируемая кривая Лоренца в 2010 году

Рис. 12.11. Кривые Лоренца

Показатель концентрации доходов 1990 году (см. рис. 12.11, *а*) равен

$$2\int_0^1 [x - f(x)]\,dx = 2\int_0^1 \left[x - x^{2,6}\right] dx = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3,6}x^{3,6}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3,6}\right) \approx 0{,}444.$$

Прогнозируемый показатель концентрации доходов в 2010 году (см. рис 12.11, *б*) равен

$$2\int_0^1 [x - g(x)]\,dx = 2\int_0^1 \left[x - x^{1,8}\right] dx = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2,8}x^{2,8}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2,8}\right) \approx 0{,}286.$$

Если предположение корректно, то показатель концентрации доходов будет падать, а доход в 2010 году будет более равномерно распределен по сравнению с 1990 годом. ■

Упражнение 12.7.
Повторите решение примера 12.7, если предполагаемая кривая Лоренца в 2010 году будет иметь вид $g(x) = x^{3,8}$. ■

Ответы к упражнениям

12.1. $A = \int\limits_{-1}^{3} \left(x^2+1\right) dx = \dfrac{40}{3} \approx 13{,}333.$

12.2. **1)** $A = \int\limits_{0}^{2} \left(9-x^2\right) dx = \dfrac{46}{3} \approx 15{,}333.$

2) $A = \int\limits_{2}^{3} \left(9-x^2\right) dx + \int_{3}^{4} \left(x^2-9\right) dx = 6.$

12.3. $A = \int\limits_{-1}^{2} \left[\left(x^2-1\right) - \left(-\dfrac{x}{2}-3\right)\right] dx = \dfrac{39}{4} = 9{,}75.$

12.4. $A = \int\limits_{-3}^{2} \left[\left(6-x^2\right) - x\right] dx = \dfrac{125}{6} \approx 20{,}833.$

12.5. $A = \int\limits_{-2}^{1} \left[(4-2x) - 2x^2\right] dx + \int\limits_{1}^{2} \left[2x^2 - (4-2x)\right] dx = \dfrac{38}{3} \approx 12{,}667.$

12.6. $0{,}443$.

12.7. Показатель концентрации доходов приблизительно равен $0{,}538$. В 2010 году доходы будут распределены менее равномерно.

Практикум 12.1

A *Задачи 1–6 связаны с рис. 12.12 а–г. В задачах 1–4 запишите определенные интегралы, описывающие площади областей, залитых серым цветом.*

1. Окрашенная серым цветом область на рис. 12.12, *б*.

2. Окрашенная серым цветом область на рис. 12.12, *а*.

3. Окрашенная серым цветом область на рис. 12.12, *в*.

4. Окрашенная серым цветом область на рис. 12.12, *г*.

*** 5.** Объясните, почему интеграл $\int_a^b h(x)\,dx$ не описывает площадь фигуры, лежащей между графиком $y = h(x)$ и осью x от точки $x = a$ до точки $x = b$ на рис. 12.12, *в*.

*** 6.** Объясните, почему интеграл $\int_a^b \left[-h(x)\right] dx$ описывает площадь фигуры, лежащей между графиком $y = h(x)$ и осью x от точки $x = a$ до точки $x = b$ на рис. 12.12, *в*.

В задачах 7–16 требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками с указанными уравнениями на заданных интервалах. Вычислите ответ с точностью до трех десятичных знаков.

7. $y = -2x - 1$; $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

8. $y = 2x - 4$; $y = 0$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

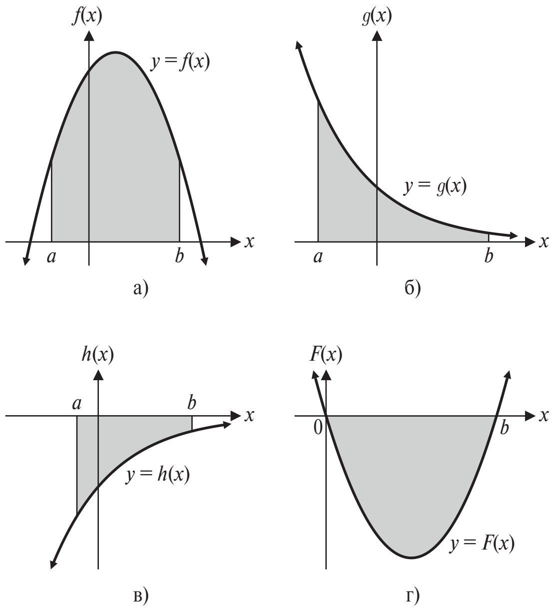


Рис. 12.12. Иллюстрации к задачам 1–6

9. $y = x^2 + 2$; $y = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

10. $y = 3x^2 + 1$; $y = 0$, $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

11. $y = x^2 - 4$; $y = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

12. $y = 3x^2 - 12$; $y = 0$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

13. $y = e^x$; $y = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

14. $y = e^{-x}$; $y = 0$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

15. $y = -1/t$; $y = 0$, $0{,}5 \leqslant t \leqslant 1$.

16. $y = -1/t$; $y = 0$, $0{,}1 \leqslant t \leqslant 1$.

Б *Задачи 17–26 касаются рисунков а и б. В задачах 17–24 запишите определенные интегралы, описывающие указанные заштрихованные площади на заданных отрезках.*

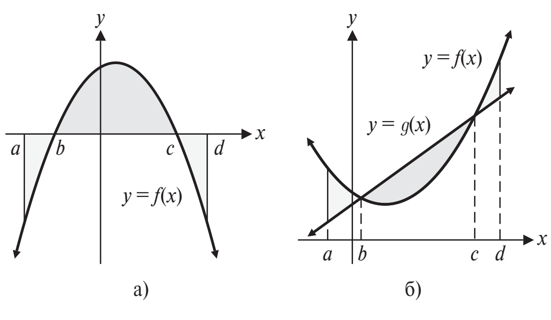


Рис. 12.13. Иллюстрации к задачам 17–26

17. На отрезке $[a, b]$ на рис. 12.13, *а*.

18. На отрезке $[c, d]$ на рис. 12.13, *а*.

19. На отрезке $[b, d]$ на рис. 12.13, *а*.

20. На отрезке $[a, c]$ на рис. 12.13, *а*.

21. На отрезке $[c, d]$ на рис. 12.13, *б*.

22. На отрезке $[a, b]$ на рис. 12.13, *б*.

23. На отрезке $[a, c]$ на рис. 12.13, *б*.

24. На отрезке $[b, d]$ на рис. 12.13, *б*.

***25.** Обращаясь к рис. 12.13, *б*, объясните, как, используя определенные интегралы и функции f и g, можно вычислить площадь фигуры, ограниченной двумя функциями от точки $x = a$ до точки $x = d$.

***26.** Обращаясь к рис. 12.13, *а*, объясните, как, используя определенные интегралы, можно вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком $y = f(x)$ и осью x от точки $x = a$ до точки $x = d$.

В задачах 27–42 требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками заданных функций на заданных отрезках (если они указанны). Вычислите ответ с точностью до трех десятичных знаков.

27. $y = -x$; $y = 0$; $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

28. $y = -x + 1$; $y = 0$; $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

29. $y = x^2 - 4$; $y = 0$; $0 \leqslant x \leqslant 3$.

30. $y = 4 - x^2$; $y = 0$; $0 \leqslant x \leqslant 4$.

31. $y = 4 - x^2$; $y = 0$; $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

32. $y = x^2 - 4$; $y = 0$; $-4 \leqslant x \leqslant 3$.

33. $y = -2x + 8$; $y = 12$; $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

34. $y = 2x + 6$; $y = 3$; $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

35. $y = 3x^2$; $y = 12$.

36. $y = x^2$; $y = 9$.

37. $y = 4 - x^2$; $y = -5$.

38. $y = x^2 - 1$; $y = 3$.

39. $y = x^2 + 1$; $y = 2x - 2$; $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

40. $y = x^2 - 1$; $y = x - 2$; $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

41. $y = e^{0,5x}$; $y = -\dfrac{1}{x}$; $1 \leqslant x \leqslant 2$.

42. $y = -\dfrac{1}{x}$; $y = -e^x$; $0{,}5 \leqslant x \leqslant 1$.

В задачах 43–46 постройте графики уравнений и найдите наиболее важные точки пересечения, используя графическую утилиту. Затем вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми. Запишите ответы с точностью до трех десятичных знаков.

43. $y = 3 - 5x - 2x^2$; $y = 2x^2 + x - 2$;

44. $y = 3 - 2x^2$; $y = 2x^2 - 4x$;

45. $y = -0{,}5x + 2{,}25$; $y = \dfrac{1}{x}$.

46. $y = x - 4{,}25$; $y = -\dfrac{1}{x}$.

B *В задачах 47–54 вычислите площадь, ограниченную графиками указанных функций на заданных отрезках (если они заданы). Вычислите ответ с точностью до трех десятичных знаков.*

47. $y = 10 - 2x$; $y = 4 + 2x$; $0 \leqslant x \leqslant 4$.

48. $y = 3x$; $y = x + 5$; $0 \leqslant x \leqslant 5$.

49. $y = x^3$; $y = 4x$.

50. $y = x^3 + 1$; $y = x + 1$.

51. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$; $y = x + 12$.

52. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; $y = x$.

53. $y = x^4 - 4x^2 + 1$; $y = x^2 - 3$.

54. $y = x^4 - 6x^2$; $y = 4x^2 - 9$.

В задачах 55–60 постройте графики уравнений и найдите наиболее важные точки пересечения, используя графическую утилиту. Затем вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми. Запишите ответы с точностью до трех десятичных знаков.

55. $y = x^3 - x^2 + 2$; $y = -x^3 + 8x - 2$.

56. $y = 2x^3 + 2x^2 - x$; $y = -2x^3 - 2x^2 + 2$.

57. $y = e^{-x}$; $y = 3 - 2x$.

58. $y = 2 - (x + 1)^2$; $y = e^{x+1}$.

59. $y = e^x$; $y = 5x - x^3$.

60. $y = 2 - e^x$; $y = x^3 + 3x^2$.

В задачах 61–64 вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками указанных функций на заданных отрезках (если они указаны), используя процедуру численного интегрирования, предусмотренную в графической утилите. Запишите ответы с точностью до трех десятичных знаков.

61. $y = e^{-x}$; $y = \sqrt{\ln x}$; $2 \leqslant x \leqslant 5$.

62. $y = x^2 + 3x + 1$; $y = e^{e^x}$; $-3 \leqslant x \leqslant 0$.

63. $y = e^{x^2}$; $y = x + 2$.

64. $y = \ln(\ln x)$; $y = 0{,}01x$.

Применение математики

В следующих задачах, чтобы яснее представлять себе каждое задание и правильно проинтерпретировать результаты, полезно построить графики.

Экономика и бизнес

*** 65.** *Добыча нефти.* Пользуясь данными, собранными в первые три года добычи, а также результатами геологических исследований, руководство нефтедобывающей компании выяснило, что через t лет после начала разработки нефть из месторождения будет выкачиваться со скоростью, равной

$$R(t) = \frac{100}{t + 10} + 10, \quad 0 \leqslant t \leqslant 15,$$

где $R(t)$ — скорость или темп добычи (в тысячах баррелей в год). Вычислите площадь между графиком R и осью t на отрезке $[5, 10]$ и объясните полученный результат.

*** 66.** *Добыча нефти.* Вернитесь к задаче 65. Вычислите площадь фигуры, лежащей между графиком R и осью t на отрезке $[5, 15]$, и объясните полученный результат, если установлено, что скорость добычи равна

$$R(t) = \frac{100t}{t^2 + 25} + 4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 25,$$

*** 67.** *Номинальный период эксплуатации.* Компания, предоставляющая услуги в сфере развлечений, сохраняет данные о прибыли, приносимой каждой видеоигрой, которая установлена в павильоне игровых автоматов. Предположим, что функции $C(t)$ и $R(t)$ описывают соответственно общие затраты и доходы (в тысячах долларов) через t лет после установки игры. Вычислите площадь между графиками C' и R' на отрезке оси t от 0 до конца номинального периода эксплуатации, если

$$C'(t) = 2 \quad \text{и} \quad R' = 9e^{-0{,}3t}.$$

*** 68.** *Номинальный период эксплуатации.* Повторите решение задачи 67, если

$$C'(t) = 2t \quad \text{и} \quad R' = 5te^{-0{,}1t^2}.$$

*** 69.** *Распределение доходов*. В рамках исследования влияния Второй мировой войны на экономику Соединенных Штатов Америки специалисты, используя данные Бюро переписи населения США, получили следующие кривые Лоренца для распределения доходов в Соединенных Штатах в 1935 и 1947 годах.

$$f(x) = x^{2{,}4}, \quad \text{Кривая Лоренца для 1935 года}$$
$$g(x) = x^{1{,}6}. \quad \text{Кривая Лоренца для 1947 года}$$

Вычислите показатель концентрации доходов для каждой кривой Лоренца и объясните полученный результат результат.

*** 70.** Используя данные Бюро переписи населения США, специалисты получили следующие кривые Лоренца для распределения доходов в Соединенных Штатах в 1962 и 1972 годах.

$$f(x) = \frac{3}{10}x + \frac{7}{10}x^2, \quad \text{Кривая Лоренца для 1962 года}$$
$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2. \quad \text{Кривая Лоренца для 1972 года}$$

Вычислите показатель концентрации доходов для каждой кривой Лоренца и объясните полученный результат.

*** 71.** WWW *Распределение национального богатства*. Кривые Лоренца можно также использовать в качестве относительной меры распределения совокупного богатства страны. Используя данные отчета Объединенного комитета по вопросам экономики конгресса США, специалисты получили следующие кривые Лоренца для распределения национального богатства Соединенных Штатов Америки в 1963 и 1983 годах:

$$f(x) = x^{10}, \quad \text{Кривая Лоренца для 1963 года}$$
$$g(x) = x^{12}. \quad \text{Кривая Лоренца для 1983 года}$$

Вычислите показатель концентрации доходов для каждой кривой Лоренца и объясните полученный результат.

*** 72.** *Распределение доходов*. Правительство небольшого государства планирует радикально изменить систему налогообложения для того, чтобы добиться более равномерного распределения доходов. Кривые Лоренца для текущего распределения доходов и для предполагаемого распределения доходов после принятия закона об изменении порядка налогообложения даны ниже. Вычислите показатель концентрации доходов для каждой кривой Лоренца. Обеспечит ли предложенное изменение более равномерное распределение доходов? Объясните свой ответ.

$$f(x) = x^{2{,}3}, \quad \text{Текущая кривая Лоренца}$$
$$g(x) = 0{,}4x + 0{,}6x^2. \quad \text{Предполагаемая кривая Лоренца после внесения изменений в налоговое законодательство}$$

73. *Распределение национального богатства.* Данные в таблице описывают распределение богатства в стране.

x	0	0,20	0,40	0,60	0,80	1
y	0	0,12	0,31	0,54	0,78	1

а) Используя метод квадратичной регрессии, составьте уравнение кривой Лоренца для этих данных.

б) Используя уравнение регрессии и процедуру численного интегрирования, вычислите приблизительное значение показателя концентрации доходов.

74. *Распределение национального богатства.* Вернемся к задаче 73.

а) Используя метод кубической регрессии, составьте уравнение кривой Лоренца для этих данных.

б) Используя уравнение кубической регрессии и процедуру численного интегрирования, вычислите приблизительное значение показателя концентрации доходов.

Биологические науки

*** 75.** *Биология.* Дрожжевая культура растет со скоростью $W'(t) = 0{,}3e^{0{,}1t}$ г/ч. Вычислите площадь фигуры, лежащей между графиком W' и осью t на отрезке $[0, 10]$ и объясните результаты.

*** 76.** **www** *Истощение природных ресурсов.* В Соединенных Штатах Америки мгновенная скорость изменения спроса на лесоматериалы в миллиардах кубических футов в год начиная с 1970 года ($t = 0$) изменялась приблизительно следующим образом

$$Q'(t) = 12 + 0{,}006t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 50.$$

Вычислите площадь фигуры, лежащей между графиком Q' и осью t на отрезке $[15, 20]$, и объясните полученный результат.

Социальные науки

*** 77.** *Обучение.* Исследование эффективности обучения проводится в классах с языковым уклоном общеобразовательной школы. В эксперименте использовался список из 50 слов. Целью исследовангия было измерение скорости запоминания слов из списка в различные моменты времени в течение непрерывного пятичасового учебного занятия. Было установлено, что средняя скорость запоминания всего списка слов обратно пропорциональна времени, потраченному на изучение, и приблизительно равна

$$V'(t) = \frac{15}{t}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 5.$$

Вычислите площадь фигуры, лежащей между графиком V' и осью t на отрезке $[2, 4]$, и объясните полученные результаты.

*** 78.** *Обучение.* Повторите решение задачи 77, если положить $V'(t) = 13/t^{1/2}$, а интервал заменить на $[1, 4]$.

12.2. Интегрирование в экономических задачах

- Плотность вероятностей
- Непрерывный источник доходов
- Будущая стоимость дохода от непрерывного источника
- Баланс спроса и предложения

В этом разделе описано множество важных примеров применения интегралов при решении самых разных экономических задач. В нем рассмотрены три независимые темы: плотности вероятностей, непрерывные потоки доходов, а также баланс спроса и предложения. Их можно рассматривать в любом порядке.

Плотность вероятностей

Рассмотрим возможность применения определенного интеграла для вычисления вероятностей с интуитивной точки зрения. Для более строгой трактовки данного предмета необходимо использовать специальное интегральное выражение $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, которое нами еще не рассматривалось.

Предположим, что возможным исходом эксперимента является произвольное действительное число на отрезке $[c, d]$. Например, переменная x может описывать коэффициент IQ, рост человека в дюймах или срок службы электрической лампочки в часах. Будем считать, что x — *непрерывная случайная величина*.

В определенных ситуациях можно вычислить функцию f, зависящую от независимой переменной x, которую можно использовать для вычисления вероятности того, что исход эксперимента x будет лежать в отрезке $[c, d]$. Такая функция, называемая **плотностью вероятностей**, должна удовлетворять следующим трем условиям (рис. 12.14).

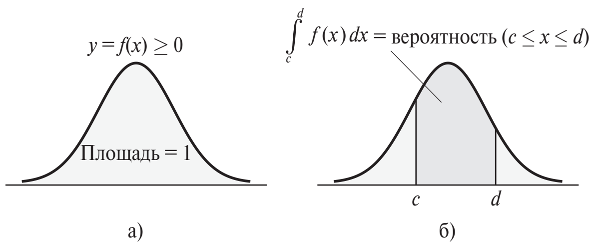


Рис. 12.14. Плотность вероятностей

1. $f(x) \geqslant 0$ для действительных x.
2. Площадь фигуры, лежащей под графиком функции $f(x)$ на интервале $(-\infty, \infty)$ равна единице.
3. Если $[c, d]$ — отрезок на интервале $(-\infty, \infty)$, то

$$P(c \leqslant x \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx.$$

Задание 12.3.

Пусть $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-x/4}, & \text{если } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$

1. Объясните, почему $f(x)\geqslant 0$ на интервале $(-\infty,\infty)$.
2. Вычислите интегралы $\int_0^{10}f\left(x\right)dx$, $\int_0^{20}f\left(x\right)dx$ и $\int_0^{30}f\left(x\right)dx$.
3. Исходя из решения п. 2, определите, чему предположительно равна площадь фигуры, лежащей под графиком $f(x)$ на интервале $(-\infty,\infty)$? ■

Пример 12.8 (Продолжительность телефонных разговоров). Предположим, что длительность телефонных разговоров (в минутах) по общественному телефону-автомату — это непрерывная случайная величина с функцией плотности вероятностей, показанной на рис. 12.15.

$$f\left(t\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-t/4}, & \text{если } t\geqslant 0,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

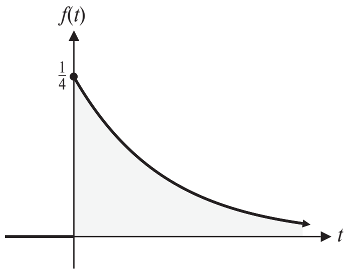


Рис. 12.15. Плотность вероятностей

1. Вычислите вероятность того, что случайно выбранный разговор будет длиться от 2 до 3 минут.
2. Найдите такое число b (с точностью до двух десятичных знаков), чтобы вероятность того, что случайно выбранный разговор продлится от 2 до b минут, была равна 0,5.

Решение.

1. $$P\left(2\leqslant t\leqslant 3\right)=\int\limits_2^3\frac{1}{4}e^{-t/4}dt=$$
$$=\left(-e^{-t/4}\right)\Big|_2^3=$$
$$=-e^{-3/4}+e^{-1/2}\approx 0{,}13.$$

2. Необходимо найти такое число b, при котором $P(2 \leqslant t \leqslant b) = 0{,}5$.

$$\int\limits_2^b \tfrac{1}{4} e^{-t/4} dt = 0{,}5.$$

$$-e^{-b/4} + e^{-1/2} = 0{,}5. \qquad \text{Решим относительно } b.$$

$$e^{-b/4} = e^{-0{,}5} - 0{,}5.$$

$$-\frac{b}{4} = \ln\left(e^{-0{,}5} - 0{,}5\right).$$

$$b = 8{,}96 \text{ мин.}$$

Таким образом, вероятность того, что случайно выбранный разговор продлится от 2 до 8,96 мин., равна 0,5. ■

Упражнение 12.8.

1. Вычислите вероятность того, что в примере 12.8 случайно выбранный разговор продлится 4 минуты или меньше.
2. Найдите такое число b (с точностью до двух десятичных знаков), чтобы вероятность того, что случайно выбранный разговор продлится b минут или меньше, была равна 0,9. ■

В домашнем задании 11.2 была рассмотрена одна из наиболее важных плотностей вероятности — **плотность нормального распределения вероятностей**, график которого показан на рис. 12.16.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \begin{array}{l} \mu \text{ — математическое ожидание} \\ \sigma \text{ — среднеквадратическое отклонение} \end{array}$$

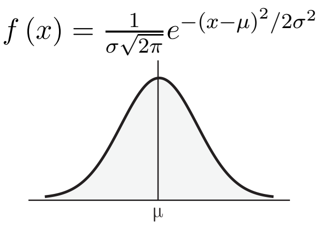


Рис. 12.16. Нормальная кривая

Можно показать (хотя эти и не просто), что площадь фигуры, лежащей под кривой нормального распределения на рис. 12.16 на интервале $(-\infty, \infty)$, точно равна единице. Поскольку интеграл $\int e^{-x^2} dx$ не выражается через элементарные функции (т.е. первообразную нельзя выразить в виде конечной комбинации элементарных функций), то вероятность

$$P(c \leqslant x \leqslant d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_c^d e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx,$$

как правило, вычисляется путем соответствующих замен переменных с последующим использованием статистических таблиц, содержащих значения площадей фигур фигур, лежащих под кривой нормального распределения (т.е. нормальной кривой с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$). Эти таблицы приводятся в большинстве учебников по математике. Такие таблицы можно построить, используя квадратурные формулы, описанные в разделе 11.5. Однако, как правило, для этих целей используются компьютеры, в которых применяются более совершенные вычислительные алгоритмы. В некоторых калькуляторах также предусмотрена функция вычисления площади фигуры, лежащей под кривой нормального распределения.

Непрерывный источник доходов

Для начала рассмотрим простой пример, имеющий очевидное решение, а затем обобщим полученные результаты на более сложные ситуации.

Предположим, некая женщина учредила доверительный фонд, который будет приносить ее племяннику 2000 долл. в год в течение десяти лет. Сколько денег получит племянник благодаря доверительному фонду в конце десятого года? Поскольку за весь период начислений было всего десять платежей по 2000 долл., он получит

$$10 \cdot 2000 = 20\,000 \text{ долл.}$$

Рассмотрим теперь эту же задачу с другой точки зрения, которая может оказаться полезной при решении более сложных задач. Предположим, что поток доходов непрерывен и скорость его равна 2000 долл. в год. На рис. 12.17 площадь фигуры, лежащей под графиком $f(t) = 2000$ между точками 0 и t, представляет собой доход, накопленный через t лет, считая от момента учреждения доверительного фонда. Например, для $t = \frac{1}{4}$ года доход будет равен $\frac{1}{4} \cdot 2000 = 500$ долл., для $t = \frac{1}{2}$ года доход будет равен $\frac{1}{2} \cdot 2000 = 1000$ долл., для $t = 1$ год доход будет равен $1 \cdot 2000 = 2000$ долл., для $t = 5{,}3$ года доход будет равен $5{,}3 \cdot 2000 = 10\,600$ долл., а для $t = 10$ лет доход будет равен $10 \cdot 2000 = 20\,000$ долл. Общий доход за десятилетний период, т.е. площадь фигуры, лежащей под графиком функции $f(t) = 2000$ между точками 0 и 10, представляет собой определенный интеграл

$$\int_0^{10} 2000 dt = 2000t\Big|_0^{10} = 2000 \cdot 10 - 2000 \cdot 0 = 20\,000 \text{ долл.}$$

Обобщим теперь идею непрерывного источника доходов на менее очевидную задачу.

Рис. 12.17. Непрерывный доход

Пример 12.9 (Непрерывный источник доходов). Скорость изменения доходов, получаемых от торгового автомата, размещенного в аэропорту, равна

$$f(t) = 5000e^{0,04t},$$

где t — время в годах с момента установки автомата. Вычислите общий доход, полученный от автомата за первые пять лет эксплуатации.

Решение. Площадь фигуры, лежащей под графиком функции скорости изменения дохода между точками 0 и 5, описывает общее изменение дохода за первые пять лет (рис. 12.18) и, следовательно, равна определенному интегралу.

$$\text{Валовый доход} = \int\limits_0^5 5000e^{0,04t}dt =$$
$$= 125\,000e^{0,04t}\Big|_0^5 =$$
$$= 125\,000e^{0,04\cdot 5} - 125\,000e^{0,04\cdot 0} =$$
$$= 152\,675 - 125\,000 =$$
$$= 27\,675 \text{ долл.}$$

Результат округлен до ближайшего доллара

Таким образом, за первые пять лет эксплуатации торговый автомат принес доход в размере 27 675 долл. ■

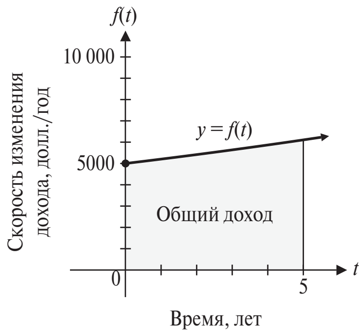


Рис. 12.18. Непрерывный источник доходов

Упражнение 12.9.
Возвращаясь к примеру 12.9, вычислите общий доход (с точностью до ближайшего доллара), полученный в течение вторых пяти лет эксплуатации автомата. ■

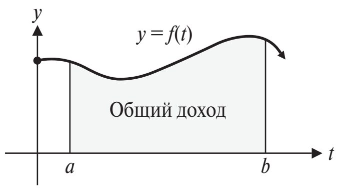
В действительности доход от торгового автомата, как правило, не получают в виде единичного платежа в конце года, несмотря на то, что скорость высчитывается на годовой основе. Доход обычно собирается ежедневно или еженедельно. В задачах подобного типа важным предположением является то, что доход в действительности поступает

непрерывным потоком, т.е. доход является непрерывной функцией времени, а скорость изменения — мгновенной. Скорость изменения называется **скоростью непрерывного потока** доходов.

Общий доход при непрерывном потоке доходов

Если $f(t)$ — скорость изменения непрерывного потока доходов, **общий доход**, полученный в течение периода, прошедшего с момента $t = a$ до момента $t = b$, равен

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$



Будущая стоимость дохода от непрерывного источника

В разделе 10.1 рассматривалась формула вычисления непрерывно начисляемых сложных процентов

$$A = Pe^{rt},$$

где P — сумма инвестиции (или текущая стоимость), A — накопленный капитал (или будущая стоимость), r — скорость непрерывного начисления сложных процентов, рассчитываемых по годовой ставке (выражается десятичным числом), а t — время в годах. Например, если инвестиции суммой 10 000 долларов за год увеличивается на 12 непрерывно начисляемых сложных процентов, то через пять лет их стоимость (с точностью до доллара) будет равна

$$A = 10\,000e^{0{,}12\cdot 5} = 18\,221 \text{ долл.}$$

Обобщим концепцию расчета будущей стоимости на доход, получаемый от непрерывного источника. Предположим, что $f(t)$ — скорость изменения непрерывного потока доходов, а полученный доход сразу же инвестируется под непрерывно начисляемые проценты с годовой ставкой r. Нам уже известно, как вычислить доход от непрерывного источника, полученный через T лет, но как определить будущую стоимость такого дохода и величину начисляемых на него процентов? Поскольку доход поступает непрерывным потоком, то нельзя использовать формулу $A = Pe^{rt}$. Она справедлива только для одноразового вклада P, но не для непрерывного потока инвестиций. Вместо нее следует воспользоваться суммой Римана, которая позволит применить формулу $A = Pe^{rt}$ повторно. Вначале разделим временной отрезок $[0, T]$ на n равных сегментов длиной Δt и на каждом из них выберем произвольную точку c_k, как показано на рис. 12.19.

Общий доход, полученный за период времени от $t = t_{k-1}$ до $t = t_k$, равен площади фигуры, расположенной под графиком $f(t)$ на этом подынтервале, и приблизительно равен $f(c_k)\Delta t$, т.е. площади закрашенного серым цветом прямоугольника на рис. 12.19. Доход, полученный за этот период времени, будет представляться процентами, начисляемыми в течение приблизительно $T - c_k$ лет. Таким образом, если воспользоваться формулой будущей стоимости $A = Pe^{rt}$ для $P = f(c_k)\Delta t$ и $t = T - c_k$, то будущая стоимость дохода, получаемого за период времени от $t = t_{k-1}$ до $t = t_k$, будет приблизительно равна

$$f(c_k)\,\Delta t e^{(T-c_k)r}.$$

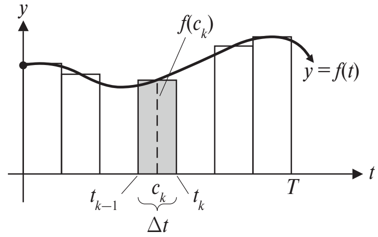


Рис. 12.19. Разбиение интервала интегрирования

Сумма приблизительных значений, подсчитанная на n подынтервалах разбиения, равна

$$f(c_1)\,\Delta t e^{(T-c_1)r} + f(c_2)\,\Delta t e^{(T-c_2)r} + \cdots + f(c_k)\,\Delta t e^{(T-c_k)r} = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, e^{r(T-c_k)}\Delta t.$$

Эта сумма имеет вид суммы Римана, и предел этой суммы равен определенному интегралу (см. раздел 11.5). Таким образом, *будущая стоимость* дохода от непрерывного источника равна

$$FV = \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\, e^{r(T-t)} dt.$$

Поскольку r и T — константы, можно записать следующую формулу.

$$FV = \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\, e^{rT} e^{-rt} dt = e^{rT} \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\, e^{-rt} dt. \qquad (12.1)$$

Последнее выражение использовать намного удобнее, поскольку найти значение такого интеграла проще, чем в исходном выражении.

Будущая стоимость дохода от непрерывного источника

Если $f(t)$ — скорость изменения непрерывного потока доходов, $0 \leqslant t \leqslant T$ и доход инвестируется под непрерывно начисляемой процентной ставкой r, то **будущая стоимость $\boldsymbol{FV}$** инвестиций по истечении T лет будет равна

$$FV = \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\, e^{r(T-t)} dt = e^{rT} \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\, e^{-rt} dt.$$

Будущая стоимость дохода от непрерывного источника равна накопленному капиталу, полученному от непрерывного источника (доход и проценты) за T лет.

Вернемся теперь к доверительному фонду, учрежденному любящей тетушкой для своего племянника. Предположим, что получаемые из доверительного фонда 2000 долл. он вкладывал по мере их поступления под восемь непрерывно начисляемых сложных процентов. Рассмотрим непрерывный поток доходов со скоростью 2000 долл. в год. Какой будет стоимость капитала (с точностью до доллара) в конце десятого года? Используя определенный интеграл для вычисления будущей стоимости, получим

$$\boldsymbol{FV = e^{rT} \int\limits_{0}^{T} f\left(t\right) e^{-rt} dt} \ .$$

$$FV = e^{0,08 \cdot 10} \int\limits_{0}^{10} 2000 e^{-0,08t} dt = \qquad \boldsymbol{r = 0{,}08, T = 10, f\left(t\right) = 2000}.$$

$$= 2000 e^{0,8} \int\limits_{0}^{10} e^{-0,08t} dt =$$

$$= 2000 e^{0,8} \left[\frac{e^{-0,08t}}{-0{,}08}\right]\Bigg|_{0}^{10} =$$

$$= -25\,000 e^{0,8} \left[e^{-0,08 \cdot 10} - e^{-0,08 \cdot 0}\right] = 30\,639 \text{ долл.}$$

Таким образом, спустя десять лет племянник получит 30 639 долл., включая проценты. Сколько составят проценты? Поскольку он получил 20 000 долл. из доверительного фонда, проценты равны разнице между будущей стоимостью и доходом. Таким образом, величина

$$30\,639 - 20\,000 = 10\,639 \text{ долл.}$$

представляет собой проценты, начисленные на доход, полученный из доверительного фонда за десятилетний период.

Задание 12.4.

Предположим, что доверительный фонд учрежден таким образом, что племянник будет получать 2000 долл. в год в течение 20 лет от непрерывного источника доходов, вкладываемые под восемь непрерывно начисляемых сложных процентов. Когда стоимость капитала достигнет 50 000 долл.? ■

Применим теперь аналогичный способ анализа к примеру 12.9, в котором рассматривается задача об игровых автоматах.

Пример 12.10 (Будущая стоимость от непрерывного источника доходов). Используя для вычисления скорости изменения доходов, который приносят торговый автомат в примере 12.9, формулу

$$f(t) = 5000 e^{0,04t},$$

вычислите будущую стоимость капитала при непрерывно начисляемой ставке, равной 12%, в течение пяти лет, и общую сумму начисленных процентов. Запишите ответ с точностью до доллара.

Решение. Воспользовавшись формулой

$$FV = e^{rT} \int\limits_{0}^{T} f\left(t\right) e^{-rt} dt$$

для $r = 0{,}12$, $T = 5$ и $f(t) = 5000e^{0{,}04t}$, получим

$$\begin{aligned}
FV &= e^{0{,}12\cdot 5}\int\limits_0^5 5000e^{0{,}04t}e^{-0{,}12t}dt = \\
&= 5000e^{0{,}6}\int\limits_0^5 e^{-0{,}08t}dt = \\
&= 5000e^{0{,}6}\left(\frac{e^{-0{,}08t}}{-0{,}08}\right)\Bigg|_0^5 = \\
&= 5000e^{0{,}6}\left(-12{,}5e^{-0{,}4} + 12{,}5\right) = \\
&= 37\,545 \text{ долл.} && \text{Округлено до ближайшего доллара}
\end{aligned}$$

Таким образом, будущая стоимость капитала при 12 непрерывно начисляемых сложных процентах в течение пяти лет будет равна 37 545 долл.

В примере 12.9 было показано, что общий доход, получаемый от торгового автомата за пятилетний период, равен 27 675 долл. Разница между будущей стоимостью и доходом равна начисленным процентам. Таким образом, величина

$$37\,545 - 27\,675 = 9870 \text{ долл.}$$

представляет собой проценты, начисленные на доход, получаемый от торгового автомата в течение пятилетнего периода. ■

Упражнение 12.10.
Повторите решение примера 12.10 при ставке, равной девяти непрерывно начисляемым сложным процентам. ■

Баланс спроса и предложения

Пусть $p = D(x)$ — уравнение зависимости цены от спроса на товар, где x — объем товара, приобретаемого по цене p, долл. за единицу. Предположим, что $\bar{p}$ — это текущая цена, а $\bar{x}$ — это объем товара, продаваемого по такой цене. Кривая зависимости цены от спроса, приведенная на рис. 12.20, указывает на то, что если цена выше $\bar{p}$, то спрос x меньше, чем $\bar{x}$, хотя часть покупателей все же приобретает товар по более высокой цене. Покупатели которые согласны платить больше, чем $\bar{p}$, но получают возможность приобрести его по цене $\bar{p}$, сэкономят. Давайте попробуем вычислить общую сумму, сэкономленную всеми покупателями, которые согласны заплатить за этот товар цену, превышающую $\bar{p}$.

Чтобы решить задачу, рассмотрим интервал $[c_k, c_k + \Delta x]$, где $c_k + \Delta x < \bar{x}$. Если бы на этом интервале цена оставалась постоянной, экономия на каждой единице равнялась бы разнице между $D(c_k)$, ценой, которую готов заплатить покупатель, и $\bar{p}$, ценой, которую он платит в действительности. Поскольку Δx описывает объем товара, приобретенного на заданном интервале, то общая сэкономленная всеми покупателями сумма будет приблизительно равна величине

$$[D(c_k) - \bar{p}]\,\Delta x, \quad \text{(Экономия на единице товара)} \cdot \text{(Объем товара)}$$

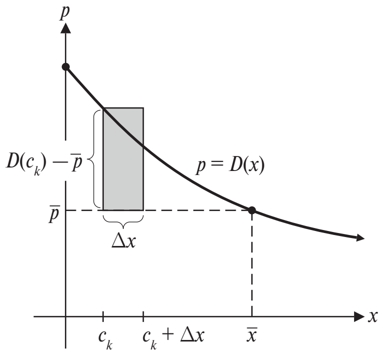


Рис. 12.20. График зависимости цены от спроса

которая представлена площадью окрашенного серым цветом прямоугольника, показанного на рис. 12.20. Если разделить отрезок $[0, \bar{x}]$ на n равных сегментов, общая сэкономленная всеми покупателями сумма будет приблизительно равна величине

$$[D(c_1) - \bar{p}]\,\Delta x + [D(c_2) - \bar{p}]\,\Delta x + \cdots + [D(c_n) - \bar{p}]\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} [D(c_k) - \bar{p}]\,\Delta x,$$

которую можно рассматривать как сумму Римана для следующего интеграла.

$$\int\limits_0^{\bar{x}} [D(x) - \bar{p}]\,dx.$$

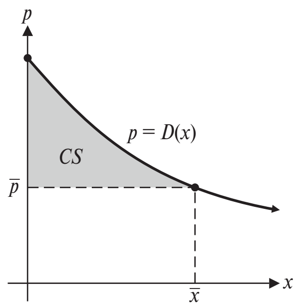
Таким образом, *потребительская выгода* равна этому интегралу.

Потребительская выгода

Если $(\bar{x}, \bar{p})$ — точка на графике зависимости цены от спроса $p = D(x)$ для определенного товара, то **потребительская выгода CS** при цене $\bar{p}$ равна величине

$$CS = \int\limits_0^{\bar{x}} [D(x) - \bar{p}]\,dx,$$

представленной площадью фигуры, лежащей между графиками $p = \bar{p}$ и $p = D(x)$ от точки $x = 0$ до точки $x = \bar{x}$, как показано на следующем рисунке.



Потребительская выгода соответствует общей сумме, сэкономленной потребителями, которые согласны заплатить за товар больше, чем $p = \bar{p}$, но все же имеют возможность приобрести его по цене $p = \bar{p}$.

Пример 12.11 (Потребительская выгода). Вычислите потребительскую выгоду при цене 8 долл., если зависимость цены от спроса представлена уравнением

$$p = D(x) = 20 - 0{,}05x.$$

Решение.

Этап 1. Вычислим величину $\bar{x}$, т.е. спрос при цене $\bar{p} = 8$.

$$\begin{aligned} \bar{p} &= 20 - 0{,}05\bar{x}. \\ 8 &= 20 - 0{,}05\bar{x}. \\ 0{,}05\bar{x} &= 12. \\ \bar{x} &= 240. \end{aligned}$$

Этап 2. Построим график, как показано на рис. 12.21.

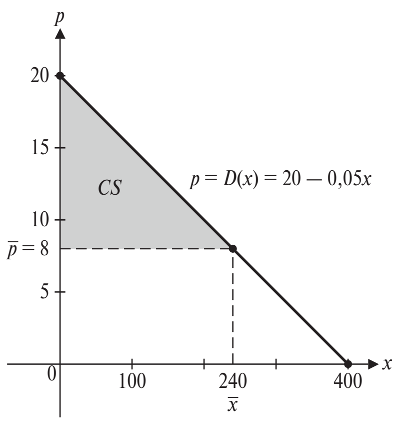


Рис. 12.21. График зависимости цены от спроса

Этап 3. Вычислим потребительскую выгоду (площадь окрашенной серым цветом области на графике).

$$
\begin{aligned}
CS &= \int\limits_0^{\bar{x}} \left[D\left(x\right) - \bar{p}\right] dx = \\
&= \int\limits_0^{240} \left(20 - 0{,}05x - 8\right) dx = \\
&= \int\limits_0^{240} \left(12 - 0{,}05x\right) dx = \\
&= \left(12x - 0{,}025x^2\right) \Big|_0^{240} = \\
&= 2880 - 1440 = 1440 \text{ долл.}
\end{aligned}
$$

Таким образом, общая сумма, сэкономленная покупателями, которые согласны заплатить за товар более высокую цену, равна 1440 долл. ■

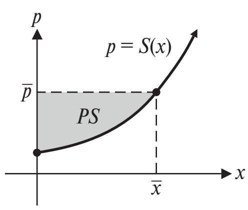
Упражнение 12.11.
Повторите решение примера 12.11 для цены 4 долл. ■

Если $p = S(x)$ — уравнение зависимости цены от предложения товара, $\bar{p}$ — текущая цена, а $\bar{x}$ — текущее предложение, то некоторые производители все же будут согласны предложить некоторый объем товара по цене, ниже чем $\bar{p}$. Дополнительный доход, который они получат при более высокой цене, называются *выгодой производителей*. Его величину также можно вычислить с помощью определенного интеграла (аналогично тому, как рассчитывалась потребительская выгода).

Выгода производителей
Если $(\bar{x}, \bar{p})$ — точка на графике зависимости цены от предложения $p = S(x)$, то **выгода производителей PS** при цене $\bar{p}$ равна величине

$$
PS = \int\limits_0^{\bar{x}} \left[\bar{p} - S\left(x\right)\right] dx,
$$

представленной площадью фигуры, ограниченной графиками $p = \bar{p}$ и $p = S(x)$ от точки $x = 0$ до точки $x = \bar{x}$, как показано на рисунке.



Выгода производителей соответствует общему дополнительному доходу производителей, которые согласны предложить товар по цене, ниже чем $p = \bar{p}$, хотя все еще могут продать его по цене $p = \bar{p}$.

Пример 12.12 (Выгода производителей). Вычислите выгоду производителей при цене 20 долл. при следующей зависимости цены от предложения.

$$p = D(x) = 2 + 0{,}0002x^2.$$

Решение.

Этап 1. Вычислим $\bar{x}$, т.е. предложение при цене $\bar{p} = 20$:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= 2 + 0{,}0002\bar{x}^2; \\ 20 &= 2 + 0{,}0002\bar{x}^2; \\ 0{,}0002\bar{x}^2 &= 18; \\ \bar{x}^2 &= 90\,000; \\ \bar{x} &= 300. \end{aligned}$$

Это единственное решение, поскольку $\bar{x} \geqslant 0$.

Этап 2. Построим график, как показано на рис. 12.22.

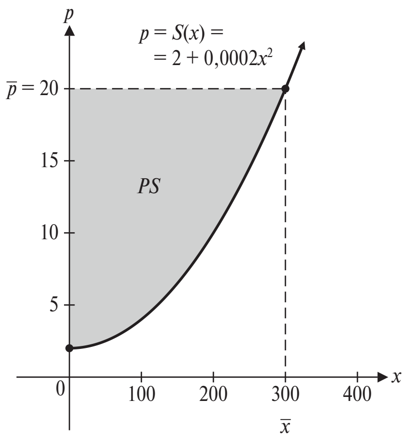


Рис. 12.22. График зависимости цены от предложения

Этап 3. Вычислим выгоду производителей (представленную площадью окрашенной серым цветом области на графике).

$$PS = \int_0^{\bar{x}} [\bar{p} - S(x)]\,dx = \int_0^{300} \left[20 - \left(2 + 0{,}0002x^2\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^{300} \left(18 - 0{,}0002x^2\right) dx = \left(18x - 0{,}0002\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{300} =$$

$$= 5400 - 1800 = 3600 \text{ долл.}$$

Таким образом, общая выгода производителей, которые согласны предложить товар по более низкой цене, равна 1440 долл. ■

Упражнение 12.12.
Повторите решение примера 12.12 для цены 4 долл. ■

На рынке конкурентных рынках цена товара определяется балансом между предложением и спросом. Если $p = D(x)$ и $p = S(x)$ — это соответственно уравнения зависимостей цены от спроса и предложения товара, а $(\bar{x}, \bar{p})$ — точка пересечения графиков этих уравнений, то число $\bar{p}$ называется **равновесной ценой**, а число $\bar{x}$ — **равновесным количеством**. Равновесная цена определяет выгоду, как потребителей, так и производителей товара.

Пример 12.13 (Равновесная цена и выгода). Вычислите равновесную цену, а затем — выгоду потребителей и производителей при равновесном уровне цен, если

$$p = D(x) = 20 - 0{,}05x \qquad \text{и} \qquad p = S(x) = 2 + 0{,}0002x^2.$$

Решение. **Этап 1.** Найдем точку равновесия. Приравняем $D(x)$ к $S(x)$ и решим полученное уравнение.

$$\begin{aligned} D(x) &= S(x); \\ 20 - 0{,}05x &= 2 + 0{,}0002x^2; \\ 0{,}0002x^2 + 0{,}05x - 18 &= 0; \\ x^2 + 250x - 90\,000 &= 0; \\ x &= 200;\ -450. \end{aligned}$$

Поскольку x не может быть отрицательным, то существует единственное решение $x = 200$. Равновесную цену можно найти, используя уравнение для $D(x)$ или $S(x)$. Чтобы проверить результат, воспользуемся обоими уравнениями.

$$\bar{p} = D\,(200) = 20 - 0{,}05 \cdot 200 = 10. \qquad \bar{p} = S\,(200) = 2 + 0{,}0002 \cdot 200^2 = 10.$$

Таким образом, равновесная цена составляет $\bar{p} = 10$, а равновесное количество — $\bar{x} = 200$.

Этап 2. Построим кривые, как показано на рис. 12.23.

Этап 3. Вычислим потребительскую выгоду.

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{\bar{x}} [D\,(x) - \bar{p}]\, dx = \\ &= \int_0^{200} (20 - 0{,}05x - 10)\, dx = \\ &= \int_0^{200} (10 - 0{,}05x)\, dx = \\ &= \left(10x - 0{,}025x^2\right)\Big|_0^{200} = \\ &= 2000 - 1000 = 1000 \text{ долл.} \end{aligned}$$

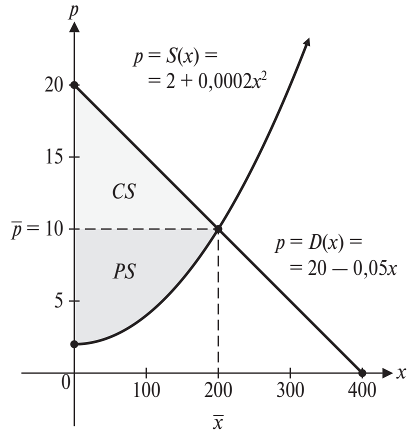


Рис. 12.23. Кривые зависимости цены от спроса и предложения

Этап 4. Вычислим выигрыш производителя.

$$
\begin{aligned}
PS &= \int_0^{\bar{x}} [\bar{p} - S(x)]\,dx = \\
&= \int_0^{200} \left(10 - \left(2 + 0{,}0002x^2\right)\right) dx = \\
&= \int_0^{200} \left(8 - 0{,}0002x^2\right) dx = \\
&= \left(8x - 0{,}0002\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{200} = \\
&= 1600 - \frac{1600}{3} \approx 1067 \text{ долл.}
\end{aligned}
$$

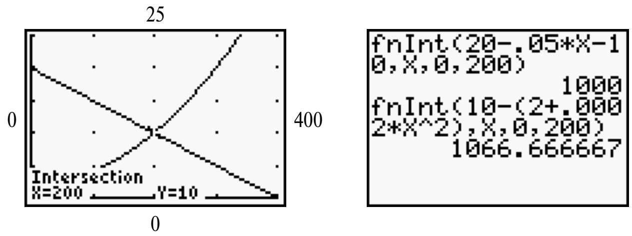
■

В графической утилите предусмотрен альтернативный подход к вычислению равновесной точки из примера 12.13 (рис. 12.24, *а*). Чтобы вычислить выгоду потребителей и производителей, можно прибегнуть к методу численного интегрирования (рис. 12.22, *б*).

Упражнение 12.13.
Повторите решение примера 12.13 для

$$p = D(x) = 25 - 0{,}001x^2 \quad \text{и} \quad p = S(x) = 5 + 0{,}1x.$$

■



а) б)

Рис. 12.24. Вычисление выгоды в графической утилите

Ответы к упражнениям

12.8. 0,63.

12.9. 9,21 мин.

12.10. 33 803 долл.

12.11. $FV = 34\,691$ долл.; проценты $= 7016$ долл.

12.12. 2560 долл.

12.13. 133 долл.

12.14. $\bar{p} = 15$; $CS = 667$ долл.; $PS = 500$ долл.

Практикум 12.2

А *В задачах 1–4 требуется вычислить значение каждого определенного интеграла с точностью до двух десятичных знаков.*

1. $\int\limits_0^5 e^{-0,08t}dt.$ **2.** $\int\limits_0^5 e^{0,08(5-t)}dt.$

3. $\int\limits_0^{30} e^{0,06t}e^{0,12(30-t)}dt.$ **4.** $\int\limits_0^{20} 1000e^{0,03t}e^{0,15(20-t)}dt.$

Б *В задачах 5 и 6, прежде чем вычислять значение выражений, определите, какие из них равны между собой. Затем вычислите значение каждого выражения с точностью до двух десятичных знаков.*

5. а) $\int\limits_0^8 e^{0,07(8-t)}dt.$ **б)** $\int\limits_0^8 \left(e^{0,56} - e^{0,07t}\right) dt.$

в) $e^{0,56}\int\limits_0^8 e^{-0,07t}dt.$

6. **а)** $\int\limits_0^{10} 2000e^{0,05t}e^{0,12(10-t)}dt.$ **б)** $2000e^{1,2}\int\limits_0^{10} e^{-0,07t}dt.$

в) $2000e^{0,05}\int\limits_0^{10} e^{0,12(10-t)}dt.$

Применение математики

Экономика и бизнес

Если не указано противное, вычислите все задачи с точностью до доллара.

7. Ожидаемый срок службы (в годах) определенной модели радиоприемников — это непрерывная случайная величина с плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 2/(x+2)^2, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а) Вычислите вероятность того, что случайно выбранный радиоприемник прослужит максимум 6 лет.

б) Вычислите вероятность того, что случайно выбранный радиоприемник прослужит от 6 до 12 лет.

в) Постройте график $y = f(x)$ для $[0, 12]$ и закрасьте область, площадь которой определяет ответ на задачу п. *а*.

8. Срок хранения (в годах) определенной марки батареек для ручных фонариков — это непрерывная случайная величина с плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x+1)^2, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а) Вычислите вероятность того, что случайно выбранная батарейка имеет срок хранения, не превышающий трех лет.

б) Вычислите вероятность того, что случайно выбранная батарейка сохранит рабочие характеристики от 3 до 9 лет.

в) Постройте график $y = f(x)$ на отрезке $[0, 10]$ и закрасьте область, площадь которой определяет ответ на задачу п. *а*.

9. Решая задачу 7, найдите такое число d, при котором вероятность того, что случайно выбранный радиоприемник прослужит не больше d лет, равна 0,8.

10. Решая задачу 8, найдите такое число d, при котором вероятность того, что случайно выбранная батарейка имеет срок хранения не более d лет, равна 0,5.

11. Производитель дает гарантию на изделие сроком в один год. Время, за которое изделие выходит из строя после его продажи, описывается плотностью вероятностей

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}01e^{-0{,}01t}, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где t — время, мес. Какова вероятность того, что у случайно выбранного покупателя изделие выйдет из строя в течение следующих отрезков времени?

а) В течение гарантийного периода.

б) В течение второго года после покупки.

12. В определенном городе дневное потребление воды (в тысячах галлонов) в расчете на один дом является непрерывной случайной величиной с плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}15e^{-0{,}15x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычислите вероятность того, что в случайно выбранном доме будет потребляться следующий объем воды.

а) Не более 400 галлонов воды в день.

б) От 300 до 600 галлонов воды в день.

13. Какова вероятность того, что изделие в задаче 11 прослужит по крайней мере один год? (*Подсказка*. Напомним, что общая площадь фигуры, расположенной под кривой плотности вероятностей, равна единице.)

14. Какова вероятность того, что жилой дом в задаче 12 будет потреблять более 400 галлонов воды в день? (См. подсказку к задаче 13.)

15. Вычислите общий доход, полученный благодаря непрерывному источнику доходов за первые пять лет, если скорость изменения дохода равна $f(t) = 2500$ долл. в год.

16. Вычислите общий доход, полученный благодаря непрерывному источнику доходов за первые десять лет, если скорость изменения дохода равна $f(t) = 3000$ долл. в год.

*** 17.** Объясните результат, полученный в задаче 15, построив график и дав его словесное описание.

*** 18.** Объясните результат, полученный в задаче 16, построив график и дав его словесное описание.

19. Вычислите общий доход, полученный благодаря непрерывному изменения дохода доходов за первые два года, если скорость изменения дохода равна $f(t) = 400e^{0{,}05t}$ долл. в год.

20. Вычислите общий доход, полученный благодаря непрерывному источнику доходов за первые три года, если скорость изменения дохода равна $f(t) = 600e^{0{,}06t}$ долл. в год.

*** 21.** Объясните результат, полученный в задаче 19, построив график и дав его словесное описание.

*** 22.** Объясните результат, полученный в задаче 20, построив график и дав его словесное описание.

23. **WWW** Начиная со своего двадцатипятилетия, человек ежегодно вносит на пенсионный счет сумму, равную 2000 долл. Будем считать ежегодные вклады непрерывным источником доходов. Какая сумма будет накоплена на счете через 40 лет, когда человек выйдет на пенсию в возрасте 65 лет, если деньги на счету вложены под пять непрерывно начисляемых сложных процента? Сколько будут составлять проценты от конечной суммы?

24. Предположим, что в задаче 23 человек начал регулярно вносить вклады на пенсионный счет в возрасте 30 лет, а сумма на счету размещена под шесть непрерывно начисляемых сложных процентов. Будем считать ежегодные вклады непрерывным источником доходов. Сколько денег будет находиться на счете через 35 лет, когда человек выйдет на пенсию в возрасте 65 лет? Сколько будут составлять проценты от конечной суммы?

25. Вычислите будущую стоимость капитала, представленного доходом от непрерывного источника, размещенного под 6,25 непрерывно начисляемых процента. Скорость изменения дохода от непрерывного источника составляет $f(t) = 1650e^{-0{,}02t}$ долл. в год.

26. Вычислите будущую стоимость капитала, представленного доходом от непрерывного источника, размещенного под 5,75 непрерывно начисляемых процента. Скорость изменения дохода от непрерывного источника составляет $f(t) = 2000e^{0{,}06t}$ долл. в год.

27. Вычислите проценты, оговоренные в задаче 25.

28. Вычислите проценты, оговоренные в задаче 26.

29. Инвестору предоставлен выбор между двумя вариантами вложения капитала: в известный магазин одежды и в новый компьютерный магазин. Каждый вариант требует одинаковых начальных вложений и каждый из них будет представлять непрерывный источник доходов в виде десяти непрерывно начисляемых сложных процентов. Скорость изменения доходов от магазина одежды равна $f(t) = 12\,000$ долл. в год, а скорость изменения доходов от компьютерного магазина предположительно будет равна $g(t) = 10\,000e^{0{,}05t}$ долл. в год. Сравнивая будущие стоимости инвестиций, определите, какая из них представляет лучший выбор для последующих пяти лет.

30. Повторите решение задачи 29. Какая из инвестиций представляет лучший выбор для последующих 10 лет?

31. У инвестора есть 10 000 долл., которые можно вложить либо в облигации, которые подлежат оплате через пять лет, либо в бизнес-проект, представляющий непрерывный источник доходов в течение следующих пяти лет со скоростью изменения $f(t) = 2000$ долл. в год. Какой вариант лучше, если и облигации, и непрерывный источник доходов приносят восемь непрерывно начисляемых сложных процента в год?

32. Повторите решение задачи 31. Как лучше инвестировать имеющийся капитал, если скорость изменения доходов для бизнес-проекта равна $f(t) = 3000$ долл. в год?

33. Предприятие планирует купить оборудование, которое будет приносить непрерывный поток доходов в течение восьми лет со скоростью равной $f(t) = 9000$ долл. в год. Если непрерывный поток доходов размещен под 6,95 непрерывно начисляемых сложных процентов, каким должен равнозначный вклад, размещенный под такой же процентной ставкой, чтобы обеспечить такую же будущую стоимость, как и непрерывный поток доходов? (Такой вклад называется **текущей стоимостью непрерывного потока доходов**.)

34. Вернитесь к задаче 33. Вычислите текущую стоимость непрерывного потока доходов при ставке, равной 7,65 непрерывно начисляемых сложных процентов, в течение 12 лет, если скорость изменения доходов равна $f(t) = 1000e^{0,03t}$ долл. в год.

35. Вычислите будущую стоимость при ставке, равной r непрерывно начисляемых сложных процентов, в течение T лет при скорости изменения непрерывного потока доходов $f(t) = k$, где k — постоянная.

36. Вычислите будущую стоимость при ставке, равной r непрерывно начисляемых сложных процентов, в течение T лет при скорости изменения непрерывного потока доходов $f(t) = ke^{ct}$, где c и k — постоянные, $c \neq r$.

37. Вычислите потребительскую выгоду при при цене товара $\bar{p} = 150$ долл. и следующей зависимости цены от спроса.

$$p = D(x) = 400 - 0{,}05x.$$

38. Вычислите выигрыш потребителя при цене товара $\bar{p} = 120$ долл. и следующей зависимости цены от спроса.

$$p = D(x) = 200 - 0{,}02x.$$

*** 39.** Объясните результаты задачи 37, построив график и кратко описав его.

*** 40.** Объясните результаты задачи 38, построив график и кратко описав его.

41. Вычислите выгоду производителя при цене $\bar{p} = 67$ долл. и следующей зависимости цены от предложения.

$$p = S(x) = 10 + 0{,}1x + 0{,}0003x^2.$$

42. Вычислите выигрыш производителя при цене $\bar{p} = 55$ долл. и следующей зависимости цены от предложения.

$$p = S(x) = 15 + 0{,}1x + 0{,}003x^2.$$

*** 43.** Объясните результаты задачи 40, построив график и кратко описав его.

*** 44.** Объясните результаты задачи 41, построив график и кратко описав его.

В задачах 45–52 требуется вычислить выгоду потребителей и производителей при равновесной цене для заданных зависимостей цены от спроса и предложения. Постройте график, на котором можно отобразить получаемые результаты. Округлите все значения до ближайшего целого числа.

45. $p = D(x) = 50 - 0{,}1x$; $p = S(x) = 11 + 0{,}05x$.

46. $p = D(x) = 25 - 0{,}004x^2$; $p = S(x) = 5 + 0{,}004x^2$.

47. $p = D(x) = 80e^{-0{,}001x}$; $p = S(x) = 30e^{0{,}001x}$.

48. $p = D(x) = 185e^{-0{,}005x}$; $p = S(x) = 25e^{0{,}005x}$.

49. $p = D(x) = 80 - 0{,}04x$; $p = S(x) = 30e^{0{,}001x}$.

50. $p = D(x) = 190 - 0{,}2x$; $p = S(x) = 25e^{0{,}005x}$.

51. $p = D(x) = 80e^{-0{,}001x}$; $p = S(x) = 15 + 0{,}0001x^2$.

52. $p = D(x) = 185e^{-0{,}005x}$; $p = S(x) = 20 + 0{,}002x^2$.

53. **WWW** В следующих таблицах приведены данные о зависимостях цены от спроса и предложения сои на зерновом рынке, где x — объем товара (в тысячах бушелей), а p — цена бушеля (в долларах).

Цена и спрос

x	$p = D(x)$
0	6,70
10	6,59
20	6,52
30	6,47
40	6,45

Цена и предложение

x	$p = S(x)$
0	6,43
10	6,45
20	6,48
30	6,53
40	6,62

Используя уравнение квадратичной регрессии, смоделируйте зависимость цены от спроса. Используя уравнение линейной регрессии, смоделируйте зависимость цены от предложения.

а) Вычислите равновесное количество (с точностью до трех десятичных знаков) и равновесную цену (с точностью до ближайшего цента).

б) Методом численного интегрирования найдите выгоду потребителей и производителей при равновесной цене.

54. Повторите решение задачи 53, используя при моделировании обеих зависимостей уравнения квадратичной регрессии.

12.3. Интегрирование по частям

В разделе 11.1 мы обещали рассмотреть точный способ вычисления неопределенного интеграла

$$\int \ln x \, dx,$$

поскольку ни один из описанных на тот момент методов интегрирования не позволял найти первообразную от $\ln x$. В этом разделе будет рассмотрен очень полезный прием, *интегрирование по частям*, который позволяет найти не только указанный выше интеграл, но и многие другие интегралы вида

$$\int x \ln x \, dx \qquad \text{и} \qquad \int xe^x \, dx.$$

Метод интегрирования по частям применяется также для получения многих других формул интегрирования, описанных приводятся в учебниках по математике. Многие из этих формул рассмотрены в следующем разделе.

Метод интегрирования по частям основывается на формуле дифференцирования произведений. Если f и g — дифференцируемые функции, то справедливо выражение

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\right] = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)\,,$$

которое можно переписать в эквивалентной форме

$$f(x)\,g'(x) = \frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\right] - g(x)\,f'(x)\,.$$

Интегрируя обе части, получим

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\right]dx - \int g(x)\,f'(x)\,dx.$$

Первый интеграл справа от знака равенства составляет $f(x)g(x) + C$. (Почему?) На данный момент опустим постоянную C, приняв ее в расчет после вычисления остальных интегралов, и получим следующую формулу.

$$\boldsymbol{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx}.$$

Это выражение можно привести к более подходящей форме, полагая $u = f(x)$ и $v = g(x)$. Тогда $du = f'(x)dx$ и $dv = g'(x)dx$. Сделав такую подстановку, получим **формулу интегрирования по частям**.

Интегрирование по частям

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула оказывается полезной, если интеграл слева сложно или невозможно проинтегрировать, используя стандартные формулы. Если u и dv выбраны удачно — это наиболее важная часть метода, — то может оказаться, что вычислить интеграл справа проще, чем интеграл слева. Эта формула является чрезвычайно важным инструментом интегрирования, который применяется во многих, хотя и не всех, случаях. Результат применения метода очень просто проверить, продифференцировав его, чтобы получить исходное подынтегральное выражение (обязательно выработайте такую привычку). Важность рассмотренной формулы будет продемонстрирована на нескольких примерах.

Пример 12.14 (Интегрирование по частям). Вычислите интеграл $\int xe^x dx$, используя формулу интегрирования по частям, и проверьте результат.

Решение. Прежде всего запишем формулу интегрирования по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (12.2)$$

Теперь попытаемся найти такие u и dv в интеграле $\int xe^x dx$, при которых интеграл $\int vdu$ в правой части формулы (12.2) проще вычислить, чем интеграл $\int udv = \int xe^x dx$ в ее левой части. По большому счету, существует только два подходящих варианта выбора u и dv в интеграле $\int xe^x dx$.

$$\overset{\text{Вариант 1}}{\int \overbrace{x}^{\boldsymbol{u}}\ \overbrace{e^x dx}^{\boldsymbol{dv}};} \qquad \overset{\text{Вариант 2}}{\int \overbrace{e^x}^{\boldsymbol{u}}\ \overbrace{x\, dx}^{\boldsymbol{dv}}.}$$

Мы рассмотрим только первый вариант, а второй вам предстоит разобрать самостоятельно (задание 12.5).

В первом варианте $u = x$, а $dv = e^x dx$. Исходя из формулы (12.2), чтобы записать правую часть, следует вычислить функции du и v. Дальше необходимо действовать согласно следующей схеме. Пусть

$$u = x, \qquad dv = e^x dx.$$

Тогда

$$du = dx, \qquad \int dv = \int e^x dx,$$
$$v = e^x.$$

К функции v можно добавить произвольную константу, однако для простоты она будет всегда полагаться равной нулю. Общая произвольная константа интегрирования будет добавлена в конце метода. Подставляя полученный выше результат в формулу (12.2), получим.

$$\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = \qquad \text{Интеграл в правой части очень просто вычислить.}$$

$$= xe^x - e^x + C \qquad \text{Теперь добавим произвольную постоянную } C.$$

Проверка. $\dfrac{d}{dx}\left(xe^x - e^x + C\right) = xe^x + e^x - e^x = xe^x.$ ■

Задание 12.5.
Рассмотрите второй вариант в примере 12.14, используя формулу интегрирования по частям, и объясните, почему такой выбор является неудачным. ■

Упражнение 12.14.
Вычислите интеграл $\int xe^{2x} dx$. ■

Пример 12.15 (Интегрирование по частям). Вычислите интеграл $\int x \ln x \, dx$.

Решение. Как и в предыдущем примере, существуют два варианта выбора u и dv.

$$\overset{\text{Вариант 1}}{\int \overbrace{x}^{\boldsymbol{u}} \overbrace{\ln x \, dx}^{\boldsymbol{dv}};} \qquad \overset{\text{Вариант 2}}{\int \overbrace{\ln x}^{\boldsymbol{u}} \overbrace{x \, dx}^{\boldsymbol{dv}}.}$$

Вариант 1 неудачен, поскольку неизвестно, как вычислить первообразную функции $\ln x$. Поэтому перейдем к варианту 2 и положим $u = \ln x$ и $dv = x \, dx$. Далее нужно выполнить те же операции, что и в примере 12.14. Пусть

$$u = \ln x, \qquad dv = x \, dx.$$

Тогда

$$du = \frac{1}{x} dx, \qquad \int dv = \int x \, dx,$$
$$v = \frac{x^2}{2}.$$

Подставим полученные результаты в формулу интегрирования по частям:

$$\int \boldsymbol{u \, dv = uv - \int v \, du}$$
$$\int x \ln x \, dx = \ln x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \qquad \text{Вычислить этот интеграл не составляет труда.}$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Проверка. $\dfrac{d}{dx} \left(\dfrac{x^2}{2} \ln x - \dfrac{x^2}{4} + C \right) = x \ln x + \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2} = x \ln x.$ ■

Упражнение 12.15.
Вычислите интеграл $\int x \ln 2x \, dx$. ■

Самые внимательные из вас, выполняя задание 12.5, могли заметить заметить, что некоторые варианты выбора функций u и dv приводят к появлению интегралов, еще более сложных, чем исходные. Это не означает, что в вычислениях или формуле интегрирования по частям есть какая-то ошибка. Это просто означает, что определенные варианты выбора функций u и dv не упрощают задачу. В некоторых задачах может вообще не оказаться ни одного подходящего варианта. Эти и некоторые другие наблюдения по выбору функций u и dv собраны в следующей врезке.

Интегрирование по частям: выбор функций u и dv

Для $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ справедливо следующее.

1. Произведение $u\,dv$ должно быть равно исходному подынтегральному выражению.
2. Должна существовать возможность проинтегрировать функцию dv (предпочтительно, используя стандартные формулы или простые подстановки).
3. Новый интеграл $\int v\,du$ не должен быть сложнее, чем исходный интеграл $\int u\,dv$.
4. Для интегралов, содержащих функцию $x^p e^{ax}$, следует попробовать подстановку
$$u = x^p \quad \text{и} \quad dv = e^{ax}\,dx.$$
5. Для интегралов, содержащих функцию $x^p(\ln x)^q$, следует попробовать подстановку
$$u = (\ln x)^q \quad \text{и} \quad dv = x^p\,dx.$$

В некоторых случаях можно вычислить значение исходного интеграла, применив формулу интегрирования по частям несколько раз. В следующем примере проиллюстрирован именно такой случай.

Пример 12.16 (Многократное интегрирование по частям). Вычислите интеграл $\int x^2 e^{-x} dx$.

Решение. Следуя рекомендациям из приведенной выше врезки, выберем следующие подстановки.
$$u = x^2, \qquad dv = e^{-x}dx.$$
Тогда
$$du = 2x\,dx, \qquad v = -e^{-x},$$
и
$$\int x^2 e^{-x}dx = x^2\left(-e^{-x}\right) - \int \left(-e^{-x}\right) 2x\,dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx. \qquad (12.3)$$
Используя стандартные формулы, значение нового интеграла найти не удается, но все же он проще, чем исходный интеграл. Если к нему снова применить формулу интегрирования по частям, то получится еще более простой интеграл. Для интеграла $\int xe^{-x}dx$ выберем следующие подстановки.
$$u = x, \qquad dv = e^{-x}dx.$$
Тогда
$$du = dx, \qquad v = -e^{-x},$$
и
$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= x\left(-e^{-x}\right) - \int\left(-e^{-x}\right)dx = \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} \qquad \text{Константу выберем равной нулю.} \qquad (12.4)\end{aligned}$$

Подставляя уравнение (12.4) в уравнение (12.3), получим

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + C = \qquad \text{Добавим произвольную константу}$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \tag{12.5}$$

Проверка. $\dfrac{d}{dx}\left(-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C\right) = x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2e^{-x} =$
$= x^2e^{-x}$. ■

Упражнение 12.16.
Вычислите интеграл $\int x^2e^{2x}dx$. ■

Пример 12.17 (Интегрирование по частям). Вычислите значение интеграла $\int_1^e \ln x\,dx$ и дайте геометрическую интерпретацию полученному результату.

Решение. Прежде всего вычислим интеграл $\int \ln x\,dx$, а затем вернемся к вычислению определенного интеграла. Следуя совету 5, приведенному во врезке (для $p = 0$), выберем следующие подстановки.

$$u = \ln x, \qquad dv = dx.$$

Тогда

$$du = \frac{1}{x}dx, \qquad v = x.$$

Следовательно,

$$\int \ln x\,dx = \ln x \cdot x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

Следует отметить, что это очень важный результат, о котором упоминалось в начале раздела. Вычислим определенный интеграл:

$$\int_1^e \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e = (e\ln e - e) - (1\,\ln 1 - 1) = (e - e) - (0 - 1) = 1.$$

Этот интеграл описывает площадь фигуры, расположенной под кривой $y = \ln x$ от точки $x = 1$ до точки $x = e$, как показано на рис. 12.25. ■

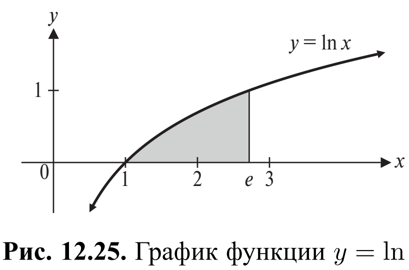


Рис. 12.25. График функции $y = \ln x$

Упражнение 12.17.
Вычислите интеграл $\int_1^2 \ln 3x\, dx$. ■

Задание 12.6.
Попытайтесь применить формулу интегрирования по частям к интегралу $\int e^{x^2} dx$ и объяснить, почему она не позволяет добиться конечного результата. ■

Ответы к упражнениям

12.14. $\dfrac{x}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C.$

12.15. $\dfrac{x^2}{2}\ln 2x - \dfrac{x^2}{4} + C.$

12.16. $\dfrac{x^2}{2}e^{2x} - \dfrac{x}{2}e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{2x} + C.$

12.17. $2\ln 6 - \ln 3 - 1 \approx 1{,}4349.$

Практикум 12.3

А *В задачах 1–4 требуется вычислить интегралы, используя метод интегрирования по частям. Предполагается, что, если в подынтегральное выражение входит функция натурального логарифма, выполняется условие* $x > 0$.

1. $\displaystyle\int xe^{3x} dx.$ **2.** $\displaystyle\int xe^{4x} dx.$

3. $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx.$ **4.** $\displaystyle\int x^3 \ln x\, dx.$

Б

*** 5.** Предположим, что следующий интеграл вычисляется методом интегрирования по частям: $\int (x+1)^5 (x+2)\, dx$. Какой из вариантов подстановки для функции u лучше выбрать: $u = (x+1)^5$ или $u = x+2$? Объясните сделанный выбор, а затем вычислите интеграл.

*** 6.** Предположим, что следующий интеграл вычисляется методом интегрирования по частям: $\int (5x-7)(x-1)^4\, dx$. Какой из вариантов подстановки для функции u лучше выбрать: $u = 5x-7$ или $u = (x-1)^4$? Объясните сделанный выбор, а затем вычислите интеграл.

Задачи 7–20 смешанные — в некоторых из них необходимо применить интегрирование по частям, а для решения других можно воспользоваться методами, которые были рассмотрены в предыдущих главах. Вычислите интегралы, предполагая, что, если в интеграл входит функция натурального логарифма, выполняется условие $x > 0$.

7. $\displaystyle\int xe^{-x} dx.$ **8.** $\displaystyle\int (x-1)\, e^{-x} dx.$

9. $\displaystyle\int xe^{x^2} dx.$ **10.** $\displaystyle\int xe^{-x^2} dx.$

11. $\int\limits_0^1 (x-3)\,e^x dx.$ **12.** $\int\limits_0^1 (x+1)\,e^x dx.$

13. $\int\limits_1^3 \ln 2x\,dx.$ **14.** $\int\limits_1^2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx.$

15. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx.$ **16.** $\int \frac{x^2}{x^3+5} dx.$

17. $\int \frac{\ln x}{x} dx.$ **18.** $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx.$

19. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx.$ **20.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

В задачах 21–24 необходимо проиллюстрировать каждый интеграл рисунком и объяснить его геометрический смысл.

* **21.** Задача 11. * **22.** Задача 12.

* **23.** Задача 13. * **24.** Задача 14.

B *Задачи 25–42 смешанные — в некоторых из них необходимо применить интегрирование по частям вместе с методами, которые были рассмотрены ранее, в других может потребоваться использовать формулы интегрирования по частям повторно. Когда в подынтегральное выражение входит функция* $\ln g(x)$*, предполагается, что* $g(x) > 0$.

25. $\int x^2 e^x dx.$ **26.** $\int x^3 e^x dx.$

27. $\int x e^{ax} dx,\ a \neq 0.$ **28.** $\int \ln(ax)\,dx,\ a > 0.$

29. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx.$ **30.** $\int\limits_1^2 x^3 e^{x^2} dx.$

31. $\int\limits_0^2 \ln(x+4)\,dx.$ **32.** $\int\limits_0^2 \ln(4-x)\,dx.$

33. $\int x e^{x-2} dx.$ **34.** $\int x e^{x+1} dx.$

35. $\int x \ln\left(1+x^2\right) dx.$ **36.** $\int x \ln(1+x)\,dx.$

37. $\int e^x \ln(1+e^x)\,dx.$ **38.** $\int \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$

39. $\int (\ln x)^2\,dx.$ **40.** $\int x(\ln x)^2\,dx.$

41. $\int (\ln x)^3\,dx.$ **42.** $\int x(\ln x)^3\,dx.$

В задачах 43–46 требуется построить график каждого уравнения на указанном интервале, используя графическую утилиту, и вычислить с ее помощью площадь фигуры, лежащей между данной кривой и осью x. Найдите ответ с точностью до двух десятичных знаков.

43. $y = x - 2 - \ln x$; $1 \leqslant x \leqslant 4$.

44. $y = 6 - x^2 - \ln x$; $1 \leqslant x \leqslant 4$.

45. $y = 5 - xe^x$; $0 \leqslant x \leqslant 3$.

46. $y = xe^x + x - 6$; $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Применение математики

Экономика и бизнес

47. *Прибыль*. Предельная прибыль (в миллионах долларов в год) составляет

$$P'(t) = 2t - te^{-t}.$$

Вычислите общую прибыль, полученную за первые пять лет производства (с точностью до ближайшего миллиона долларов), используя соответствующий определенный интеграл.

48. *Добыча*. Предполагается, что через t месяцев скорость добычи нефти из месторождения (тыс. баррелей в месяц) будет равна

$$R(t) = 10te^{-0,1t}.$$

Вычислите общий объем добычи за первый год разработки месторождения (с точностью до ближайшей тысячи баррелей), используя соответствующий определенный интеграл.

*** 49.** *Прибыль*. Объясните результаты решения задачи 47, построив график и описав его словами.

*** 50.** *Добыча*. Объясните результаты решения задачи 48, построив график и описав его словами.

51. *Непрерывный источник доходов*. Вычислите будущую стоимость капитала при ставке, равной восьми непрерывно начисляемым сложным процентам, в течение пяти лет поступления дохода от непрерывного источника со скоростью

$$f(t) = 1000 - 200t.$$

52. *Непрерывный источник доходов*. Вычислите будущую стоимость капитала при ставке, равной десяти непрерывно начисляемым сложным процентам, в течение четырех лет поступления дохода от непрерывного источника со скоростью

$$f(t) = 1000 - 250t.$$

53. *Распределение доходов*. Вычислите показатель концентрации доходов для кривой Лоренца

$$y = xe^{x-1}.$$

54. *Распределение доходов*. Вычислите показатель концентрации доходов для кривой Лоренца

$$y = x^2 e^{x-1}.$$

*** 55.** *Распределение доходов*. Объясните результаты решения задачи 53, построив график и описав его словами.

*** 56.** *Распределение доходов*. Объясните результаты решения задачи 54, построив график и описав его словами.

57. *Анализ продаж*. Предполагается, что объем продаж некой модели персонального компьютера будет снижаться со скоростью

$$S'(t) = -4te^{0{,}1t}$$

компьютеров в месяц, где t — время в месяцах, а $S(t)$ — месячный объем продаж компьютеров. Компания планирует прекратить производство указанной модели компьютеров, когда объем ежемесячных продаж достигнет 800 компьютеров. Вычислите функцию $S(t)$, если объем ежемесячных продаж в исходный момент ($t = 0$) равен 2000 компьютерам. Как долго, с точностью до ближайшего месяца, компания будет продолжать производить эти компьютеры?

58. *Анализ продаж*. Скорость изменения объема ежемесячных продаж картриджей с новой видеоигрой составляет

$$S'(t) = 350\ln(t+1), \qquad S(0) = 0,$$

где t — количество месяцев, истекших с момента выпуска видеоигры, а $S(t)$ — ежемесячный объем продаж картриджей. Найдите функцию $S(t)$. Когда, с точностью до ближайшего месяца, объем ежемесячных продаж достигнет уровня 15 000 картриджей?

59. *Потребительская выгода*. Вычислите потребительскую выгоду (с точностью до ближайшего доллара) при цене $\bar{p} = 2089$ долл. для зависимости цены от спроса

$$p = D(x) = 9 - \ln(x+4).$$

Воспользуйтесь значением $\bar{x}$, вычисленным с точностью до ближайшей единицы (с избытком).

60. *Выгода производителей*. Вычислите выгоду производителей (с точностью до ближайшего доллара) при цене $\bar{p} = 26$ долл. для зависимости цены от предложения

$$p = S(x) = 5\ln(x+1).$$

Воспользуйтесь значением $\bar{x}$, вычисленным с точностью до ближайшей единицы (с избытком).

*** 61.** *Выгода потребителей*. Объясните результаты решения задачи 59, построив график и описав его словами.

*** 62.** *Выгода потребителей*. Объясните результаты решения задачи 60, построив график и описав его словами.

Биологические науки

63. WWW *Загрязнение*. Концентрация загрязняющего вещества через t часов после прекращения работы фабрики на один день равна

$$C\,(t) = \frac{20\ln(t+1)}{(t+1)^2} \quad \text{частиц на миллион.}$$

Вычислите среднюю концентрацию за период времени от момента $t = 0$ до момента $t = 5$.

64. WWW *Медицина*. После приема таблетки содержащийся в нем лекарственный препарат начинает поступать в кровь пациента. Скорость роста концентрации препарата в крови через t минут после приема таблетки равна

$$R(t) = te^{-0{,}2t}.$$

Вычислите общее количество препарата, которое попадет в кровь в течение 10 минут после приема таблетки.

Социальные науки

65. *Обучение*. В неком бизнес-колледже было установлено, что средний студент, записавшийся на курс машинописи, через t недель занятий улучшает обозначенный навык со скоростью

$$N'(t) = (t+6)e^{-0{,}25t} \text{ слов/мин.}$$

за неделю. Сколько слов в минуту $N(t)$ предположительно слов будет набирать студент после t недель занятий, если в начале курса он печатает со скоростью 40 слов в минуту? Сколько времени (с точностью до ближайшей недели) понадобится студенту, чтобы достичь скорости набора 70 слов в минуту? Сколько слов в минуту студент должен набирать в конце курса?

66. *Обучение*. В этом же бизнес-колледже было установлено, что средний студент, записавшийся на начальный курс стенографии, через t недель занятий улучшает навык набора текста на слух со скоростью

$$N'(t) = (t+10)e^{-0{,}1t} \text{ слов/мин.}$$

в неделю. Сколько слов в минуту $N(t)$ предположительно стенографирует студент после t недель занятий, если в начале курса он имел нулевой навык стенографии (т.е. не мог набрать под диктовку ни одного слова)? Сколько времени (с точностью до ближайшей недели) понадобится студенту, чтобы достичь скорости стенографирования 90 слов в минуту? Сколько слов в минуту студент должен уметь стенографировать в конце курса?

67. *Политика*. Количество избирателей (тыс. чел.) в определенном городе равно

$$N(t) = 20 + 4t - 5te^{-0{,}1t},$$

где t — время, лет. Вычислите среднее количество избирателей за период времени с момента $t = 0$ до момента $t = 5$.

12.4. Таблицы интегралов

- Использование таблиц интегралов
- Подстановка и таблицы интегралов
- Формулы приведения
- Решение практических задач

Таблица интегралов — это список формул интегрирования, используемый для вычисления интегралов. Люди, которым часто приходится вычислять сложные интегралы, используют таблицы, содержащие сотни формул. Такие таблицы приведены во многих учебниках математики. В табл. В.2 приложения В содержится короткий список формул интегрирования. Некоторые из этих формул можно получить, используя методы интегрирования, описанные ранее, в то время как для вычисления других требуются методы, которые здесь не рассматривались. Однако каждую из формул можно проверить путем дифференцирования правой части.

Использование таблиц интегралов

Формулы, приведенные в табл. В.2 (и в более подробных таблицах интегралов), упорядочены по категориям, таким как "Интегралы, содержащие выражения $a + bu$", "Интегралы, содержащие выражения $\sqrt{u^2 - a^2}$" и т. п. Здесь u — переменная интегрирования. Все остальные символы обозначают константы. Чтобы воспользоваться таблицей для вычисления интеграла, прежде всего необходимо найти категорию, которая наиболее близка к виду подынтегрального выражения, а затем определить формулу в этой категории, к которой можно точно привести подынтегральное выражение, присваивая константам конкретные значения. Этот процесс проиллюстрирован в следующем примере.

Пример 12.18 (Интегрирование с помощью таблиц). Используя табл. В.2, вычислите интеграл $\int \frac{x}{(5+2x)(4-3x)}dx$.

Решение. Поскольку подынтегральное выражение

$$f(x) = \frac{x}{(5+2x)(4-3x)}$$

является рациональной функцией, в которую входят выражения $a+bu$ и $c+du$, рассмотрим формулы с 15 по 20 в табл. В.2 и попробуем определить, нельзя ли привести функцию $f(x)$ к одной из них. Сравнивая подынтегральное выражение в формуле 16 с функцией $f(x)$, легко увидеть, что оно совпадет с $f(x)$, если положить $a = 5$, $b = 2$, $c = 4$ и $d = -3$. Полагая $u = x$ и подставляя значения a, b, c и d в формулу 16, получим

$$\int \frac{\boldsymbol{u}}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\boldsymbol{u})}\boldsymbol{du} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{bc}}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\ln|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}| - \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}\ln|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\boldsymbol{u}|\right) \quad \text{Формула 16}$$

$$\int \frac{x}{(\underset{\boldsymbol{a}}{5}+\underset{\boldsymbol{b}}{2}x)(\underset{\boldsymbol{c}}{4}\underset{\boldsymbol{d}}{-3}x)}dx = \frac{1}{\underbrace{5\cdot(-3)-2\cdot 4}_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\mathbf{5}\cdot(\mathbf{-3})-\mathbf{2}\cdot\mathbf{4}=\mathbf{-23}}}\left(\frac{5}{2}\ln|5+2x| - \frac{4}{-3}\ln|4-3x|\right) + C =$$

$$= -\frac{5}{46}\ln|5+2x| - \frac{4}{69}\ln|4-3x| + C.$$

Следует отметить, что постоянная интегрирования С не включена ни в одну из формул, приведенных в табл. B.2. Однако константу C обязательно следует включать в первообразную. ■

Упражнение 12.18.
Используя табл. B.2, вычислите интеграл $\int \frac{x}{(5+3x)^2(1+x)}dx$. ■

Пример 12.19 (Интегрирование с помощью таблиц). Вычислите значение интеграла $\int_3^4 \frac{1}{x\sqrt{25-x^2}}dx$.

Решение. Прежде всего воспользуемся табл. B.2 и вычислим интеграл

$$\int \frac{1}{x\sqrt{25-x^2}}dx.$$

Поскольку в подынтегральную функцию входит выражение $\sqrt{25-x^2}$, рассмотрим формулы с 29-й по 31-ю и выберем формулу 29 со значениями $a^2 = 25$ и $a = 5$.

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right|} \qquad \text{Формула 29}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{25-x^2}}dx = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + C.$$

Таким образом.

$$\int\limits_3^4 \frac{1}{x\sqrt{25-x^2}}dx = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}\right|\Bigg|_3^4 =$$
$$= -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{5+3}{4}\right| + \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5+4}{3}\right| =$$
$$= -\frac{1}{5}\ln 2 + \frac{1}{5}\ln 3 = \frac{1}{5}\ln 1{,}5 \approx 0{,}0811.$$ ■

Упражнение 12.19.
Вычислите значение интеграла: $\int_6^8 \frac{1}{x^2\sqrt{100-x^2}}dx$. ■

Подстановка и таблицы интегралов

Как показано в примерах 12.18 и 12.19, если интеграл, значение которого требуется вычислить, можно привести точно к одному из табличных, вычисление неопределенного интеграла сводится к простой подстановке правильных констант в подходящую формулу. Как поступить, если интеграл нельзя свести к одной из формул в таблице? Во многих случаях в этой ситуации следует применять подстановку, позволяющую преобразовать данный интеграл к одной из табличных формул. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 12.20 (Подстановка и таблицы интегралов). Вычислите интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{16x^2-25}}dx$.

Решение. Чтобы связать этот интеграл с одной из формул, содержащих выражение $\sqrt{u^2 - a^2}$ (формулы 40 и 45), отметим, что, если $u = 4x$, то

$$u^2 = 16x^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{16x^2 - 25} = \sqrt{u^2 - 25}.$$

Воспользуемся подстановкой $u = 4x$ и преобразуем этот интеграл к стандартному виду.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16x^2 - 25}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{16}u^2}{\sqrt{u^2 - 25}}du = \qquad \text{Подстановка: } \boldsymbol{u = 4x, du = 4dx, x = \tfrac{1}{4}u}.$$
$$= \frac{1}{64}\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 25}}du.$$

Значение последнего интеграла можно вычислить, используя формулу 44 со значением $a = 5$.

$$\boldsymbol{\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - a^2}}du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 - a^2} + a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right|\right)} \qquad \text{Формула 44}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16x^2 - 25}}dx = \frac{1}{64}\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 25}}du = \qquad \text{Воспользуемся формулой 44 со значением } \boldsymbol{a = 5}.$$
$$= \frac{1}{128}\left(u\sqrt{u^2 - 25} + 25\ln\left|u + \sqrt{u^2 - 25}\right|\right) + C = \qquad \text{Подставим } \boldsymbol{u = 4x}.$$
$$= \frac{1}{128}\left(4x\sqrt{16x^2 - 25} + 25\ln\left|4x + \sqrt{16x^2 - 25}\right|\right) + C.$$

■

Упражнение 12.20.
Вычислите интеграл $\int \sqrt{9x^2 - 16}\,dx$. ■

Пример 12.21 (Подстановка и таблицы интегралов). Вычислите интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$.

Решение. Ни в одну из формул в таблице не входит четвертая степень. Однако, если положить $u = x^2$, то

$$\sqrt{x^4 + 1} = \sqrt{u^2 + 1},$$

а это выражение встречается в формулах с 32 по 39. Следовательно, подставляя функцию $u = x^2$, получим следующее выражение.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}}x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}du. \qquad \text{Подстановка: } \boldsymbol{u = x^2, du = 2x\,dx}.$$

В последнем интеграле можно распознать формулу 36 со значением $a = 1$:

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|} \qquad \text{Формула 36}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}du = \qquad \text{Воспользуемся формулой 36 со значением } \boldsymbol{a = 1}.$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + 1}\right| + C = \qquad \text{Подставим } \boldsymbol{u = x^2}.$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4 + 1}\right| + C.$$

■

Упражнение 12.21.
Вычислите интеграл $\int x\sqrt{x^4+1}dx$. ■

Формулы приведения

Пример 12.22 (Использование формул приведения). Используя табл. В.2, вычислите интеграл $\int x^2 e^{3x} dx$.

Решение. Поскольку в подынтегральное выражение входит функция e^{3x}, рассмотрев формулы 46–48, делаем вывод, что для этой задачи можно воспользоваться формулой 47. Полагая в формуле 47 $u = x$, $n = 2$ и $a = 3$, получим

$$\int \boldsymbol{u^n e^{au} du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1} e^{au} du} \qquad \text{Формула 47}$$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx.$$

Следует отметить, что выражение в правой части уравнения по-прежнему содержит интеграл, но показатель степени x понижен до единицы. Формулы такого типа называются **формулами приведения** и предназначены для многократного применения до тех пор, пока не будет получен интеграл, значение которого можно вычислить. Применяя формулу 47 к интегралу $\int x e^{3x} dx$ при $n = 1$, имеем

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{x e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx\right) = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2x e^{3x}}{9} + \frac{2}{9}\int e^{3x} dx.$$

Последнее выражение содержит интеграл, значение которого вычислить просто.

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Сделав последнюю подстановку и добавляя постоянную интегрирования, получаем следующий результат.

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2x e^{3x}}{9} + \frac{2}{27}e^{3x} + C.$$

■

Упражнение 12.22.
Используя табл. В.2, вычислите интеграл $\int (\ln x)^2\, dx$. ■

Решение практических задач

Пример 12.23 (Выгода производителей). Вычислите выгоду производителей при цене 20 долл. и следующей зависимости цены от предложения.

$$p = S(x) = \frac{5x}{500 - x}.$$

Решение.

Этап 1. Вычислим величину $\bar{x}$, предложение при цене $\bar{p} = 20$:

$$\bar{p} = \frac{5\bar{x}}{500 - \bar{x}};$$
$$20 = \frac{5\bar{x}}{500 - \bar{x}};$$
$$10\,000 - 20\bar{x} = 5\bar{x};$$
$$10\,000 = 25\bar{x};$$
$$\bar{x} = 400.$$

Этап 2. Построим график, как показано на рис. 12.26.

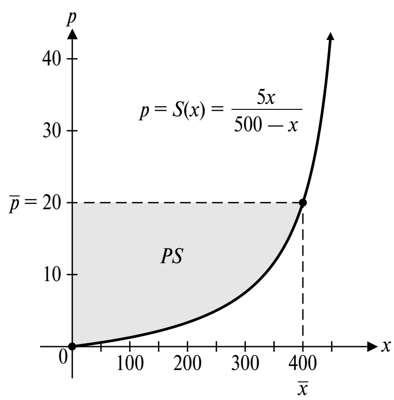


Рис. 12.26. График функции $p = S(x) = \frac{5x}{500-x}$

Этап 3. Вычислим выгоду производителей (площадь фигуры, окрашенную серым цветом на графике).

$$PS = \int\limits_0^{\bar{x}} [\bar{p} - S(x)]\,dx =$$
$$= \int\limits_0^{400} \left(20 - \frac{5x}{500 - x}\right) dx =$$
$$= \int\limits_0^{400} \frac{10\,000 - 25x}{500 - x} dx.$$

Используем формулу 20 со значениями $a = 10\,000$, $b = -25$, $c = 500$ и $d = -1$.

$$\int \frac{a + bu}{c + du} du = \frac{bu}{d} + \frac{ad - bc}{d^2} \ln|c + du| \qquad \text{Формула 20}$$

$$PS = (25x + 2500 \ln|500 - x|) \Big|_0^{400} =$$
$$= 10\,000 + 2500 \ln|100| - 2500 \ln|500| =$$
$$\approx 5976 \text{ долл.}$$
■

Упражнение 12.23.
Вычислите потребительскую выгоду при цене 10 долл. для зависимости цены от спроса

$$p = D(x) = \frac{20x - 8000}{x - 500}.$$
■

Задание 12.7.
Применяя к подынтегральному выражению из примера 12.23 алгебраические преобразования, включая деление столбиком, покажите, что

$$\frac{5\bar{x}}{500 - \bar{x}} = \frac{-5\bar{x}}{\bar{x} - 500} = -5 - \frac{2500}{\bar{x} - 500}.$$

Используя этот результат, вычислите неопределенный интеграл в примере 12.23, не прибегая к табличным формулам. ■

Ответы к упражнениям

12.18. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5 + 3x}\right) + \frac{1}{4} \ln\left|\frac{1 + x}{5 + 3x}\right| + C.$

12.19. $\frac{7}{1200} \approx 0{,}0058.$

12.20. $\frac{1}{6}\left(3x\sqrt{9x^2 - 16} - 16 \ln\left|3x + \sqrt{9x^2 - 16}\right|\right) + C.$

12.21. $\frac{1}{4}\left(x^2\sqrt{x^4 + 1} + \ln\left|x^2 + \sqrt{x^4 + 1}\right|\right) + C.$

12.22. $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C.$

12.23. $3000 + 2000 \ln 200 - 2000 \ln 500 \approx 1167$ долл.

Практикум 12.4

A *В задачах 1–14, используя табл. B.2, вычислите неопределенные интегралы.*

1. $\int \frac{1}{x(1 + x)} dx.$

2. $\int \frac{1}{x^2(1 + x)} dx.$

3. $\int \frac{1}{(3 + x)^2(5 + 2x)} dx.$

4. $\int \frac{x}{(5 + 2x)^2(2 + x)} dx.$

5. $\int \frac{x}{\sqrt{16+x}}dx.$ **6.** $\int \frac{1}{x\sqrt{16+x}}dx.$

7. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx.$ **8.** $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx.$

9. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}dx.$ **10.** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-16}}dx.$

11. $\int x^2 \ln x\, dx.$ **12.** $\int x^3 \ln x\, dx.$

13. $\int \frac{1}{1+e^x}dx.$ **14.** $\int \frac{1}{5+2e^{3x}}dx.$

В задачах 15–20 вычислите значение определенных интегралов. Для вычисления первообразной воспользуйтесь табл. В.2.

15. $\int\limits_1^3 \frac{x^2}{3+x}dx.$ **16.** $\int\limits_2^6 \frac{x}{(6+x)^2}dx.$

17. $\int\limits_0^7 \frac{1}{(3+x)(1+x)}dx.$ **18.** $\int\limits_0^7 \frac{x}{(3+x)(1+x)}dx.$

19. $\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx.$ **20.** $\int\limits_4^5 \sqrt{x^2-16}dx.$

Б *В задачах 21–32, используя методы подстановок и табл. В.2, вычислите неопределенные интегралы.*

21. $\int \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x^2}dx.$ **22.** $\int x^2\sqrt{9x^2-1}dx.$

23. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-16}}dx.$ **24.** $\int x\sqrt{x^4-16}dx.$

25. $\int x^2\sqrt{x^6+4}dx.$ **26.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}dx.$

27. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{4-x^4}}dx.$ **28.** $\int \frac{\sqrt{x^4+4}}{x}dx.$

29. $\int \frac{e^x}{(2+e^x)(3+4e^x)}dx.$ **30.** $\int \frac{e^x}{(4+e^x)^2(2+e^x)}dx.$

31. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{4+\ln x}}dx.$ **32.** $\int \frac{1}{x\ln x\sqrt{4+\ln x}}dx.$

В *В задачах 33–38, используя табл. В.2, вычислите неопределенные интегралы.*

33. $\int x^2e^{5x}dx.$ **34.** $\int x^2e^{-4x}dx.$

35. $\int x^3e^{-x}dx.$ **36.** $\int x^3e^{2x}dx.$

37. $\int (\ln x)^3\, dx.$ **38.** $\int (\ln x)^4\, dx.$

Задачи 39–46 — смешанные. Некоторые из них требуют использования табл. В.2, а другие можно решить, применяя методы, которые были рассмотрены ранее.

39. $\displaystyle\int_3^5 x\sqrt{x^2-9}dx.$

40. $\displaystyle\int_3^5 x^2\sqrt{x^2-9}dx.$

41. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2-1}dx.$

42. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{(x^2-1)^2}dx.$

43. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$

44. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx.$

45. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

46. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

В задачах 47–50 требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками $y = f(x)$ и $y = g(x)$ с точностью до двух десятичных знаков. Примените графическую утилиту и найдите точки пересечения графиков с точностью до двух десятичных знаков.

47. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{x^2+1}}$; $g(x) = x^2 + 3x$.

48. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; $g(x) = 5x - x^2$.

49. $f(x) = x\sqrt{4+x}$; $g(x) = 1 + x$.

50. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+4}}$; $g(x) = x - 2$.

Применение математики

Используя табл. В.2, вычислите значения всех интегралов, входящих в решения задач 51–74.

Экономика и бизнес

51. *Потребительская выгода.* Вычислите потребительскую выгоду при цене $\bar{p} = 15$ долл. для зависимости цены от спроса

$$p = D(x) = \frac{7500 - 30x}{300 - x}.$$

52. *Выгода производителей.* Вычислите выигрыш производителей при цене $\bar{p} = 20$ долл. для зависимости цены от предложения

$$p = S(x) = \frac{10x}{300 - x}.$$

53. *Потребительская выгода.* Постройте график зависимости цены от спроса и уравнения цены $\bar{p} = 15$ из задачи 51. Площадь какой фигуры выражает потребительскую выгоду?

54. *Выгода производителей.* Постройте график зависимости цены от предложения и уравнения цены $\bar{p} = 20$ долл. из задачи 52. Площадь какой фигуры выражает выгоду производителей?

55. *Затраты*. Компания производит горные лыжи. Ее постоянные затраты составляют 25 000 долл., а величина предельных затрат равна

$$C'(x) = \frac{250 + 10x}{1 + 0{,}05x},$$

где $C(x)$ — общие затраты на производство x пар лыж. Вычислите функцию затрат $C(x)$ и установите объем производства (с точностью до единицы), при котором затраты составляют 150 000 долл. Чему равны затраты (с точностью до доллара) при производстве 850 пар лыж?

56. *Затраты*. Компания производит портативные CD-плейеры. Ее постоянные затраты составляют 25 000 долл. в неделю, а предельные затраты равны

$$C'(x) = \frac{65 + 20x}{1 + 0{,}4x},$$

где $C(x)$ — общие затраты на производство x плейеров в неделю. Найдите функцию затрат $C(x)$ и установите объем производства (с точностью до единицы), при котором затраты составляют 52 000 долл. в неделю. Чему равны затраты (с точностью до доллара) при производстве 700 плееров в неделю?

57. *Непрерывный источник доходов*. Вычислите будущую стоимость капитала при ставке, равной десяти непрерывно начисляемых сложных процента, через 10 лет для непрерывного источника доходов, поступающих со скоростью $f(t) = 50t^2$.

58. *Непрерывный источник доходов*. Вычислите будущую стоимость капитала при ставке, равной восьми непрерывно начисляемых сложных процента, через 5 лет для непрерывного источника доходов, поступающих со скоростью $f(t) = 200t$.

59. *Распределение доходов*. Вычислите показатель концентрации доходов для кривой Лоренца

$$y = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1 + 3x}.$$

60. *Распределение доходов*. Вычислите показатель концентрации доходов для кривой Лоренца

$$y = \tfrac{1}{2}x^2\sqrt{1 + 3x}.$$

*** 61.** *Распределение доходов*. Постройте график прямой $y = x$ и кривую Лоренца из задачи 59 на интервале $[0, 1]$. Проанализируйте влияние уменьшения площади фигуры, ограниченной прямой $y = x$ и кривой Лоренца, на справедливое распределение доходов.

*** 62.** *Распределение доходов*. Постройте график прямой $y = x$ и кривую Лоренца на интервале $[0, 1]$ из задачи 60. Проанализируйте влияние увеличения площади фигуры, ограниченной прямой $y = x$ и кривой Лоренца, на справедливое распределение доходов.

63. *Маркетинг*. После пробных продаж богатой клетчаткой сорта крупы отдел маркетинга крупного производителя пищевых продуктов установил, что месячный объем продаж (в миллионах долларов) через t месяцев после выпуска данного сорта крупы на рынок будет расти со скоростью

$$S'(t) = \frac{t^2}{(1 + t)^2}.$$

Найдите общий объем продаж $S(t)$ через t месяцев после начала продаж, если исходный объем продаж равен нулю. Найдите общий объем продаж в течение первых двух лет после появления нового сорта крупы на рынке.

64. *Средняя цена*. В магазине уцененных товаров уравнение цены–спроса для моторного масла высшего сорта описывается следующим уравнением

$$p = D(x) = \frac{50}{\sqrt{100 + 6x}},$$

где x — количество канистр масла, которое можно продать по цене p долл. Вычислите среднюю цену на отрезке спроса $[50, 250]$.

*** 65.** *Маркетинг*. Продемонстрируйте на графике объем продаж нового сорта крупы из задачи 63 и объясните его геометрический смысл.

*** 66.** *Зависимость цены от спроса*. Изобразите в одной и той же системе координат график зависимости цены от спроса и график средней цены на отрезке $[50, 250]$. Опишите, как связаны между собой площади фигур, лежащих под этими двумя кривыми на отрезке $[50, 250]$.

67. *Прибыль*. Предельная прибыль небольшого автосалона, продающего x автомобилей в неделю, равна

$$P'(x) = x\sqrt{2 + 3x},$$

где $P(x)$ — прибыль, долл. Прибыль автосалона от продажи одного автомобиля в неделю равна 2000 долл. Вычислите функцию прибыли и количество автомобилей, которое следует продавать (с точностью до единицы), чтобы получить недельную прибыль 13 000 долл. Какую еженедельную прибыль (с точностью до доллара) будет иметь автосалон при продаже 80 автомобилей?

68. *Доход*. Предельная прибыль компании, производящей и реализующей x калькуляторов на солнечных батареях в неделю, равна

$$R'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}, \quad R(0) = 0,$$

где $R(x)$ — доход, долл. Вычислите функцию дохода и недельный объем продаж (с точностью до единицы) для получения дохода 10 000 долларов. Какой доход (с точностью до доллара) имеет компания, если она продает 1000 калькуляторов в неделю?

Биологические науки

69. **WWW** *Загрязнение*. Из нефтяного танкера, выброшенного на риф, вытекает нефть. Скорость радиального растекания нефтяного пятна описывается формулой

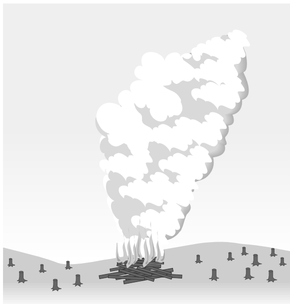
$$\frac{dR}{dt} = \frac{100}{\sqrt{t^2+9}}, \quad t \geqslant 0,$$

где R — радиус круглого пятна (в футах) через t минут. Вычислите радиус пятна через четыре минуты, если в момент $t = 0$, радиус был равен нулю.

70. **WWW** *Загрязнение*. Концентрация загрязняющего вещества (частиц на миллион) в течение 24-часового периода приблизительно равна

$$C\,(t) = t\sqrt{24-t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 24,$$

где t — время в часах. Вычислите среднюю концентрацию загрязнения за период времени с момента $t = 0$ до момента $t = 24$.



Социальные науки

71. *Обучение*. Человек запоминает N слов со скоростью, которая приблизительно равна

$$N'\,(t) = \frac{60}{\sqrt{t^2+25}}, \quad t \geqslant 0,$$

где t — количество часов непрерывного обучения. Вычислите общее количество слов, выученных за первые 12 часов непрерывного обучения.

72. *Политика*. Количество избирателей (тысяч человек) в неком округе приблизительно равно

$$f\,(t) = \frac{500}{2+3e^{-t}}, \quad t \geqslant 0,$$

где t — время в годах. Вычислите среднее количество избирателей за период с момента $t = 0$ до момента $t = 10$.

*** 73.** *Обучение*. Объясните решение задачи 71 с геометрической точки зрения.

*** 74.** *Политика*. Постройте в одной системе координат график функции $y = f(t)$ и прямую, описывающую среднее количество избирателей на интервале $[0, 10]$ из задачи 72. Опишите, как связаны между собой площади фигур, лежащих под этими двумя кривыми на отрезке $[0, 10]$.

Ключевые слова, основные обозначения и формулы

12.1. *Площадь фигуры, ограниченной кривыми*. Площадь фигуры, лежащей между кривой и осью x; площадь фигуры, лежащей между двумя кривыми; распределение доходов; кривая Лоренца; абсолютное равенство; абсолютное неравенство; показатель концентрации доходов.

12.2. *Интегрирование в экономических задачах*. Плотность вероятностей; нормальная плотность вероятностей; непрерывный источник доходов; прибыль от источника доходов; общий доход; будущая стоимость непрерывного источника доходов; потребительская выгода; выгода производителей; равновесная цена; равновесное количество.

12.3. *Таблицы интегралов*. Интегрирование по частям; выбор u и dv;

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

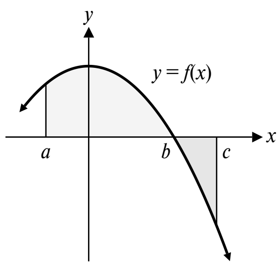
12.4. *Интегрирование с помощью таблиц*. Таблица интегралов; подстановка и таблицы интегралов; формулы приведения.

Упражнения для повторения

Выполните все упражнения этого обзорного раздела и сравните результаты с ответами, помещенными в конце книги. Ответы ко многим упражнениям на повторение приводятся вместе с номером соответствующего раздела (курсивом). Если у вас возникают затруднения при решении какой-либо задачи, повторите материал соответствующего раздела.

Все численные ответы следует находить с точностью до трех десятичных знаков, если не оговорено другое.

A *В задачах 1–3 требуется записать определенные интегралы, представляющие собой площади фигур, закрашенных серым цветом на следующем рисунке, на указанных интервалах.*



1. Интервал $[a, b]$. **2.** Интервал $[b, c]$. **3.** Интервал $[a, c]$.

4. Изобразите фигуру, лежащую между графиками функций $y = \ln x$ и $y = 0$ на интервале $[0{,}5; e]$, и вычислите ее площадь.

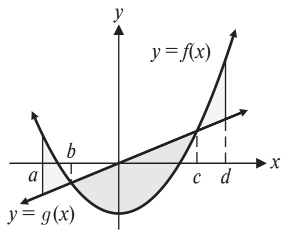
В задачах 5–10 требуется вычислить значение каждого интеграла.

5. $\int xe^{4x}dx.$ **6.** $\int x \ln x \, dx.$

7. $\int \frac{\ln x}{x} dx.$ **8.** $\int \frac{x}{1+x^2} dx.$

9. $\int \frac{1}{x\,(1+x)^2} dx.$ **10.** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x}} dx.$

Б *В задачах 11–14 требуется записать определенные интегралы, представляющие собой площади фигур, закрашенных серым цветом на следующем рисунке, на указанных интервалах.*



11. Интервал $[a, b]$. **12.** Интервал $[b, c]$.

13. Интервал $[b, d]$. **14.** Интервал $[a, d]$.

15. Изобразите фигуру, ограниченную графиками функций $y = x^2 - 6x + 9$ и $y = 9 - x$, и вычислите площадь этой фигуры.

В задачах 16–21 требуется вычислить значение каждого интеграла.

16. $\int\limits_0^1 xe^x dx.$ **17.** $\int\limits_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}} dx.$

18. $\int \sqrt{9x^2 - 49}\, dx.$ **19.** $\int te^{-0,5t} dt.$

20. $\int x^2 \ln x\, dx.$ **21.** $\int \frac{1}{1+2e^x} dx.$

22. Изобразите фигуру, ограниченную указанными графиками, и найдите ее площадь. При решении п. *б* найдите точки пересечения и площадь фигуры с точностью до двух десятичных знаков.

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; $y = x$.

б) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; $y = x + 1$.

В *В задачах 23–30 требуется вычислить значение каждого интеграла.*

23. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$ **24.** $\int x\,(\ln x)^2\, dx.$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-36}} dx.$ **26.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-36}} dx.$

27. $\int\limits_0^4 x \ln(10 - x)\, dx.$ **28.** $\int (\ln x)^2\, dx.$

29. $\int xe^{-2x^2}dx.$

30. $\int x^2e^{-2x}dx.$

31. Используя функцию численного интегрирования, предусмотренную в графической утилите, вычислите площадь фигуры, лежащей в первом квадранте под графиком

$$y = \frac{6}{2+5e^{-x}}$$

и над графиком $y = 0{,}2x + 1{,}6$ (с точностью до трех десятичных знаков).

Применение математики

Экономика и бизнес

32. *Гарантийный срок службы*. Производитель выдает на свои изделия годичную, а на запасные части — двухлетнюю гарантию. Время, прошедшее до поломки изделия с момента покупки, выражается плотностью вероятностей

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}21e^{-0{,}21t}, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Какова вероятность того, что у выбранного случайным образом покупателя изделие сломается в течение указанного срока?

а) В течение первого года гарантии.

б) В течение второго года гарантии.

*** 33.** *Гарантийный срок службы*. Постройте график плотности вероятностей для задачи 32 на интервале $[0, 3]$ и дайте геометрическую интерпретацию решения задачи 32, *б*.

34. *Функция дохода*. Недельный предельный доход от продажи x фенов для волос составляет

$$R'(x) = 65 - 6\ln(x+1), \quad R(0) = 0,$$

где $R(x)$ — доход в долларах. Вычислите функцию дохода и объем производства (с точностью до ближайшей единицы) при недельном доходе 20 000 долл. Каким будет недельный доход (с точностью до доллара) при производстве 1000 фенов для волос?

35. *Непрерывный источник доходов*. Скорость непрерывного потока доходов (долл./год) для пятилетнего периода составляет

$$f(t) = 2500e^{0{,}05t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5.$$

а) Постройте график $y = f(t)$ на интервале $[0, 5]$ и заштрихуйте фигуру, площадь которой равна общему доходу, полученному с конца первого года по конец четвертого.

б) Вычислите общий доход, полученный с конца первого года до конца четвертого.

36. *Будущая стоимость доходов от непрерывного источника.* Непрерывный поток доходов в задаче 35 вкладывается по мере своего поступления под 15 непрерывно начисляемых сложных процентов.

а) Вычислите будущую стоимость (с точностью до доллара) в конце пятилетнего периода.

б) Вычислите проценты (с точностью до доллара), полученные в течение этого пятилетнего периода.

*** 37.** *Распределение доходов.* Экономический отдел получил следующие кривые Лоренца для текущего и прогнозируемого через 10 лет распределения доходов в определенной стране.

$f(x) = 0{,}1x + 0{,}9x^2$. Текущая кривая Лоренца

$g(x) = x^{1{,}5}$. Прогнозируемая кривая Лоренца

а) Постройте график функции $y = x$ и текущую кривую Лоренца в одной системе координат на интервале $[0, 1]$, а в другой системе координат постройте график функции $y = x$ и прогнозируемую кривую Лоренца на том же интервале.

б) Что можно сказать, изучая площади фигур, ограниченных кривыми Лоренца и графиком $y = x$: более или менее равномерно будет распределен доход через десять лет?

в) Вычислите показатель концентрации доходов для текущей и прогнозируемой кривой (с точностью до одного десятичного знака). Что теперь можно сказать о распределении доходов через 10 лет? Он будет более или менее равномерным?

38. *Выгода потребителей и производителей.* Вычислите выгоду потребителей и производителей при равновесной цене для каждой пары зависимостей цены от спроса и предложения. Постройте графики выгоды потребителей и производителей. Округлите все значения до ближайшего целого.

а) $p = D(x) = 70 - 0{,}2x;$

$p = S(x) = 13 + 0{,}0012x^2.$

б) $p = D(x) = 70 - 0{,}2x;$

$p = S(x) = 13e^{0{,}006x}.$

39. *Выгода производителей.* В следующей таблице содержатся данные о цене и предложении свиней на животноводческом рынке, где x — вес (тыс. фунтов), а p — цена за фунт (центы)

а) Постройте уравнение квадратичной регрессии и определите спрос при цене 52,50 цента за фунт.

б) Используя процедуру численного интегрирования, вычислите выгоду производителей (с точностью до доллара) при цене 52,50 цента за фунт.

Зависимость цены от предложения

x	$p = S(x)$
0	43,50
10	46,74
20	50,05
30	54,72
40	59,18

Биологические науки

40. **www** *Усвоение препарата*. Скорость, с которой организм выводит препарат (в миллилитрах в час) равна

$$R(t) = \frac{60t}{(t+1)^2(t+2)},$$

где t — количество часов, которое прошло с момента принятия препарата. Сколько препарата будет выведено из организма в течение первого часа после приема? В течение четвертого часа?

41.* Опишите геометрический смысл решения задачи 40, используя графическую утилиту.

42. *Медицина*. Время, затраченное врачом на прием пациента (в часах), описывается функцией плотности вероятности

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{4}{3}}{(t+1)^2}, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а) Какова вероятность того, что врач проведет со случайно выбранным пациентом менее одного часа?

б) Какова вероятность того, что врач проведет со случайно выбранным пациентом более одного часа?

*** 43.** *Медицина*. Опишите геометрический смысл решения задачи 42, *б*.

Социальные науки

44. *Политика*. Скорость роста числа избирателей в городе со временем t (в годах) предположительно равна

$$N'(t) = \frac{100t}{(1+t^2)^2},$$

где $N(t)$ измеряется в тысячах человек. Насколько вырастет число избирателей за следующие три года, если $N(0)$ — текущее количество населения, принимающего участие в выборах?

45. *Психология.* Лабораторных крыс обучали поиску выхода из лабиринта, поощряя ее пищевыми шариками. После седьмого успешного эксперимента было установлено, что плотность вероятности успешного нахождения выхода из лабиринта за определенное время (в минутах) в течение восьмой попытки равна

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5t}, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Какова вероятность того, что случайным образом выбранная лабораторная крыса после семи успешных попыток закончит восьмой эксперимент менее чем за 2 мин.? (Напомним, что площадь фигуры, лежащей под кривой плотности вероятности на числовой прямой, равна единице.)

Домашнее задание 12.1. Анализ концентрации доходов на основе необработанных данных

Это домашнее задание можно выполнить, не пользуясь графической утилитой, хотя программа позволит ускорить необходимые расчеты.

Вначале рассмотрим необработанные данные о распределении доходов, которые Бюро переписи населения США представило в табличной форме (табл. 12.2). Исходя из этих данных, сравним распределение доходов среди белого и афроамериканского населения в Соединенных Штатах Америки в 1997 году. Воспользуемся численным, геометрическим и символьным подходами. Прежде всего запишем в таблицу координаты точек, лежащих на кривой Лоренца. Затем для каждого набора точек составим уравнение кривой Лоренца в виде $f(x) = x^p$. Проинтерпретируем распределение доходов с геометрической точки зрения, построив график кривой Лоренца и график $y = x$ для обоих наборов

WWW **Таблица 12.2.** Распределение доходов населения

Семьи, 1997 г Раса	**Верхний предел для каждой пятой части, долл.**[1]				
	Самая низкая	**Вторая**	**Третья**	**Четвертая**	**Верхние 5%**[2]
Всего	20 586	36 000	53 616	80 000	137 080
Белые	22 576	38 000	55 783	82 442	142 400
Афроамериканцы	11 396	21 875	36 052	57 000	95 684

Семьи, 1997 г Раса	**Распределение общего дохода для каждой пятой части, %**					
	Самая низкая	**Вторая**	**Третья**	**Четвертая**	**Самая высокая**	**Верхние 5%**
Всего	4,2	9,9	15,7	23,0	47,2	20,7
Белые	4,6	10,2	15,7	22,8	46,8	20,7
Афроамериканцы	3,4	9,1	15,6	25,1	46,6	17,6

Источник: Бюро переписи населения США, Министерство торговли США данных. Наконец, вычислим показатель концентрации доходов белого и афроамериканского населения и проанализируем полученный результат. (См. анализ кривых Лоренца в разделе 12.1.)

Этап 1. *Численный анализ.* Заполните табл. 12.3 и табл. 12.4, используя данные из табл. 12.2. Округлите уровни доходов до ближайшей тысячи долларов и представьте проценты в десятичном виде с точностью до двух десятичных знаков. Следует помнить, что x описывает совокупный процент семей в данной категории, а y описывает соответствующий совокупный процент доходов, полученных этими семьями. Опишите словами смысл последних двух строк в табл. 12.3 и табл. 12.4 после их заполнения.

Таблица 12.3. Распределение доходов между афроамериканскими семьями, 1997 г

Уровень доходов	x	y
Ниже 11 000 долл.	0,20	0,03
Ниже		0,13
Ниже		
Ниже 57 000 долл.	0,80	

Таблица 12.4. Распределение доходов между белыми семьями, 1997 г

Уровень доходов	x	y
Ниже 23 000 долл.	0,20	0,05
Ниже		0,15
Ниже		
Ниже 82 000 долл.	0,80	

Этап 2. *Геометрический анализ*

1) Для каждой таблицы постройте отдельные графики, отмечая точки из столбцов x и y в табл. 12.3 и табл. 12.4. Кроме того, на каждом графике постройте прямую $y = x$ на интервале $[0, 1]$.

2) Найдите такое число p (с точностью до одного десятичного знака), при котором график функции $f(x) = x^p$ проходит через точку $(0{,}20; 0{,}03)$ в табл. 12.3. Постройте эту кривую на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Кроме того, найдите такое число q (с точностью до одного десятичного знака), для которого функция $g(x) = x^q$ проходит через точку $(0{,}20; 0{,}05)$ в табл. 12.4. Постройте эту кривую на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Повторите эту процедуру для всех остальных точек в каждой таблице. Сравните все графики, построенные на основе табл. 12.3, и выберите значение p, при котором достигается наилучшая аппроксимация данных. Сделайте то же самое для всех графиков, построенных на основе табл. 12.4.

3) Можно ли, исходя из графиков, построенных при решении п. 2, сделать заключение о том, что распределение доходов белых и афроамериканских семей стало более справедливым?

Этап 3. *Символьный анализ.* Пользуясь значениями p и q, полученными на этапе 2.2, вычислите показатель концентрации доходов для белых и афроамериканских семей и проанализируйте результат.

---

[1]Последняя пятая часть не имеет верхнего предела.

[2]Нижний предел для верхних 5%.

Домашнее задание 12.2. Рынок зерна

В таблицах, приведенных ниже, содержатся данные о зависимостях цены от спроса и предложения на пшеницу на зерновом рынке, где x — количество бушелей пшеницы (в тысячах), а p — цена за бушель (в центах).

Зависимость цены от спроса

x	$p = D(x)$
20	345
25	336
30	323
35	320
40	318
45	307

Зависимость цены от предложения

x	$p = S(x)$
20	311
25	312
30	321
35	323
40	326
45	338

1. Для каждого набора данных постройте модели квадратичной, логарифмической и экспоненциальной регрессии.
2. Сравните модели из пункта 1, используя сумму квадратов остаточных погрешностей (см. задачу 2.2 в разделе 2).
3. Используя модели, которые наилучшим образом описывают данные, аппроксимируйте предложение и вычислите спрос, при котором удерживается цена, равная 3,50 долл. за бушель, 3,25 долл. за бушель и 3,00 долл. за бушель.
4. Используя модели, которые наилучшим образом аппроксимируют данные, вычислите равновесное количество и равновесную цену.
5. Используя процедуру численного интегрирования, вычислите выгоду потребителей и производителей при равновесной цене.