УЧЕБНИКИ
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

ВШЭ
HSE

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 8

Глава 1. Введение в анализ. 9

1.1. Предел последовательности 9

1.2. Множества. 14

1.3. Множества (продолжение) 20

1.4. Некоторые классические пределы 24

1.5. Ряды. 31

1.6. Построение действительных чисел 39

1.7. Свойства полноты действительных чисел 45

1.8. Некоторые следствия из свойств полноты 48

1.9. Ряды с произвольными членами. 53

1.10. Упражнения 56

Глава 2. Производная; элементарные функции 63

2.1. Определение и простейшие свойства производных. 63

2.1.1. Предел функции. 63

2.1.2. Производная 66

2.2. Непрерывные функции 71

2.3. Степень с рациональным показателем, экспонента, логарифм . . . 74

2.4. Исследование функций с помощью производной 82

2.5. Тригонометрия. 85

2.6. Вторая производная и выпуклость. 91

2.7. Символы o и O, теорема о среднем, формула Тейлора 95

2.8. Нахождение пределов 107

2.9. Упражнения 111

Глава 3. Элементарные понятия топологии 115

3.1. Отношения и лемма Цорна. 115

3.2. Топологические пространства. 121

3.3. Непрерывность и пределы 129

3.3.1. Пределы и непрерывность в метрических пространствах . . 130

3.3.2. Общее определение предела 134

3.4. Компактность 135

3.5. Связность. 143

3.6. Полнота и пополнение 148

3.7. p-адические числа и канторово множество 151

3.8. Канторово множество 156

3.9. Упражнения 163

Глава 4. Интеграл 167
4.1. Равномерная сходимость; равномерная непрерывность 167
4.2. Интеграл от кусочно-непрерывной функции 171
4.3. Неопределенный интеграл 179
4.4. Некоторые классы функций, интегралы которых — также элементарные функции 183
4.5. Почленное дифференцирование 189
4.6. Несобственные интегралы 192
4.7. Упражнения 198

Глава 5. Функциональные ряды 202
5.1. Равномерная и нормальная сходимости 202
5.2. Аналитические функции 209
5.3. Разложение элементарных функций в ряды 219
5.4. Теорема Стоуна–Вейерштрасса 226
5.5. Упражнения 232

Глава 6. Кратные интегралы 234
6.1. Определение кратного интеграла 234
6.2. Интегралы по открытым подмножествам 240
6.3. Упражнения 247

Глава 7. Дифференцирование функций нескольких переменных 249
7.1. Конечномерные нормированные пространства 249
7.2. Производная в многомерном случае 251
7.3. Высшие производные 256
7.4. Исследование функций на экстремум 259
7.5. Упражнения 261

Глава 8. Теоремы о неявной и обратной функциях и их приложения 264
8.1. Теорема об обратной функции 264
8.2. Теорема о неявной функции 268
8.3. Замена переменной в определенном интеграле 274
8.4. Упражнения 280

Глава 9. Абстрактные многообразия и векторные поля 282
9.1. Абстрактные многообразия 282
9.2. Касательные пространства 285
9.3. Векторные поля: алгебра 291
9.4. Теорема Арцела́–Асколи и дифференциальные уравнения 302
9.5. Векторные поля: геометрия 308
9.6. Упражнения 313

Глава 10. Дифференциальные формы и интегрирование на многообразиях . . . 316
10.1. Интегрирование плотностей . . . 316
10.1.1. Разбиение единицы . . . 318
10.2. Дифференциальные формы . . . 321
10.2.1. Формы степени 1 . . . 321
10.2.2. Интегрирование 1-форм . . . 323
10.2.3. Немного линейной алгебры . . . 326
10.2.4. Формы произвольной степени . . . 327
10.3. Неформальная формулировка теоремы Стокса . . . 331
10.4. Интегрирование форм по многообразиям . . . 332
10.4.1. Ориентация многообразия . . . 332
10.4.2. Многообразия с краем . . . 337
10.4.3. Теорема Стокса . . . 338
10.5. Классический векторный анализ . . . 340
10.6. Сингулярные симплексы . . . 346
10.7. Понятие о когомологиях де Рама . . . 350
10.8. Теорема Фробениуса . . . 354
10.9. Упражнения . . . 360

Предметный указатель . . . 364

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга основана на нескольких курсах, прочитанных в разные годы в НМУ (Независимый московский университет), Высшей школе экономики и в программе Math in Moscow — совместном проекте НМУ и НИУ ВШЭ.

Разумеется, книга такого объема, как эта, не может заменить подробного курса (в двухтомнике В.А. Зорича «Математический анализ» более 1300 страниц крупного формата). Некоторые традиционные темы (например, интегралы, зависящие от параметра) в книге опущены, для других выбрано максимально краткое изложение. В частности, при исследовании сходимости рядов Тейлора для элементарных функций удалось обойтись без сложных видов остаточного члена с помощью использования аналитичности. Вместо интеграла Римана в одномерном случае используется интеграл, который Ж. Дьедонне в одномерном случае называет «интегралом в смысле Коши»; для начального курса этого хватает, а для более продвинутых разделов анализа все равно понадобится интеграл Лебега, излагать который в начальном курсе неоправданно.

Выражаю благодарность Издательскому дому НИУ ВШЭ за грантовую поддержку в период написания книги, а также рецензентам, и в особенности В.И. Богачеву, за указания на существенные недочеты в первых вариантах рукописи.

1 ГЛАВА

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Из школьного курса вы знаете, что действительные числа — это бесконечные десятичные дроби. Это определение не слишком строгое (точнее говоря, при таком определении трудно определить арифметические действия над действительными числами и проверить их свойства наподобие распределительного закона умножения), но пока что будем руководствоваться им; в дальнейшем мы дадим и строгое определение.

Курс математического анализа начинается с определения предела последовательности.

Определение 1.1.1. Говорят, что число a является пределом последовательности действительных чисел $\{x_n\}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что при всяком $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Последовательности, имеющие предел, называются *сходящимися*.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $a_n - \varepsilon < x < a_n + \varepsilon$; интервал $(a_n - \varepsilon; a_n + \varepsilon)$ часто называют *ε-окрестностью* числа a. Тогда определение **1.1.1** можно переформулировать еще так, для всякой окрестности числа a существует такое N, что x_n лежит в этой окрестности при всех $n > N$.

Пример 1.1.2. Пусть $x_n = 1/(2n+3)$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ выберем натуральное $N > 1/\varepsilon$. Тогда при $n > N$ имеем

$$0 < x_n = \frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon;$$

и подавно $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$.

Первое свойство предела последовательности состоит в том, что если он существует, то он единственен.

Предложение 1.1.3. *Пусть* $\{x_n\}$ *— последовательность действительных чисел; если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, *то* $a = b$.

Доказательство. Рассуждаем от противного: пусть $a \neq b$. Тогда при достаточно малых ε оказывается, что ε-окрестности точек a и b не пересекаются (например, годится $\varepsilon = |a - b|/2$ — сделайте чертеж!). Зафиксируем такое ε; тогда ввиду условия существуют такие натуральные N_1 и N_2, что при всяком $n > N_1$ число x_n лежит в ε-окрестности точки a и всяком $n > N_2$ число x_n лежит в ε-окрестности точки b; если теперь взять какое-нибудь $n > \max(N_1, N_2)$, то окажется, что x_n лежит одновременно в ε-окрестности точки a и в ε-окрестности точки b, а это невозможно ввиду нашего выбора ε. □

На практике пределы редко находят прямо по определению, как в нашем примере **1.1.2**; обычно сводят более сложные пределы к более простым с помощью правил, известных под общим названием «арифметики пределов». Вот первое из этих правил.

Предложение 1.1.4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то существует и предел последовательности* $\{x_n + y_n\}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

Доказательство. Пусть нам дано $\varepsilon > 0$. Тогда ввиду определения предела существуют такие натуральные числа N_1 и N_2, что $|x_n - a| < \varepsilon/2$, как только $n > N_1$, и $|x_n - b| < \varepsilon/2$, как только $n > N_2$. Положим теперь $N = \max(N_1, N_2)$. Если теперь $n > N$, то

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant \\ \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$. □

Коротко говоря, предел суммы равен сумме пределов. Два следующих утверждения про арифметику пределов доказываются аналогично предложению **1.1.4**; их доказательство предоставляется читателю.

Предложение 1.1.5. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то существует и предел последовательности* $\{x_n - y_n\}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* k *— произвольное действительное число, то существует и предел последовательности* $\{kx_n\}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} (kx_n) = ka$.

Аналогичное утверждение верно и для предела произведения, но доказывается оно немного сложнее. Для начала определим одно понятие, которое пригодится нам и в дальнейшем.

Определение 1.1.6. Последовательность действительных числе $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если выполнено одно из двух следующих равносильных условий:

— существует такое $M > 0$, что $|x_n| \leqslant M$ при всех n;

— существует такой отрезок $[P; Q]$, что все x_n лежат на этом отрезке.

Лемма 1.1.7. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Взяв в определении предела $\varepsilon = 1$ (вместо единицы здесь можно было бы взять и любое другое положительное число), получаем, что существует такое натуральное N, что при всяком $n > N$ число x_n лежит на отрезке $[a-1; a+1]$. Поскольку членов последовательности x_n, где $n < N$, конечное число, получаем, что существует отрезок $[P; Q]$, содержащий $[a-1; a+1]$ и все x_n, где $n < N$. Ясно, что $[P; Q]$ содержит вообще все x_n, а это и означает, что последовательность ограничена. $\square$

Вооружившись этой леммой, мы можем доказать, что предел произведения равен произведению пределов.

Предложение 1.1.8. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то существует и предел последовательности* $\{x_n y_n\}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$.

Доказательство. По лемме **1.1.7** последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены; тем самым существует такое число $M > 0$, что $|x_n| \leqslant M$ и $|y_n| \leqslant M$ при всех n, а также $|a| \leqslant M$, $|b| \leqslant M$. Заметим, что

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| = |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n| \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b| \leqslant M \cdot |y_n - b| + M \cdot |x_n - a|.$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$; ввиду условия существует такое N_1, что $|x_n - a| < \varepsilon/2M$ при $n > N_1$, а также такое N_2, что $|y_n - a| < \varepsilon/2M$ при $n > N_2$. Если положить $N = \max(N_1, N_2)$, то при $n > N$ имеем

$$|x_n y_n - ab| \leqslant M \cdot |y_n - b| + M \cdot |x_n - a| < M \cdot (\varepsilon/2M) + M \cdot (\varepsilon/2M) = \varepsilon;$$

и все доказано. $\square$

Утверждение про предел частного также верно, но требует некоторой аккуратности в формулировке.

Предложение 1.1.9. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *причем* $b \neq 0$, *то существует и предел последовательности* $\{x_n/y_n\}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n/y_n) = a/b$.

Доказательство. Поскольку $x_n/y_n = x_n(1/y_n)$, ввиду предложения **1.1.8** достаточно доказать следующее:

$$\text{если } \lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0, \text{ то } \lim_{n\to\infty}(1/y_n) = 1/b.$$

Для доказательства положим в определении предела $\varepsilon = |b|/2 > 0$; тогда существует такое натуральное N_1, что при $n > N_1$ имеем

$$|y_n - b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |y_n| \geqslant \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow |1/y_n| \leqslant \frac{2}{|b|}.$$

Кроме того, ввиду леммы **1.1.7** существует такое $M > 0$, что $|y_n| \leqslant M$ при всех n. Следовательно, при $n > N_1$ имеем

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n|\cdot|b|} = \frac{1}{|y_n|}\cdot\frac{1}{|b|}|y_n - b| \leqslant \frac{2}{|b|}\frac{1}{|b|}|y_n - b| = \frac{2}{|b|^2}|y_n - b|.$$

Теперь для данного $\varepsilon > 0$ найдем такое натуральное N_2, что $|y_n - b| < (|b|^2/2)\varepsilon$ при $n > N_2$; тогда при $n > \max(N_1, N_2)$ имеем

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \leqslant \frac{2}{|b|^2}|y_n - b| < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Все доказано. □

В формулировке предложения **1.1.9** мы (сознательно) допустили одну небрежность: мы нигде не оговорили, что $y_n \neq 0$ при всех n, так что, формально говоря, нет гарантии, что выражение x_n/y_n определено при всех n. Эта небрежность на самом деле ничему не мешает: из доказательства предложения видно, что $y_n \neq 0$ для всех n, кроме конечного числа, а для оставшегося конечного числа номеров n можно придать выражениям x_n/y_n произвольные значения — на предел это не повлияет. Вообще, ни сходимость последовательности, ни значение ее предела не изменятся, если изменить конечное число ее членов.

Еще одно полезное свойство пределов известно под названием *теоремы о двух милиционерах*.

Предложение 1.1.10. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — такие последовательности действительных чисел, что $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ при всех n и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.*

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ существует такое N_1, что x_n лежит на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ при всех $n > N_1$, и существует такое N_2, что y_n лежит на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ при всех $n > N_2$. Если $x \leqslant y \leqslant z$ и при этом x и z лежат на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, то и y лежит на этом же интервале; поэтому при всех $n > \max(N_1, N_2)$ точка y_n лежит на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, что и требовалось. □

В упражнениях вы найдете еще некоторое количество элементарных свойств пределов; кроме того, в процессе решения этих упражнений вы самостоятельно определите понятие «последовательность стремится к бесконечности». Всеми этими свойствами и понятиями мы в дальнейшем будем свободно пользоваться.

В различных ситуациях бывает необходимо установить существование предела последовательности a priori, не вычисляя предела в явном виде. Сформулируем один результат в этом направлении.

Определение 1.1.11. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонно возрастающей*, если $x_m \leqslant x_n$ всякий раз, когда $m < n$, и *монотонно убывающей*, если $x_m \geqslant x_n$ всякий раз, когда $m < n$.

Определение 1.1.12. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что $x_n \leqslant M$ для всех n.

Читателю предлагается самостоятельно дать определение *ограниченной снизу* последовательности. Ясно, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена и сверху, и снизу.

Теорема 1.1.13. *Всякая монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.*

Строго доказать эту теорему мы сможем только тогда, когда дадим строгое определение действительных чисел, а пока что обоснование, которое мы дадим, будет с неизбежностью нестрогим.

Нестрогое доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — монотонно возрастающая и ограниченная последовательность; тогда имеется такое действительное M, что $x_n \leqslant M$ при всех n. Представим все члены последовательности в виде бесконечных десятичных дробей; последовательность целых частей чисел x_n очевидным образом будет также монотонно возрастающей, и при этом все эти целые части не превосходят M; значит, начиная с какого-то момента все целые части будут одинаковы и будут совпадать с некоторым целым числом m.

Далее, у членов последовательности, имеющих целой частью это число m, рассмотрим первые десятичные знаки после запятой (для определенности будем считать, что в десятичных записях отсутствуют бесконечные «хвосты» девяток). Последовательность этих десятичных знаков также монотонно возрастает, так что начиная с какого-то места все эти знаки будут одинаковы; обозначим соответствующий десятичный знак через m_1. У членов последовательности с целой частью m и первым десятичным знаком m_1 рассмотрим вторые знаки после запятой: они также будут возрастать и тем самым «стабилизируются» на каком-то знаке m_2, — и т.д. Положим теперь

$$x = \overline{m, m_1 m_2 m_3 \ldots}$$

и покажем, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $10^{-N} < \varepsilon$. Пусть номер N таков, что у числа x_N стабилизировались уже целая часть и первые N знаков после запятой. Тогда $0 \leqslant x - x_N \leqslant 10^{-N} < \varepsilon$; если $n > N$, то очевидно $x_N \leqslant x_n \leqslant x$, так что $|x - x_n| \leqslant |x - x_N| < \varepsilon$. Ввиду произвольности выбора ε все доказано. □

1.2. МНОЖЕСТВА

Этот раздел будет посвящен теоретико-множественному языку, которым пользуются все математики.

Множество — «начальное» математическое понятие, ему невозможно дать формальное определение. Множества состоят из *элементов*; если элемент x принадлежит множеству A, то это обозначают так: $x \in A$ (или $A \ni x$). Если же x не принадлежит множеству A, то пишут $x \notin A$.

Два множества A и B равны тогда и только тогда, когда они состоят из тех же элементов (подробнее: всякий элемент множества A является элементом множества B и всякий элемент множества B является элементом множества A).

Множества обычно обозначают буквами. Например, множество действительных чисел обычно обозначают $\mathbb{R}$, множество рациональных чисел обычно обозначают $\mathbb{Q}$, множество целых чисел обычно обозначают $\mathbb{Z}$, множество натуральных чисел обычно обозначают $\mathbb{N}$.

Множества можно задавать, перечислив его элементы (если это возможно). В этом случае перечисляемые элементы принято записывать в фигурных скобках. Например, множество $\{2, 3, -\sqrt{2}\,\}$ состоит из трех элементов: числа 2, числа 3 и числа $-\sqrt{2}$. Можно не указывать в фигурных скобках полный список, если из контекста понятно, что именно должно входить в множество. Например, $\{1, 2, \ldots, 99\}$ — множество всех натуральных чисел, не превосходящих 99.

Можно также задавать множество как множество элементов, удовлетворяющих определенному условию. Записывается это как в следующем примере:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} \quad \text{или} \quad \{x \in \mathbb{R} \colon x > 3\}.$$

Это множество всех действительных чисел, бóльших трех; как известно, по-другому оно обозначается $(3; +\infty)$.

Наряду с прочими, рассматривается множество, не содержащее *ни одного элемента*; оно обозначается $\varnothing$ и называется *пустым множеством*[1]. Если всякий элемент множества A является элементом множества B, то это обозначается так: $A \subseteq B$ (или $B \supseteq A$); в этом случае говорят, что A является *подмножеством* в B. Пустое множество является подмножеством любого множества (объяснение: если бы включение $\varnothing \subseteq A$ не выполнялось,

[1] Хотя оно и пустое, но при формальном построении теории множеств все в некотором смысле строится именно из него.

то в пустом множестве нашелся бы хотя бы один элемент, не лежащий в A, однако в пустом множестве никаких элементов нет!)[2].

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, лежащих в A или в B (или в обоих множествах одновременно — такое тоже не запрещается). Обозначение: $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, лежащих в A и B одновременно. Обозначение: $A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, лежащих в A, но не лежащих в B. Обозначение: $A \setminus B$.

В задачах мы рассмотрим различные свойства операций над множествами.

Еще одна важная операция над множествами, о которой в школе обычно не рассказывают, называется *декартовым произведением* (или *прямым произведением*). По определению прямым произведением множеств X и Y называется множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар[3] $(x; y)$, где $x \in X$, $y \in Y$. Прямое произведение множеств X и Y обозначается $X \times Y$. Например, прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ можно известным способом отождествить с плоскостью.

СРАВНЕНИЕ МОЩНОСТЕЙ

Пусть даны два множества A и B; как выяснить, в каком из них больше элементов? Если множества *конечны* (состоят из конечного числа элементов), то можно эти элементы просто пересчитать. В общем случае пользуются таким определением.

Определение 1.2.1. Говорят, что множества A и B *равномощны*, если между ними существует *биекция* или *взаимно однозначное соответствие*. Это означает, что существует отображение $f\colon A \to B$, обладающее следующими свойствами:

— если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$;

— для всякого элемента $y \in B$ существует (единственный ввиду предыдущего условия) элемент $x \in A$, для которого $f(x) = y$.

Если множества A и B равномощны, мы будем обозначать это обстоятельство так: $A \approx B$. Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов. Вот пример с бесконечными множествами.

---

[2] В некоторых текстах отношение «A является подмножеством в B» записывают как $A \subseteq B$, а в случае, когда A содержится в B и не совпадает с ним, используют обозначение $A \subset B$; иногда, с другой стороны, $A \subset B$ пишут и тогда, когда множествам A и B разрешено совпадать.

[3] По определению упорядоченные пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$.

Пример 1.2.2. Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ равномощны. В самом деле, биекцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ можно организовать следующим образом:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10…
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5…

Иными словами,

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{1-n}{2}, & n \text{ нечетно},\\ \dfrac{n}{2}, & n \text{ четно}. \end{cases}$$

Итак, в отличие от ситуации с конечными множествами, мы видим, что в $\mathbb{Z}$ есть подмножество (а именно, $\mathbb{N}$), не совпадающее с ним, но ему равномощное. На самом деле так бывает с любым бесконечным множеством.

Предложение 1.2.3. *Всякое бесконечное множество X содержит подмножество Y, не совпадающее с X, но равномощное ему.*

Доказательство. Раз X бесконечно, оно непусто. Значит, существует по крайней мере один элемент $x_1 \in X$. Поскольку X бесконечно, $X \neq \{x_1\}$, так что в X существует элемент $x_2 \neq X_1$, и т.д. В итоге получится последовательность $\{x_n\}$, состоящая из попарно различных элементов множества X. Положим теперь $Y = X \setminus \{x_1\}$; тогда биекция $f\colon X \to Y$ строится так:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ отлично от всех } x_n,\\ x_{n+1}, & \text{если } x = x_n \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad \square$$

Определение 1.2.4. Множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$, называется *счетным*.

Если $f\colon \mathbb{N} \to X$ — биекция, то, полагая $x_n = f(n)$, получим такое равносильное определение счетного множества: множество счетно, если все его элементы можно расположить в последовательность $x_1, x_2, \ldots$ — «пересчитать».

Пример **1.2.2** показывает, что множество $\mathbb{Z}$ счетно. Вот менее бросающийся в глаза пример.

Предложение 1.2.5. *Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно.*

Доказательство. Для всякой пары натуральных чисел (p, q) имеем $p + q \geqslant 2$, и для каждого натурального числа n количество пар (p, q), для которых $p + q = n$, конечно. Теперь можно пересчитать все пары натуральных чисел (p, q) таким образом: сначала все пары, для которых $p + q = 2$; затем все пары, для которых $p + q = 3$; затем все пары, для которых $p + q = 4$, и т.д. Так как на каждом шаге добавляется только конечное число членов последовательности, наше построение корректно. $\square$

Следствие 1.2.6. *Множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ счетно.*

Доказательство. Если $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ — какая-нибудь биекция (существующая ввиду предложения **1.2.2**) и $n \mapsto (p_n, q_n)$ — биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, то биекцию между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ можно задать по правилу $n \mapsto (f(p_n), f(q_n))$. □

Аналогично показывается, что если $A \approx A'$ и $B \approx B'$, то $A \times B \approx \approx A' \times B'$.

Вот еще одно очень полезное (и на первый взгляд неожиданное) следствие предложения **1.2.5**.

Следствие 1.2.7. *Множество рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Ввиду следствия **1.2.6** существует последовательность пар (u_n, v_n), включающая в себя все пары целых чисел. Будем по ней строить последовательность всех рациональных чисел следующим образом: паре (u_n, v_n) поставим в соответствие число u_n/v_n; если $v_n = 0$ или если число, равное u_n/v_n, нам уже встречалось, то соответствующую пару будем пропускать. В итоге все *положительные* рациональные числа окажутся организованными в последовательность без повторений. Теперь все вообще рациональные числа можно организовать в последовательность так: ноль, первое положительное число, противоположное ему, второе положительное число, противоположное ему и т.д. □

Вот еще один типичный пример счетного множества. Рассмотрим некоторое конечное множество S; будем называть его *алфавитом*. *Словом* над алфавитом S называется произвольная конечная последовательность элементов множества S.

Предложение 1.2.8. *Множество слов над конечным алфавитом S счетно.*

Доказательство. Для каждого натурального k множество слов длины k конечно, так как конечен алфавит. Имея это в виду, можно организовать все конечные слова в последовательность таким образом: сначала перечислить все слова длины 1, затем все слова длины 2 и т.д. □

На самом деле можно показать, что счетно и множество всех конечных слов над счетным алфавитом.

Разобранные примеры могли создать впечатление, что все бесконечные множества счетны. На самом деле это совершенно не так: разные бесконечные множества могут быть бесконечны по-разному. Вот очень важный пример.

Предложение 1.2.9. *Множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц не счетно.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что бесконечные последовательности из нулей и единиц удалось организовать в последовательность $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, в которой встречаются все последовательности, и покажем, что такое допущение ведет к противоречию.

В самом деле, построим последовательность s следующим образом. Первый ее элемент выберем отличным от первого элемента последовательности s_1 (если s_1 начинается с нуля, то s начинается с единицы, если s_1 начинается с единицы, то s начинается с нуля). Второй ее элемент выберем отличным от второго элемента последовательности s_2, третий — отличным от третьего элемента последовательности s_3 и т.д. Построенная таким образом последовательность s с неизбежностью отлична от каждой из s_k: она отлична от s_1 по крайней мере в первом элементе, она отлична от s_2 по крайней мере во втором элементе и т.д. Мы получили искомое противоречие. □

Определение 1.2.10. Множества, равномощные множеству бесконечных последовательностей из нулей и единиц, называются *множествами мощности континуум*.

Предложение 1.2.11. *Интервал* $(0;\ 1)$ *имеет мощность континуум.*

Доказательство. Всякому действительному числу из интервала $(0;1)$ можно поставить в соответствие бесконечную последовательность десятичных цифр, т.е. элементов множества $\{0, 1, \ldots, 9\}$ — знаков после запятой в его десятичном разложении (считаем, что конечная десятичная дробь заканчивается на бесконечный «хвост» из нулей). Обозначим множество всевозможных бесконечных последовательностей десятичных цифр через D, а множество всевозможных бесконечных последовательностей из нулей и единиц — через C.

Покажем сначала, что множество D имеет мощность континуум. Для этого построим биекцию $f\colon D \to C$ следующим образом. Чтобы построить последовательность нулей и единиц $f(\sigma)$, соответствующую последовательности десятичных цифр σ, заменим каждую десятичную цифру на последовательность из нулей и единиц так, как показано в таблице:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	110	1110	11110	111110	1111110	11111110	111111110	111111111

Так как всякая последовательность нулей и единиц начинается либо с нуля, либо с некоторого количества (от 1 до 8) подряд стоящих единиц, за которыми следует нуль, либо, наконец, с девяти подряд стоящих единиц, ясно, по всякой последовательности нулей и единиц можно, притом единственным образом, восстановить соответствующую ей последовательность десятичных цифр, так что f является биекцией. (С такого рода «префиксным кодом» мы еще встретимся.)

Чтобы завершить доказательство, нам достаточно построить биекцию между D и интервалом $(0;1)$. Начнем с леммы.

Лемма 1.2.12. *Если D — несчетное множество и $Z \subset D$ — счетное множество, то $D \setminus Z$ равномощно D.*

Доказательство леммы. Так как объединение счетного и конечного множеств очевидно счетно (можно пересчитать сначала конечное множество, а затем счетное), а множество D несчетно, разность $D \setminus Z$ бесконечна. Следовательно, как и в доказательстве предложения **1.2.3**, можно найти счетное подмножество $Z_1 \subset D \setminus Z$. Так как Z и Z_1 — счетные множества, очевидно, что существует биекция $\varphi\colon Z \cup Z_1 \to Z_1$ (ср. пример **1.2.2**). Теперь биекцию $g\colon D \to D \setminus Z$ можно построить так:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \notin Z \cup Z_1, \\ g(x), & x \in Z \cup Z_1. \end{cases}$$

□

Заметим теперь, что интервал $(0;1)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей десятичных цифр (знаков после запятой в десятичном разложении), не имеющих «хвоста» из девяток и не состоящих из одних нулей. Обозначим множество элементов D, заканчивающихся на хвост из девяток или состоящих из одних нулей, через Z. Тогда Z счетно (в последовательности можно сначала поставить последовательность из одних нулей, затем — последовательность из одних девяток, затем — последовательности с одной не девяткой перед хвостом из девяток ...), а D несчетно (оно, как мы доказали, равномощно C), лемма показывает, что $D \setminus Z$ равномощно D. Поскольку имеется естественная биекция между $D \setminus Z$ и $(0;1)$, все доказано. □

Следствие 1.2.13. *Множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.*

Доказательство. Отображение $x \mapsto 2x - 1$ задает биекцию между $(0;1)$ и $(-1;1)$, а отображение

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & x \geqslant 0, \\ -\dfrac{x}{x+1}, & x < 0, \end{cases}$$

задает биекцию между $(-1;1)$ и $\mathbb{R}$. □

1.3. МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Несчетность множества действительных чисел имеет следующее более или менее конкретное приложение.

Определение 1.3.1. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем уравнения некоторой степени $n \in \mathbb{N}$ с рациональными коэффициентами,

$$c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + \ldots + c_{n-1} a + c_n = 0. \qquad (1.3.1)$$

Число, не являющееся алгебраическим, называется *трансцендентным*.

Избавляясь от знаменателя, можно считать, что все коэффициенты c_i в левой части (1.3.1) являются целыми числами, что мы и будем далее предполагать.

Теорема 1.3.2. *Трансцендентные числа существуют.*

Мы выведем эту теорему из следующего предложения.

Предложение 1.3.3. *Множество алгебраических чисел счетно.*

Так как множество всех действительных чисел несчетно, то предложение **1.3.3** действительно влечет теорему **1.3.2**.

Доказательство предложения. Покажем, что множество многочленов от одного переменного с целыми коэффициентами (т.е. левых частей уравнения (1.3.1)) счетно. В самом деле, множество многочленов степени 1, т.е. пар коэффициентов (c_0, c_1), равномощно множеству $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и тем самым счетно; множество многочленов степени 2, т.е. троек (c_0, c_1, c_2), равномощно $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ (обычно пишут просто $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$); так как $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$, имеем

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$$

(см. замечание после доказательства следствия **1.2.6**). Продолжая в том же духе, получаем, что для каждого d множество многочленов степени d с целыми коэффициентами счетно.

Стало быть, для каждого d все многочлены степени d с целыми коэффициентами можно расположить в последовательность $f_{d1}, f_{d2}, \ldots, f_{dn}, \ldots$ Расположим все эти последовательности в виде таблицы,

$$\begin{array}{ccccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \cdots \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \cdots \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & \cdots \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Теперь пересчитаем многочлены так же, как в доказательстве предложения **1.2.5**: сначала многочлены с суммой индексов 2, затем многочлены с суммой индексов 3 и так далее:

$$f_{11},\ f_{12},\ f_{21},\ f_{31},\ f_{22},\ f_{13},\ f_{41},\ f_{32},\ f_{23},\ f_{14},\ \ldots$$

Далее, многочлен степени d имеет не более d действительных корней. Имея это в виду, расположим все алгебраические числа в последовательность таким образом: сначала выпишем все корни многочлена номер 1, затем все корни многочлена номер 2 (если таковые найдутся) и так далее; если у многочлена действительных корней нет, мы его пропустим; числа, встречавшиеся ранее, также будем опускать (ср. доказательство счетности множества рациональных чисел). Тем самым все алгебраические числа можно организовать в последовательность, и счетность множества алгебраических чисел доказана. □

Теорема **1.3.2** дает доказательство существования трансцендентных чисел, но не дает возможности ни про одно «разумное» число утверждать, что оно является трансцендентным. На самом деле существуют интересные конкретные примеры трансцендентных чисел (в частности, трансцендентны числа e и π), но доказать их трансцендентность уже сложнее.

Следующее предложение в момент своего открытия (конец XIX века) произвело очень сильный эффект.

Предложение 1.3.4. *Множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощны.*

Это предложение, в частности, означает, что можно установить биекцию между прямой и плоскостью. На первый взгляд такое представляется невероятным: ведь каждому ясно, что прямая одномерна, а плоскость двумерна! На самом деле ничего страшного не происходит: предложение просто показывает, что для формализации интуитивных представлений о размерности одного только понятия мощности множества недостаточно. (Забегая вперед, скажем, что все становится на свои места, если привлечь понятие непрерывности.)

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}$ равномощно множеству C бесконечных последовательностей из нулей и единиц, достаточно показать, что $C \times C$ равномощно C. Биекцию же $f\colon C \times C \to C$ можно построить следующим образом. Если $a = (a_1, a_2, \ldots)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots)$ — две последовательности нулей и единиц из C, то можно положить

$$f(a, b) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots)$$

(элементы последовательностей a и b перемежаются). □

Введем некоторые обозначения, относящиеся к сравнению множеств по мощности. Если множества A и B равномощны, то будем писать $|A| = |B|$. Если множество A равномощно какому-то подмножеству в B, то будем писать $|A| \leqslant |B|$, а если при этом к тому же A не равномощно B, будем писать $|A| < |B|$ (например, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$). В случае когда $|A| < |B|$, будем говорить, что мощность множества A меньше мощности множества B. (Отдельного понятия «мощность множества A, обозначаемая через $|A|$» мы вводить не будем — для этого пришлось бы углубиться в аксиоматику теории множеств; ограничимся тем, что будем мощности сравнивать.) Вот два основные свойства сравнения мощностей.

Теорема 1.3.5. *Для любых двух множеств A и B обязательно имеем $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ или $|B| < |A|$.*

Эту теорему доказать нетрудно, но для доказательства потребуется небольшой экскурс в аксиоматику. Мы ее докажем в разд. **3.1**. А вот следующую теорему мы докажем прямо сейчас.

Теорема 1.3.6 (теорема Кантора–Бернштейна)**.** *Если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.*

Доказательство. Из условия явствует, что существуют биекции $f\colon A \to B_1$ и $g\colon B \to A_1$, где $B_1 \subset B$, $A_1 \subset A$.

Для всякого элемента $x \in A$ назовем его предшественником такой элемент $y \in B$, что $g(y) = x$; так как g — биекция, предшественник единственен, если он существует. Аналогично, для всякого $y \in B$ назовем его предшественником такой элемент $x \in A$, что $f(x) = y$; если он существует, то он единственен. Для каждого элемента $x \in A$ построим максимальную цепочку предшественников: сначала предшественник из B (если он существует), затем предшественник предшественника (если он существует, то это опять элемент из B) и т.д. Аналогично определим максимальную цепочку предшественников для элементов из B. Для всякого целого неотрицательного n обозначим через $A_n \subset A$ множество элементов, у которых максимальная длина цепочки предшественников равна n, а через A_∞ — множество элементов, у которых длина цепочки предшественников бесконечна. Аналогичный смысл имеют обозначения B_n и B_∞.

Заметим теперь, что f отображает A_∞ на B_∞ и (более того) индуцирует биекцию между этими множествами. Аналогично видим, что f биективно отображает A_k на B_{k+1} (для всякого k), а g биективно отображает B_k на A_{k+1}:

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[dr, "f"] & A_1 & A_2 \arrow[dr, "f"] & A_3 & \cdots & A_\infty \arrow[d, "f"] \\
B_0 \arrow[ur, "g"'] & B_1 & B_2 \arrow[ur, "g"'] & B_3 & \cdots & B_\infty
\end{tikzcd}$$

Теперь биекцию $\varphi\colon A \to B$ можно определить так:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_{2k}, \\ g^{-1}(x), & x \in A_{2k-1}, \\ f(x), & x \in A_\infty. \end{cases} \qquad \square$$

Теорема Кантора–Бернштейна очень помогает при установлении равномощности различных множеств. Например, из нее сразу следует, что всякое подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$, содержащее хотя бы один отрезок, имеет мощность континуум: $|X| \leqslant |C|$, так как X содержится в $\mathbb{R}^2$, и $|C| \leqslant |X|$, так как X содержит отрезок.

Зададимся теперь вопросом, существуют ли мощности, большие, чем континуум. Оказывается, что существуют, да еще как!

Определение 1.3.7. Пусть X — множество; тогда через 2^X обозначается множество всевозможных подмножеств в X.

Происхождение этого обозначения таково: если X — конечное множество из n элементов, то 2^X, как известно, состоит из 2^n элементов. Отметим еще, что существует биекция между множеством $2^{\mathbb{N}}$ и множеством C бесконечных последовательностей из нулей и единиц: каждой последовательности $\{a_n\}$ ставится в соответствие множество

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}.$$

Теорема 1.3.8. *Для любого множества X имеем $|X| < |2^X|$.*

Доказательство. Соотношение $|X| \leqslant |2^X|$ проверяется совсем просто: имеется очевидная биекция между X и множеством одноэлементных подмножеств в X (элементу $a \in X$ ставится в соответствие подмножество $\{a\} \subset X$). Остается показать, что не существует биекции $f\colon X \to 2^X$. Рассуждая от противного, предположим, что такая биекция есть. Тогда рассмотрим множество

$$Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}. \tag{1.3.2}$$

Множество Y является подмножеством в X и тем самым — элементом из 2^X; так как f — биекция, существует такой элемент $x \in X$, что $f(x) = Y$. Теперь рассмотрим два случая.

1. $x \in Y$. Так как $Y = f(x)$, это означает, что $x \in f(x)$, но тогда формула (1.3.2) показывает, что $x \notin Y$ — противоречие.

2. $x \notin Y$. Так как $Y = f(x)$, это означает, что $x \notin f(x)$, но тогда формула (1.3.2) показывает, что $x \in Y$ — противоречие.

Итак, оба a priori возможных случая дают противоречие. Значит, искомой биекции не существует. □

Рассуждение, примененное в доказательстве этой теоремы, называется «диагональным приемом Кантора». Оно является обобщением рассуждения из доказательства предложения **1.2.9**.

Итак, для каждого (в том числе и бесконечного) множества существует множество большей мощности, и эту иерархию бесконечностей можно продолжать весьма далеко. Важно сознавать, что на этом этапе при беспечном обращении с понятием множества могут возникать неприятные парадоксы. Пусть, например, X — множество *вообще всех* множеств. Тогда очевидно, что 2^X обязано совпадать с X, и это явным образом противоречит теореме **1.3.8**. Если «развинтить» доказательство этой теоремы применительно к данному случаю, то получится такое приводящее к парадоксу рассуждение. Пусть

$$Y = \{X \mid X \text{ — множество и } X \notin X\}.$$

Тогда и допущение, что $Y \in Y$, и допущение, что $Y \notin Y$, — оба приводят к противоречию.

Когда парадоксы обнаружились (в начале XX века), математиками была проведена большая работа по аксиоматизации и формализации теории множеств. Оставляя рассказ об этой аксиоматизации для других курсов (возможно, основное, что должен знать о ней математик, не специализирующийся по математической логике, — что такая аксиоматизация существует), отметим два момента. Во-первых, за без малого сто лет, прошедших с момента построения аксиоматической теории множеств, никаких противоречий в ней не обнаружилось, зато обнаружилось, что теория множеств — очень полезный и плодотворный язык и основа для математики. Во-вторых, недопустимо произвольно строить «слишком большие» множества. Законна конструкция множества 2^X, законны конструкции объединений (в том числе бесконечных), пересечений, декартовых произведений. Наконец, если какое-то множество уже есть, то законно строить в нем подмножество, состоящее из элементов, заданных каким-то условием. При этом никаких безобразий вроде несуществующего «множества всех множеств» уже не получается.

1.4. НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ

После экскурса в теорию множеств вернемся к более конкретным задачам.

Предложение 1.4.1. *Если* $|q| < 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Доказательство. Заметим, что в силу самого́ определения предела равенства $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$ равносильны. Поэтому достаточно рассмотреть случай $q = |q| \geqslant 0$. Пусть, стало быть, $0 \leqslant q < 1$. Тогда последовательность $\{q^n\}$ монотонно убывает; так как она очевидно ограничена снизу нулем, из теоремы **1.1.13** (точнее, из ее аналога для убывающих последовательностей) вытекает, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = c$. Теперь имеем

$$c = \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (q \cdot q^n) = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = qc$$

(мы воспользовались предложением **1.1.5**). Так как $q \neq 1$, из равенства $c = qc$ вытекает, что $c = 0$. $\square$

Далее мы будем пользоваться известными из школы свойствами показательной и логарифмической функций; в дальнейшем мы дадим их строгие обоснования.

Предложение 1.4.2. *Пусть* $a > 0$, $b > 1$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty}(n^a/b^n) = 0$.

Доказательство. Пусть k — натуральное число, для которого $k \geqslant a$. Поскольку $0 \leqslant n^a/b^n \leqslant n^k/b^n$, теорема о двух милиционерах показывает, что достаточно установить равенство $\lim\limits_{n\to\infty} n^k/b^n = 0$; иными словами, не ограничивая общности, можно считать, что $a \in \mathbb{N}$.

Положим $x_n = n^a/b^n$; покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n)$ существует и равен $1/b < 1$. В самом деле,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \cdot \frac{b^n}{b^{n+1}},$$

и первый сомножитель в правой части стремится к единице (так как $(n+1)/n \to 1$, а предел произведения равен произведению пределов), а второй сомножитель равен константе $1/b < 1$.

Выберем число q, для которого $1/b < q < 1$. Из доказанного вытекает, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_{n+1}/x_n \leqslant q$ при $n \geqslant N$. Следовательно, при $k > N$ имеем

$$x_k = \frac{x_k}{x_{k-1}} \cdot \frac{x_{k-1}}{x_{k-2}} \dots \frac{x_{N+1}}{X_N} \cdot x_N \leqslant x_N q^{k-N} = \frac{x_N}{q^N} q^k.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0$ по предложению **1.4.1**, отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, что и требовалось. $\square$

Неформально говоря, доказанное предложение говорит, что показательная функция растет быстрее, чем степенная (при любых основаниях и показателях).

Сравним теперь рост логарифмических и линейных функций.

Предложение 1.4.3. *Пусть* $a > 1$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n/n = 0$.

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Неравенство $\log_a n/n < \varepsilon$ равносильно неравенству $n < a^{\varepsilon n} < (a^\varepsilon)^n$. Из предложения **1.4.2** вытекает, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $n/(a^\varepsilon)^n < 1$ при $n > N$. Тогда $(\log_a n)/n < \varepsilon$ при $n > N$, и все доказано. $\square$

На самом деле верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_a x)/x^b$ при всяком $b > 0$. Если $b > 1$, это следует из доказанного предложения (и теоремы о двух милиционерах); при $0 < b < 1$ доказательство этого факта более деликатно и мы его пока отложим.

Следующий классический предел дает определение знаменитого числа e.

Предложение 1.4.4. *Последовательность*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{1.4.1}$$

монотонно возрастает и ограничена сверху и тем самым имеет предел.

Определение 1.4.5. Предел последовательности (1.4.1) называется *числом* e.

Доказательство. Разложим выражение для x_n по биному Ньютона:

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n^n};$$

коэффициент при $1/k!$ равен $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$. Сравним это разложение с разложением для x_{n+1}. В разложении по биному Ньютона для $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ будет $n+1$ слагаемое; первые два слагаемых будут единицами, как и для x_n, а при $2 \leqslant k \leqslant n$ коэффициент при $1/k!$ будет равен $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$; и это больше, чем соответствующее слагаемое в разложении для x_n. Кроме того, в разложении для x_{n+1} присутствует еще последнее, $(n+1)$-е слагаемое, и это слагаемое равно $1/(n+1)^{n+1} > 0$. Стало быть, $x_{n+1} > x_n$, и монотонное возрастание доказано.

Чтобы доказать ограниченность, заметим, что из того же разложения для x_n явствует, что

$$x_n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \tag{1.4.2}$$

Поскольку $1/k! = 1/(2 \cdot 3 \ldots k) \leqslant 1/2^{k-1}$ при $k \geqslant 2$, правая часть в (1.4.2) не превосходит

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Этим доказана ограниченность. $\square$

Для числа e существует еще одно важное представление в виде предела.

Предложение 1.4.6:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right). \tag{1.4.3}$$

Доказательство. В доказательстве предложения **1.4.4** мы установили, что все члены последовательности в правой части (1.4.3) не превосходят 3, а ограниченность этой последовательности очевидна. Стало быть, последовательность

$$y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

сходится. Кроме того, в доказательстве того же предложения мы установили, что $y_n \geqslant x_n$, откуда вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$ (см. ниже задачу **1.5**). Остается доказать обратное неравенство: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant e$. Для этого заметим, что при любых $n, s > 0$ имеет место неравенство

$$1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n+s}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n+s}\right)\left(1 - \frac{2}{n+s}\right)\frac{1}{3!} + \ldots \\ \ldots + \left(1 - \frac{1}{n+s}\right)\left(1 - \frac{2}{n+s}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+s}\right)\frac{1}{n!} \leqslant x_{n+s}$$

(в самом деле, в левой части стоят первые $n+1$ членов разложения выражения для x_{n+s} по биному Ньютона). Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to \infty$ (см. ту же задачу), получим, что

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant \lim_{s\to\infty} x_{n+s} = e;$$

стало быть, $y_n \leqslant e$ для любого n, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant e$. Тем самым неравенство в противоположную сторону также доказано. □

Сейчас мы докажем одно общее утверждение о пределах, которое пригодится нам в дальнейшем. Иногда оно называется «теоремой Штольца» или «дискретным правилом Лопиталя» (с непрерывным, а не дискретным правилом Лопиталя мы познакомимся в разд. **2.8**).

Предложение 1.4.7. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — последовательности действительных чисел, причем последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и стремится к бесконечности. Тогда если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = c,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = c.$$

Это предложение имеет следующий геометрический смысл. Если дана уходящая на бесконечность ломаная, у которой угловые коэффициенты всех звеньев A_nA_{n+1} строго положительны, и если угловые коэффициенты этих звеньев стремятся к некоторому числу c, то и угловые коэффициенты отрезков OA_n стремятся к c (рис. **1.1, а**). При такой интерпретации утверждение выглядит весьма правдоподобным. Строгое доказательство выглядит так.

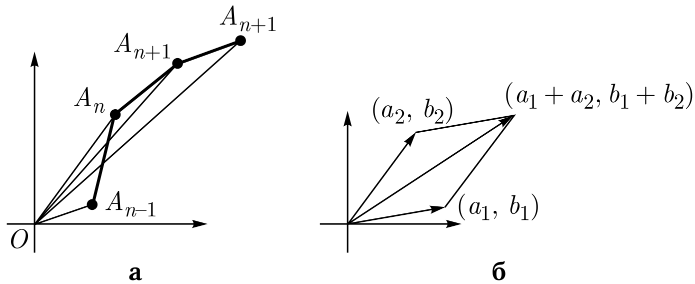

Рис. 1.1. К теореме Штольца (а), к лемме 1.4.8 (б)

Доказательство. Мы воспользуемся следующей элементарной леммой, известной под обидным названием «сложение дробей для гуманитариев».

Лемма 1.4.8. (i) *Если a_1 и a_2 — произвольные положительные числа, b_1 и b_2 — произвольные действительные числа и $\dfrac{b_1}{a_1} \leqslant \dfrac{a_2}{b_2}$, то*

$$\frac{b_1}{a_1} \leqslant \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \leqslant \frac{b_2}{a_2}.$$

(ii) *Если $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные положительные числа, $b_1, \ldots, b_n$ — произвольные действительные числа и все отношения $\dfrac{b_i}{a_i}$ лежат на некотором интервале $(p;\ q)$, то и отношение*

$$\frac{b_1 + \ldots + b_n}{a_1 + \ldots + a_n}$$

лежат на интервале $(p; q)$.

Доказательство леммы. Утверждение **(i)** геометрически очевидно: из правила параллелограмма для векторов вытекает, что «угловой коэффициент» суммы векторов (a_1, b_1) и (a_2, b_2) заключен между угловыми коэффициентами слагаемых (см. рис. **1.1, б**); впрочем, оно легко проверяется и непосредственно. Утверждение **(ii)** доказывается индукцией по n, а попросту говоря, — последовательным применением утверждения **(i)**. Именно, отношение $\dfrac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}$ лежит (ввиду **(i)**) между $\dfrac{b_1}{a_1}$ и $\dfrac{b_2}{a_2}$ и тем самым — на интервале $(p; q)$; отношение $\dfrac{b_1 + b_2 + b_3}{a_1 + a_2 + a_3}$ лежит (ввиду **(i)**) между $\dfrac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}$ и $\dfrac{b_3}{a_3}$ и тем самым опять-таки — на интервале $(p; q)$ и т.д. □

Перейдем теперь к доказательству предложения. Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ стремятся к $+\infty$ и так как отбрасывание конечного числа членов на сходимость или предел последовательности не влияет, можно считать, что все x_n и y_n положительны. Зададимся каким-нибудь $\varepsilon > 0$. Тогда ввиду условия существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$c - \varepsilon/2 < \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} < c + \varepsilon/2$$

при всех $n \geqslant N$. Применяя лемму **1.4.8 (ii)** к отношениям $\dfrac{y_{N+1} - y_N}{x_{N+1} - x_N}$, $\dfrac{y_{N+2} - y_{N+1}}{x_{N+2} - x_{N+1}}, \ldots, \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$, где $n > N$, получим, что $\dfrac{y_n - y_N}{x_n - x_N}$ лежит на интервале $(c - \varepsilon/2; c + \varepsilon/2)$ при всяком $n > N$; иными словами,

$$\left|\frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} - c\right| < \varepsilon/2 \quad \text{при всех } n > N. \tag{1.4.4}$$

Теперь в (1.4.4) остается заменить $\dfrac{y_n - y_N}{x_n - x_N}$ на $\dfrac{y_n}{x_n}$. Покажем сначала, что относительная погрешность при такой замене стремится к нулю при $n \to \infty$. В самом деле,

$$\frac{\dfrac{y_n - y_N}{x_n - x_N} - \dfrac{y_n}{x_n}}{\dfrac{y_n - y_N}{x_n - x_N}} = 1 - \frac{y_n}{x_n}\Big/\frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} = 1 - \frac{y_n}{x_n}\Big/\left(\frac{y_n}{x_n} \cdot \frac{1 - y_N/y_n}{1 - x_N/x_n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1 - x_N/x_n}{1 - y_N/y_n},$$

и правая часть стремится к нулю, так $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ стремятся к бесконечности.

Далее, из неравенства (1.4.4) вытекает существование такого $M > 0$, что $\left|\dfrac{y_n - y_N}{x_n - x_N}\right| \leqslant M$ при всех $n > N$. Ввиду доказанного выше существует такое N_1, что

$$\left|\frac{\dfrac{y_n - y_N}{x_n - x_N} - \dfrac{y_n}{x_n}}{\dfrac{y_n - y_N}{x_n - x_N}}\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{при } n > N_1;$$

следовательно, при всех $n > N_1$ имеем

$$\left|\frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} - \frac{y_n}{x_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \left|\frac{y_n - y_N}{x_n - x_N}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon/2.$$

Значит, при всех $n > \max(N, N_1)$ имеем

$$\left|\frac{y_n}{x_n} - c\right| \leqslant \left|\frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} - \frac{y_n}{x_n}\right| + \left|\frac{y_n - y_N}{x_n - x_N} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и все доказано. □

Мы применим дискретное правило Лопиталя к доказательству еще одного классического результата о пределах.

Предложение 1.4.9. *Для всякого* $b > 0$ *имеем* $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)/n^b = 0$.

(Переход к произвольному основанию логарифмов очевиден.)

Доказательство. Выберем такое натуральное k, что $1/k < b$. Поскольку
$$0 \leqslant \frac{\ln n}{n^b} \leqslant \frac{\ln n}{n^{1/k}},$$
теорема о двух милиционерах показывает, что достаточно доказать предложение для случая $b = 1/k$, где k — натуральное число; в дальнейшем будем считать, что b именно таково.

Лемма 1.4.10. *Для всякого* $x \geqslant 0$ *имеем* $\ln(1+x) \leqslant x$.

Доказательство леммы. Положим $f(x) = \ln(1+x) - x$; имеем
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - x \leqslant 0 \quad \text{при } x \geqslant 0.$$
Следовательно, функция f монотонно убывает на интервале $[0; +\infty)$; поскольку к тому же $f(0) = 0$, отсюда следует, что $f(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant 0$, что и требовалось. □

В доказательстве леммы мы воспользовались свойствами производных и признаком монотонности функции, известным из школьного курса, но пока что не доказанным строго; порочного круга это не создает, так как при доказательстве этих результатов в нашем курсе предложение **1.4.9** использоваться не будет.

Итак, пусть k — натуральное число. В дроби $\dfrac{\ln n}{n^{1/k}}$ в числителе и знаменателе стоят монотонно возрастающие последовательности неотрицательных чисел; поэтому дискретное правило Лопиталя (предложение **1.4.7**) показывает, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)/n^b = 0$ будет доказано, если мы установим, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1)^{1/k} - n^{1/k}} = 0. \tag{1.4.5}$$
Заметим, что ввиду леммы $\ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) \leqslant 1/n$; с другой стороны, применяя тождество
$$\frac{1}{a-b} = \frac{a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}}{a^k - b^k}$$
для $a = (n+1)^{1/k}$, $b = n^{1/k}$, получаем, что
$$\frac{1}{(n+1)^{1/k} - n^{1/k}} = (n+1)^{(k-1)/k} + (n+1)^{(k-2)/k}n^{1/k} + \ldots$$
$$\ldots + (n+1)^{1/k}n^{(k-2)/k} + n^{(k-1)/k} \leqslant k(n+1)^{(k-1)/k}.$$

Следовательно, последовательность в (1.4.5) можно оценить так:

$$\frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)^{1/k}-n^{1/k}} \leqslant \frac{k}{n}\cdot(n+1)^{(k-1)/k};$$

при этом

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}\cdot(n+1)^{(k-1)/k} = k\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)^{(k-1)/k} =$$
$$= k\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot(n+1)^{-1/k}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{-1/k}=0$, отсюда и из теоремы о двух милиционерах следует, что выполняется соотношение (1.4.5). Это доказывает предложение. □

Итак, логарифмическая функция растет медленнее не только линейной функции, но и любой степенной функции с положительным показателем.

1.5. РЯДЫ

Перед тем, как переходить к следующей теме, скажем несколько слов про пределы последовательностей комплексных чисел. Определение предела для такой последовательности выглядит дословно так же, как определение **1.1.1**. Именно, пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел и $a\in\mathbb{C}$. Тогда говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $N\in\mathbb{N}$, что $|z_n-a|<\varepsilon$, как только $n>N$. Переформулировка с ε-окрестностями также возможна, только на сей раз множество $z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<\varepsilon$ — это не интервал, а открытый круг в комплексной плоскости. Предложение **1.1.3** (единственность предела), а также предложения **1.1.4**, **1.1.5**, **1.1.8** и **1.1.9** («арифметика пределов») также выполнены, с теми же доказательствами. Аналога теоремы о двух милиционерах для последовательностей комплексных чисел нет, так как неравенства между комплексными числами не определяются.

Следующее простое предложение устанавливает связь между пределами последовательностей комплексных и действительных чисел.

Предложение 1.5.1. *Пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел и $a\in\mathbb{C}$. Положим $x_n=\mathrm{Re}(z_n)$, $y_n=\mathrm{Im}(z_n)$, $x=\mathrm{Re}(a)$, $y=\mathrm{Im}(a)$. Тогда следующие два утверждения равносильны*:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Доказательство. Ясно, что равенства $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ равносильны равенствам $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-a|=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0$

и $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n - a| = 0$ соответственно. Теперь равносильность утверждений **(1)** и **(2)** вытекает из очевидных неравенств

$$0 \leqslant |x_n - a| \leqslant |z_n - a| \leqslant |x_n - a| + |y_n - a|$$

(и аналогичного, с $|y_n - a|$ в левой части), теоремы о пределе суммы и теоремы о двух милиционерах. $\square$

После этого вступления перейдем собственно к рядам. Строго говоря, теория рядов — не что иное, как изложенная иным способом теория пределов последовательностей; тем не менее соответствующие формулировки и широко используются, и весьма удобны.

Определение 1.5.2. *Рядом* (точнее, числовым рядом) называется формальная бесконечная сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где a_j — произвольные комплексные числа. Другие обозначения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ или попросту $\sum a_n$. Иногда также суммирование начинается с нуля или с другого номера.

Определение 1.5.3. *Частичными суммами* ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называются суммы $S_k = a_1 + \ldots + a_k$.

Ряд называется *сходящимся*, если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$, и число $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ называется при этом *суммой ряда*. Обозначение:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Если ряд не является сходящимся, он называется *расходящимся*.

Перечислим некоторые простые свойства рядов.

Предложение 1.5.4. (1) *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, *причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(2) *Для всякого* $k \in \mathbb{N}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$.

(3) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$, *и при этом*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n).$$

Доказательство. Утверждение **(1)** следует из того, что предел суммы равен сумме пределов, утверждение **(2)** — из того, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ отличаются от частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на константу, а утверждение **(3)** — из предложения **1.5.1**. $\square$

Наша ближайшая цель — установить различные «признаки сходимости» рядов, т.е. критерии, позволяющие по внешнему виду ряда выяснить, что он сходится или расходится. Самый простой в этом ряду — следующий необходимый признак сходимости.

Предложение 1.5.5. *Если ряд* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Говорят еще так: если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

Доказательство. Если $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ — сумма ряда, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Так как $a_n = S_n - S_{n-1}$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \square$$

Утверждение, обратное к предложению **1.5.5**, совершенно неверно: существует много расходящихся рядов со стремящимся к нулю общим членом. Например, у ряда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

имеем

$$S_n \geqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,,$$

так что предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится. Ниже нам встретятся и другие примеры.

К сходимости рядов с произвольными членами мы еще вернемся, а пока что займемся признаками сходимости «рядов с положительными членами».

Определение 1.5.6. Ряд $\sum a_n$ называется *рядом с положительными членами*, если все a_n суть неотрицательные действительные числа.

Предложение 1.5.7. *Ряд с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.*

Доказательство. Пусть $\sum a_n$ — ряд с положительными членами и $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — его частичные суммы. Тогда последовательность $\{A_n\}$ является монотонно возрастающей, а монотонно возрастающая последовательность действительных чисел сходится тогда и только тогда, когда она ограничена (см. лемму **1.1.7** и предложение **1.1.13**). $\square$

Предложение 1.5.8 (признак сравнения). *Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — ряды с положительными членами, причем $a_n \geqslant b_n$ для всех n. Тогда*:
— *если ряд $\sum a_n$ сходится, то и ряд $\sum b_n$ сходится*;
— *если ряд $\sum b_n$ расходится, то и ряд $\sum a_n$ расходится.*

Доказательство. Два утверждения логически эквивалентны, так что достаточно доказать первое из них. Обозначим частичные суммы через $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ и $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$; из условия следует, что $B_n \leqslant A_n$ при всех n. Ввиду условия $A_n \leqslant A = \sum a_n$; следовательно, $B_n \leqslant A$ при всех n и ряд $\sum b_n$ сходится ввиду предложения **1.5.7**. $\square$

Признак сравнения не всегда удобно применять буквально в том виде, как указано в предложении **1.5.8**. Сейчас мы приведем его усиленную формулировку, которую удобно применять на практике. Сначала — простое замечание.

Предложение 1.5.9. *Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ отличаются только в конечном числе членов. Тогда два эти ряда сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Если два данные ряда отличаются только в конечном числе членов, то существует такое N, что $a_n = b_n$ при всех $n \geqslant N$. Если обозначить k-е частичные суммы рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ через A_k и B_k соответственно, то при $n \geqslant N$ имеем

$$B_k = A_k - (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n).$$

Стало быть, последовательность $\{B_k\}$ при всех достаточно больших k отличается от последовательности $\{A_k\}$ прибавлением константы, так что сходимость одной из этих последовательностей равносильна сходимости другой. $\square$

Следствие 1.5.10. *Если в ряде отбросить конечное число членов, то на его сходимость или расходимость это не повлияет.*

Доказательство. Отбрасывание члена ряда равносильно замене его на нуль, так что это частный случай предыдущего предложения. □

Теперь мы можем сформулировать обещанный усиленный признак сравнения.

Предложение 1.5.11 (усиленный признак сравнения I). *Пусть* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *— ряды с положительными членами.*

(а) *Если существуют такие числа* $C > 0$ *и* $N \in \mathbb{N}$, *что* $a_n \leqslant Cb_n$ *при всех* $n \geqslant N$, *и если при этом ряд* $\sum b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum a_n$ *сходится.*

(б) *Если существуют такие числа* $c > 0$ *и* $N \in \mathbb{N}$, *что* $a_n \geqslant cb_n$ *при всех* $n \geqslant N$, *и если при этом ряд* $\sum b_n$ *расходится, то и ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Доказательство. Докажем, например, утверждение **(а)**. Заменим первые N членов ряда $\sum a_n$ на нули. На сходимость ряда это (ввиду предложения **1.5.9**) не повлияет, зато для всех n будет выполнено неравенство $a_n \leqslant Cb_n$. Так как ряд $\sum b_n$ сходится, ряд $\sum Cb_n$ тоже сходится, а тогда по предложению **1.5.8** сходится и $\sum a_n$.

Утверждение **(б)** доказывается аналогично, надо только заменить нулями первые N членов ряда $\sum b_n$. □

Вот еще один вариант признака сравнения, чуть более слабый, но удобный на практике.

Предложение 1.5.12 (усиленный признак сравнения II). *Пусть* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *— ряды с положительными членами, и пусть существует* (*конечный*) *предел* $c = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n)$, *причем* $c > 0$. *Тогда ряды* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Выберем число c_1, для которого $0 < c_1 < c$, и число $c_2 > c$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = c$, существует такое натуральное N, что при всех $n \geqslant N$ имеем

$$a_n/b_n \leqslant c_2 \Leftrightarrow a_n \leqslant c_2 \cdot b_n$$

и

$$a_n/b_n \geqslant c_1 \Leftrightarrow b_n \leqslant c_1^{-1} a_n.$$

Теперь все следует из предложения **1.5.11**. □

Чтобы пользоваться признаком сравнения, необходимо иметь набор рядов для сравнения, про которые нам заранее известно, что эти ряды сходятся или расходятся. Простейший из таких рядов — геометрическая прогрессия.

Предложение 1.5.13. *Пусть* $a > 0$, $q > 0$. *Тогда ряд*

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

сходится при $0 < q < 1$ *и расходится при* $q \geqslant 1$.

Доказательство. При $q \geqslant 1$ ряд расходится, так как его общий член aq^{n-1} не стремится к нулю при $n \to \infty$ (предложение **1.5.5**). Если же $0 < q < 1$, то предел частичных сумм можно посчитать явно,

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q},$$

и ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}. \qquad \square$$

Явное выражение для суммы «бесконечно убывающей геометрической прогрессии», полученное в этом доказательстве, известно из курса средней школы.

Во многих случаях сравнение ряда с геометрической прогрессией можно проводить напрямую; в некоторых ситуациях оно упрощается, если применить следующее предложение, известное под названием признака Даламбера.

Предложение 1.5.14. *Пусть* $\sum a_n$ *— ряд с положительными членами. Предположим, что существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = \theta$. *Тогда если* $\theta < 1$, *то ряд сходится, а если* $\theta > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство. Предположим, что $\theta < 1$; выберем число q, удовлетворяющее неравенствам $\theta < q < 1$. Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $a_{n+1}/a_n \leqslant q$. Имеем теперь, при $k > N$,

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \leqslant a_N q^{k-N} = \frac{a_N}{q^N} \cdot a^k.$$

Стало быть, при всех $k \geqslant N$ k-й член ряда не превосходит k-го члена сходящейся геометрической прогрессии, так что $\sum a_n$ сходится по признаку сравнения 1.5.11.

Если $\theta \geqslant 1$, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$. Имеем теперь, при $k > N$,

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \geqslant a_N,$$

так что в этом случае общий член ряда не стремится к нулю. $\square$

Вскоре мы увидим, что если в условиях признака Даламбера $\theta = 1$, то ряд может и сходится, и расходиться.

Наряду с геометрическими прогрессиями для сравнения удобны ряды, о которых идет речь в следующем предложении. Признак Даламбера для них ничего не дает.

Предложение 1.5.15. *Пусть* $s > 0$. *Тогда ряд*

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \tag{1.5.1}$$

сходится при $s > 1$ *и расходится при* $s \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $s > 1$; нам достаточно показать, что частичные суммы ряда (1.5.1) ограничены. Для этого в свою очередь достаточно показать, что ограничены частичные суммы вида

$$S_{2^n-1} = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^s}.$$

Обозначая для краткости n-й член ряда через a_n, представим сумму S_{2^n-1} в следующем виде:

$$S_{2^n-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + \\ + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n-1}).$$

Оценим суммы в скобках. Сумма

$$(a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \tag{1.5.2}$$

состоит из 2^k слагаемых, и каждое из них не превосходит $a_{2^k} = 1/2^{ks}$. Поэтому сумма (1.5.2) не превосходит $2^k/2^{ks} = (2^{1-s})^k$, откуда

$$S_{2^n-1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (2^{1-s})^k \leqslant \frac{1}{1-2^{1-s}}$$

(мы воспользовались тем, что $2^{1-s} < 1$, так как $s > 1$). Этим доказана сходимость ряда при $s > 1$.

Пусть теперь $0 < s \leqslant 1$; так как $1/n^s \geqslant 1/n$, ввиду признака сравнения достаточно установить, что ряд расходится при $s = 1$; для этого достаточно установить неограниченность последовательности его частичных сумм.

Обозначая для краткости n-й член ряда через a_n, представим сумму S_{2^n-1} в следующем виде:

$$S_{2^n-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + \\ + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n-1}).$$

Сумма

$$(a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \tag{1.5.3}$$

состоит из 2^k слагаемых, и каждое из них больше $a_{2^{k+1}} = 1/2^{k+1}$. Поэтому сумма (1.5.3) не меньше $2^k/2^{k+1} = 1/2$, откуда

$$S_{2^n-1} \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Этим доказана неограниченность частичных сумм. □

Ряд (1.5.1) при $s = 1$ известен под названием *гармонического ряда*.

Вот еще один важный признак сходимости рядов.

Предложение 1.5.16 (признак абсолютной сходимости)**.** *Пусть*

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

— ряд из комплексных чисел. Если ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$$

сходится, то и исходный ряд сходится.

Обратное утверждение неверно: ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

сходится (вы это докажете, решив одну из задач ниже), а ряд из модулей его членов, как мы видели, расходится.

Ряд, удовлетворяющий условиям предложения **1.5.16**, называется *абсолютно сходящимся*.

(**Определение 1.5.17.** Ряд $\sum a_i$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |a_i|$.)

Предложение **1.5.16** показывает, что всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Доказательство. Положим $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$, $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Имеем $|a_n| \leqslant |z_n|$, $|b_n| \leqslant |z_n|$ для всякого n, так что из условия и признака сравнения вытекает, что ряды $\sum |a_n|$ и $\sum |b_n|$ сходятся. Если мы докажем, что из этого вытекает сходимость рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$, то все будет доказано. Поэтому все сводится к случаю, когда все $z_n = x_n$ — действительные числа.

Далее, для всякого $x \in \mathbb{R}$ положим

$$x_+ = \max(x, 0),$$
$$x_- = -\min(x, 0).$$

Имеем очевидное $x = x_+ - x_-$, причем x_+ и x_- — неотрицательные числа, не превосходящие $|x|$. Поскольку ряд $\sum |x_n|$ сходится, ряды с положительными членами $\sum(x_n)_+$ и $\sum(x_n)_-$ сходятся по признаку сравнения. Поскольку $x_n = (x_n)_+ - (x_n)_-$, имеем

$$x_1 + \ldots + x_n = ((x_1)_+ + \ldots + (x_n)_+) - ((x_1)_- + \ldots + (x_n)_-);$$

теперь сходимость последовательности частичных сумм ряда $\sum x_n$ вытекает из сходимости рядов $\sum(x_n)_+$ и $\sum(x_n)_-$ и теоремы о пределе разности. $\square$

1.6. ПОСТРОЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Теперь мы готовы перейти к формальному определению действительных чисел.

Мы будем определять действительное число как последовательность рациональных чисел, «его приближающую». При этом, во-первых, надо, чтобы последовательность в принципе могла к чему-нибудь стремиться (приближения к какому числу задает последовательность $a_n = (-1)^n$?) и, во-вторых, надо отождествлять последовательности, «стремящиеся к одному и тому же».

Определение 1.6.1. Последовательность рациональных чисел $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что $|a_m - a_n| < \varepsilon$, как только $m, n \geqslant N$.

(В этом определении ε — рациональное число: ведь мы делаем вид, что никаких других не знаем!)

Определение 1.6.2. Две фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются *эквивалентными*, если $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Эквивалентность фундаментальных последовательностей будем обозначать знаком $\sim$.

Поскольку предел суммы равен сумме пределов, отношение эквивалентности на множестве фундаментальных последовательностей действительно заслуживает этого названия[4]. Следовательно, множество всех фундаментальных последовательностей представляется в виде объединения попарно не пересекающихся подмножеств — «классов эквивалентности»: в каждом классе все последовательности эквивалентны, а никакие две последовательности из разных классов не эквивалентны.

Определение 1.6.3. *Действительным числом* называется класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

[4] То есть оно рефлексивно ($a \sim a$ для всех a), симметрично (если $a \sim b$, то $b \sim a$) и транзитивно (если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{Q}$, то последовательность $\{a_n\}$ эквивалентна последовательности, все члены которой совпадают с a. Если отождествить класс всякой такой последовательности с числом a, то получим вложение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$; далее мы всегда будем подразумевать, что $\mathbb{Q}$ вложено в $\mathbb{R}$ именно таким образом.

Итак, *множество* действительных чисел мы построили. Теперь надо определить сложение, умножение и неравенства и убедиться, что они обладают привычными свойствами. Для всего этого нужна небольшая техническая подготовка.

Предложение 1.6.4. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу $a \in \mathbb{Q}$, то она фундаментальна.*

Доказательство. Из условия следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon/2$ при $n \geqslant N$. Следовательно, если $m, n \geqslant N$, то $|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. □

Предложение 1.6.5. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

(Напомним, что последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число M, что $|a_n| \leqslant M$ для всех n.)

Доказательство. Если $\{a_n\}$ фундаментальна, то существует такое N, что $|a_m - a_n| < 1$, как только $m, n \geqslant N$. Следовательно, все члены последовательности с номерами, большими N, заключены между $a_N - 1$ и $a_N + 1$; поскольку кроме них у последовательности имеется только конечное число членов, последовательность ограничена. □

Теперь определим сложение, вычитание и умножение действительных чисел. Заметим, что если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — фундаментальные последовательности, то последовательности $\{a_n \pm b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ также фундаментальны. В самом деле, для суммы и разности это немедленно вытекает из неравенства $|(a_m \pm b_m) - (a_n \pm b_n)| \leqslant |a_m - a_n| + |b_m - b_n|$, а для произведения выводится из предложения **1.6.5** следующим образом. Поскольку $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ фундаментальны, существует такое M, что $|a_n| \leqslant M$ и $|b_n| \leqslant M$ для всех n; стало быть, если N настолько велико, что $|a_m - a_n| < \varepsilon/2M$ и $|b_m - b_n| < \varepsilon/2M$ при $m, n \geqslant N$, то

$$|a_m b_m - a_n b_n| = |a_m(b_m - b_n) + (a_m - a_n)b_n| \leqslant$$
$$\leqslant |a_m| \cdot |b_m - b_n| + |a_m - a_n| \cdot |b_n| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Имея это в виду, определим сумму (соответственно разность, произведение) действительных чисел, заданных фундаментальными последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, как действительно число, заданное фундаментальной последовательностью $\{a_n + b_n\}$ (соответственно $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$).

Чтобы это определение было корректным, надо, чтобы при замене последовательности $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ на эквивалентную результирующая последовательность также заменялась на эквивалентную. Для сложения и вычитания это совсем легко: если $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, т.е. $a_n - a'_n \to 0$, то и последовательность $(a_n + b_n) - (a'_n + b_n) = a_n - a'_n$ также стремится к нулю. Для умножения это опять-таки выводится из предложения **1.6.5**: если $a_n - a'_n \to 0$ и $|b_n| \leqslant M$ при всех n, то $|a_n b_n - a'_n b_n| \leqslant M \cdot |a_n - a'_n|$, и правая часть этого неравенства стремится к нулю.

Итак, мы определили на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел сложение и умножение; очевидно, что эти операции обладают обычными свойствами (коммутативность, ассоциативность, наличие нуля и противоположных элементов, дистрибутивность).

Чтобы доказать возможность деления на ненулевое число, а также определить неравенства, нам понадобится еще один технический факт.

Предложение 1.6.6. *Пусть $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность рациональных чисел, не стремящаяся к нулю. Тогда либо существуют такие $c > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \geqslant c$ при всех $n > N$, либо существуют такие $c < 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \leqslant c$ при всех $n > N$.*

Доказательство. Поскольку $\{a_n\}$ не стремится к нулю, существует такое $\varepsilon > 0$, что для бесконечно большого количества номеров $n \in \mathbb{N}$ имеем $|a_n| \geqslant \varepsilon$. Поскольку $\{a_n\}$ фундаментальна, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при $m, n \geqslant N$ имеем $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$. Так как, в частности, существует $n \geqslant N$, для которого $|a_n| \geqslant \varepsilon$, отсюда следует, что при $m \geqslant N$ имеем либо $a_m > \varepsilon/2$, либо $a_m < -\varepsilon/2$. Так как при $m, m' \geqslant N$ имеем $|a_m - a_{m'}| < \varepsilon/2$, отсюда вытекает, что только одно из этих неравенств выполняется при всех $m \geqslant N$. В первом из этих случаев полагаем $c = \varepsilon/2$, во втором полагаем $c = -\varepsilon/2$. □

Теперь мы в состоянии определить деление действительных чисел. Для этого достаточно определить обратное к ненулевому числу. Всякое ненулевое действительное число задается фундаментальной последовательностью, не стремящейся к нулю. Пусть такова последовательность $\{a_n\}$. Тогда из предложения **1.6.6** вытекает, что существует такое $c > 0$, что $|a_n| > c$ при всех $n \geqslant N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Положим $b_n = 1/a_n$ при $n \geqslant N$ и $b_n = 0$ при $n < N$. Из неравенства $|b_m - b_n| = \dfrac{|a_m - a_n|}{a_m a_n} \leqslant \dfrac{|a_m - a_n|}{c^2}$, выполненного при всех $m, n \geqslant N$, следует, что последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна. В самом деле, зададимся положительным рациональным числом ε. Ввиду фундаментальности последовательности $\{a_n\}$ существует такое N_1, что $|a_m - a_n| < c^2\varepsilon$ при $m, n > N_1$. Положим теперь $N_2 = \max(N, N_1)$; если $m, n > N_2$, то

$$|b_m - b_n| \leqslant \frac{|a_m - a_n|}{c^2} < \frac{c^2\varepsilon}{c^2} = \varepsilon,$$

что и утверждалось. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$ (при $n > N$ все члены этой последовательности равны единице), число, представляемое последовательностью $\{b_n\}$, обратно к числу, представляемому фундаментальной последовательностью $\{a_n\}$. Этим доказана возможность деления на ненулевые числа. По-ученому говоря, мы установили, что действительные числа образуют *поле*.

Чтобы определить неравенства, достаточно определить, что такое положительное число. Заметим, что если $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность, не стремящаяся к нулю, то ввиду предложения **1.6.6** либо существует такое $c > 0$, что $a_n \geqslant c$ для всех n, кроме конечного числа, либо существует такое $c < 0$, что $a_n \leqslant c$ для всех n, кроме конечного числа. В первом случае будем говорить, что число, соответствующее последовательности $\{a_n\}$, *положительно*, а во втором — что оно *отрицательно*. Впрочем, надо еще проверить, что положительность и отрицательность не зависят от выбора фундаментальной последовательности, представляющей данное число. Это делается следующим образом. Пусть, например, для фундаментальной последовательности $\{a_n\}$ существуют такие $c > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \geqslant c$ при всех $n > N$: это и означает по нашему определению, что она представляет положительное число. Если последовательность $\{b_n\}$ эквивалентна последовательности $\{a_n\}$, то это по определению значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Значит, существует такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что $|a_n - b_n| < c/2$ при всех $n > N_1$. Если теперь $n > \max(N, N_1)$, то из неравенств $a_n \geqslant c$ и $|b_n - a_n| < c/2$ вытекает, что $b_n \geqslant c/2$. Значит, $b_n \geqslant c/2 > 0$ для всех n, кроме конечного числа, так что последовательность $\{b_n\}$ также представляет положительное число. Итак, положительность и отрицательность определены корректно.

Из нашего определения положительных и отрицательных чисел легко видеть, что верны следующие утверждения:

- всякое $\alpha \in \mathbb{R}$ либо положительно, либо равно нулю, либо отрицательно, причем эти три возможности попарно несовместимы.
- $\alpha \in \mathbb{R}$ положительно тогда и только тогда, когда $-\alpha$ отрицательно;
- сумма и произведение положительных чисел положительны.

Если теперь положить по определению, что $\alpha > \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta$ положительно, то окажется, что для действительных чисел выполнены все обычные свойства неравенств (поскольку они формально выводятся из перечисленных выше свойств множества положительных чисел). По-ученому говоря, мы ввели на $\mathbb{R}$ структуру *упорядоченного поля*.

Далее, можно определить абсолютную величину действительного числа по формуле $|a| = \max(a, -a)$ и проверить все обычные неравенства с модулями. Эта чисто формальная деятельность предоставляется читателю.

Коль скоро определены неравенства, обретают смысл определенное в разд. **1.1** понятие предела последовательности действительных чисел; при этом доказательства всех утверждений из этого раздела, кроме «доказательства» теоремы о монотонной ограниченной последовательности, становятся полностью строгими, благо в них ничего, кроме свойств неравенств, не используется.

Итак, мы теперь знаем строгое определение действительных чисел; остается выяснить, как оно связано с известным из средней школы высказыванием «действительное число — это бесконечная десятичная дробь».

Предложение 1.6.7. **(а)** *Всякое действительное число является суммой ряда*

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots, \tag{1.6.1}$$

где a_0 *— целое число, а всякое* a_j *при* $j > 0$ *— целое число от* 0 *до* 9.

(б) *Если*

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots,$$
$$x = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} + \ldots$$

— два представления одного и того же числа в виде (1.6.1), *то либо*

(1) $a_j = b_j$ для всех j,

либо

(2) *существует такое* k, *что* $a_j = b_j$ *при* $j < k$, $a_k = b_k + 1$, $a_j = 0$, $b_j = 9$ *при* $j > k$,

либо

(3) *выполняется условие пункта* (2), *в котором буквы* a *и* b *поменялись местами.*

Попросту говоря, если две десятичные дроби задают одно и то же число, то либо они совпадают, либо одна из них содержит бесконечный «хвост» из девяток.

Для доказательства этого предложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.6.8 («аксиома Архимеда»). *Для всякого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *найдется такое* $n \in \mathbb{N}$, *что* $n > \alpha$; *для всякого положительного* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *найдется такое* $r \in \mathbb{Q}$, *что* $0 < r < \varepsilon$.

Доказательство леммы. Второе утверждение леммы немедленно следует из первого, если положить $\alpha = 1/\varepsilon$ и $r = 1/n$. Для доказательства первого утверждения заметим, что фундаментальная последовательность $\{a_m\}$, представляющая число α, ограничена ввиду предложения **1.6.5**; в частности, $a_m < M$ для некоторого $M \in \mathbb{Q}$ и всех m. Пусть n — такое натуральное число, что $n > M + 1$. Тогда $n - a_m > 1$ для всех m, так что число $n - \alpha$, представляемое фундаментальной последовательностью $\{n - a_m\}$, положительно. □

Доказательство. Пусть x — данное действительное число. Из аксиомы Архимеда вытекает, что среди целых чисел, меньших x, существует максимальное (надо взять наименьшее целое число, большее или равное x, и вычесть из него единицу); обозначим это число через a_0; по построению имеем

$$0 \leqslant x - a_0 < 1. \tag{1.6.2}$$

Далее, обозначим через a_1 наибольшее из (целых) чисел $0, 1, \ldots, 9$, для которых $a_0 + \frac{a_1}{10} \leqslant x$ (для его существования не нужна и аксиома Архимеда — достаточно неравенства (1.6.2)). По построению имеем

$$0 \leqslant x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right) < \frac{1}{10}.$$

Теперь обозначим через a_2 наибольшее из чисел $0, 1, \ldots, 9$, для которых

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leqslant x,$$

и т.д. В итоге получится последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$, в которой a_0 — целое число, все остальные a_j — целые числа от 0 до 9, и

$$0 \leqslant x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}\right) < \frac{1}{10^k}. \tag{1.6.3}$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}(1/10^k) = 0$ (чтобы не ссылаться на предложение **1.4.1**, использующее еще не доказанные нами свойства пределов, вот формальное доказательство: для всякого $\varepsilon > 0$ по аксиоме Архимеда существует рациональное число r, для которого $0 < r < \varepsilon$; очевидно, что для всех достаточно больших n имеем $1/10^n < r$), из (1.6.3) вытекает, что ряд (1.6.1) сходится к x. Этим доказано утверждение **(а)**.

Для доказательства утверждения **(б)** предположим, что $a_j = b_j$ при всех $j < k$, но $a_k < b_k$; не ограничивая общности, можно считать, что $a_k < b_k$. Имеем

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \ldots =$$
$$= a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_{k+1}}{10^{k+1}} + \ldots;$$

сокращая в этом равенстве на $(a_0 + a_1/10 + \ldots + a_{k-1}/10^{k-1})$ и умножая на 10^k, получаем, что

$$a_k + \mathfrak{a}_{k+1}10 + \frac{a_{k+2}}{10^2} + \ldots = b_k + \mathfrak{b}_{k+1}10 + \frac{b_{k+2}}{10^2} + \ldots \tag{1.6.4}$$

Заметим, что левая часть равенства (1.6.4) не превосходит

$$a_k + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots =$$
$$= a_k + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right) = a_k + \frac{9}{10}\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = a_k + 1$$

(мы «по-ученому» доказали, что периодическая дробь 0,999… равна единице; для суммировании геометрической прогрессии со знаменателем $1/10$ используется только соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} 1/10^n = 0$, которое, как мы видели, можно доказать нашими скромными средствами). Отсюда сразу видно, что равенство (1.6.4) невозможно, если $b_k > a_k + 1$, так как в этом случае его правая часть будет больше левой; стало быть, $b_k = a_k + 1$. Но тогда правая часть в (1.6.4) будет строго больше, чем $b_k = a_k + 1$, если хотя бы одна из «десятичных цифр» b_j отлична от нуля при $j > k$, а левая часть в (1.6.4) будет строго меньше, чем $a_k + 1$, если хотя бы одна из «десятичных цифр» a_j меньше девятки при $j > k$. Стало быть, единственный случай, когда равенство (1.6.4) выполняется — это если $b_k = a_k + 1$, $b_j = 0$ при $j > k$ и $a_j = 9$ при $j > k$. Предложение доказано. $\square$

Неоднозначность записи действительного числа в виде десятичной дроби — источник технических трудностей, но при этом и благо: как мы увидим в дальнейшем (когда познакомимся с так называемыми p-адическими числами), именно благодаря этой неоднозначности на числовой оси отсутствуют «дырки».

1.7. СВОЙСТВА ПОЛНОТЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Докажем теперь серию важных результатов, называемых теоремами о полноте действительных чисел. В число этих результатов входит и теорема о монотонной ограниченной последовательности, так что после этого раздела станут полностью обоснованными и все рассуждения из разд. **1.1–1.5**, в которых мы на указанную теорему опирались.

Покажем сначала, что всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.

Предложение 1.7.1. *Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такая последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ рациональных чисел, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.*

Это предложение, конечно, немедленно следует из возможности представить действительное число в виде бесконечной десятичной дроби: в качестве искомой последовательности можно взять просто частичные суммы ряда (1.6.1). Для разнообразия приведем другое доказательство.

Доказательство. Пусть действительное число α представляется фундаментальной последовательностью $\{a_n\}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (предел берется в $\mathbb{R}$!).

Ввиду второй части леммы **1.6.8** достаточно убедиться, что для всякого *рационального* $r > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - \alpha| \leqslant r$ при всех $n \geqslant N$. Поскольку, однако, последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям определения 1.6.1, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_m - a_n| \leqslant r$ при

$m, n \geqslant N$. В частности, при всех $m, n \geqslant N$ имеем $|a_m - a_N| \leqslant r$ или, что равносильно, $a_n - r \leqslant a_m \leqslant a_n + r$. Ввиду нашего определения неравенств отсюда вытекает, что $a_n - r \leqslant \alpha \leqslant a_n + r$, т.е. $|a_n - \alpha| \leqslant r$. Так как это верно при всех $n \geqslant N$, предложение доказано. □

Будем называть последовательность действительных чисел *фундаментальной*, если она удовлетворяет условиям определения **1.6.1** (при этом под ε понимается произвольное действительное число).

Теорема 1.7.2 (критерий Коши)**.** *Последовательность действительных чисел имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Часть «только тогда» доказывается дословно так же, как предложение **1.6.4**. Докажем часть «тогда».

Пусть $\{\alpha_n\}$ — фундаментальная последовательность действительных чисел. Ввиду предложения **1.7.1** для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $r_n \in \mathbb{Q}$, что $|\alpha_n - r_n| < 1/n$. Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ фундаментальна: имеем

$$|r_m - r_n| \leqslant |\alpha_m - \alpha_n| + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

и ясно, что если при $m, n \geqslant N$ имеем $|\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon/3$, а также $1/m < \varepsilon/3$ и $1/n < \varepsilon/3$, то для таких[5] m и n будет выполнено неравенство $|r_m - r_n| < \varepsilon$. Пусть α — действительное число, соответствующее фундаментальной последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$; из предложения **1.7.1** (точнее говоря, из его доказательства) явствует, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$. Поскольку обе последовательности $\{r_n\}$ и $\{\alpha_n - r_n\}$ имеют предел (вторая из них стремится к нулю, поскольку ее n-й член по модулю меньше, чем $1/n$), из теоремы о пределе суммы вытекает, что предел есть и у последовательности $\{\alpha_n\}$. □

Доказательство критерия Коши — последнее место в нашем курсе, где мы напрямую использовали определение действительных чисел как классов фундаментальных последовательностей. Далее мы будем пользоваться более удобными средствами.

Определение 1.7.3. *Точной верхней гранью* подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наименьшее из чисел $c \in \mathbb{R}$, обладающих следующим свойством: $x \leqslant c$ при всех $x \in X$ (такие числа мы будем называть «верхними границами» множества X). Точная верхняя грань множества X обозначается $\sup X$.

---

[5] При доказательстве существования m и n, для которых $1/m < \varepsilon/3$ и $1/n < \varepsilon/3$, мы опять пользуемся аксиомой Архимеда.

Очевидно, что точная верхняя грань (иногда мы будем для краткости говорить просто «верхняя грань») единственна, если она существует. Ясно, что она не существует, если множество M не является ограниченным сверху (т.е. содержит сколь угодно большие числа). Во всех остальных случаях, однако, точная верхняя грань имеется.

Теорема 1.7.4 (о верхней грани)**.** *Всякое ограниченное сверху непустое подмножество $X \subset \mathbb{R}$ имеет верхнюю грань.*

Доказательство. Обозначим через x_1 наибольшее целое число, не являющееся верхней границей множества X (такое существует ввиду «аксиомы Архимеда» **1.6.8**). Построим теперь по индукции последовательность чисел $\{x_n\}$, ни одно из которых не является верхней границей множества X, следующим образом. В качестве x_1 берем число, построенное выше, а x_{n+1} строим по x_n так: если $x_n + 1/2^n$ также не является верхней границей множества X, то полагаем $x_{n+1} = x_n + 1/2^n$; в противном же случае полагаем $x_{n+1} = x_n$. Из нашего построения следует, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ число $x_n + 1/2^{n-1}$ является верхней границей для X.

Заметим, что $0 \leqslant x_{n+1} - x_n \leqslant 1/2^n$, так что при $m > n$ имеем

$$0 \leqslant x_m - x_n \leqslant \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-2}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}};$$

стало быть, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и тем самым по критерию Коши имеет предел (обозначим его x). Покажем, что x — верхняя грань множества X.

1) *x является верхней границей для X*. Пусть, напротив, $y \in X$ и $y > x$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x + 1/2^{n-1} < y$; имеем $x_n + 1/2^{n-1} \leqslant x + 1/2^{n-1} < y$ — в противоречие с тем, что $x_n + 1/2^{n-1}$ — верхняя граница для X.

2) *x является наименьшей верхней границей для X*. Пусть, напротив, $y < x$ и y является верхней границей для x. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x_n \geqslant y$; поскольку y является верхней границей для X, а x_n — нет, получаем противоречие. □

У множества X, не являющегося ограниченным сверху, точной верхней грани в смысле определения **1.7.3** по понятным причинам не существует; тем не менее иногда в этом случае пишут $\sup X = +\infty$.

Точной нижней гранью или просто нижней гранью подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наибольшее из таких чисел c, что $c \leqslant x$ при всех $x \in X$. Из теоремы **1.7.4** ясно, что всякое ограниченное снизу множество имеет (единственную) точную нижнюю грань. Точная нижняя грань множества X обозначается $\inf X$. Иногда полагают, что точная нижняя грань множества, не ограниченного снизу, равна $-\infty$.

Вот теперь мы в состоянии строго доказать теорему о монотонной ограниченной последовательности.

Предложение 1.7.5. *Всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность действительных чисел имеет предел.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность, для которой

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots;$$

обозначим через $X \subset \mathbb{R}$ подмножество, состоящее из чисел x_n для всевозможных натуральных n. Так как по условию существует такое C, что $x_n \leqslant C$ для всех n, множество X ограничено сверху; стало быть, ввиду теоремы **1.7.4** у него есть верхняя грань ξ.

Покажем, что $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\xi - \varepsilon$ не является верхней границей для множества X; значит, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_N > \xi - \varepsilon$. Если $n > N$, и подавно $x_n \geqslant x_N > \xi - \varepsilon$. С другой стороны, так как ξ — верхняя граница для X, имеем $x_n \leqslant \xi$ для вообще всех n. В итоге получаем, что если $n > N$, то $\xi - \varepsilon < x_n \leqslant \xi$, откуда $|x_n - \xi| < \varepsilon$. Ввиду произвольности выбора ε это означает, что ξ является пределом последовательности $\{x_n\}$. □

1.8. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ СВОЙСТВ ПОЛНОТЫ

Начнем с понятия, которое нам уже знакомо (как минимум в примерах). Речь идет о понятии подпоследовательности.

Именно: пусть у нас есть последовательность $\{x_n\}$; неформально говоря, подпоследовательность получится, если выбросить из нее часть членов (с тем, чтобы их осталось бесконечно много и чтобы оставшиеся члены последовательности шли в том же порядке, что и раньше). Формализуется это понятие следующим образом.

Определение 1.8.1. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность, и пусть $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — строго возрастающая последовательность. Тогда последовательность вида $\{y_n\}$, где $y_n = x_{\varphi(n)}$, называется *подпоследовательностью* исходной последовательности.

Вот простое, но важное свойство подпоследовательностей.

Предложение 1.8.2. *Если последовательность* (*действительных или комплексных чисел*) $\{a_n\}$ *сходится к числу* a, *то и всякая ее подпоследовательность сходится к* a.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность $\{b_n = a_{\varphi(n)}\}$. Так как $\lim a_n = a$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon$, как только $n > N$. Заметим теперь, что из строгого возрастания функции φ вытекает, что $\varphi(n) \geqslant n$ для всех n (так как $\varphi(1) \geqslant 1$ и $\varphi(k+1) \geqslant \varphi(k)+1$). Поэтому (при тех же ε и N) получаем, что из $n > N$ вытекает, что $\varphi(n) \geqslant n > N$, так что $|y_n - a| = |x_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$. Этим доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. $\square$

Определение 1.8.3. Точка a называется *предельной точкой* последовательности $\{a_n\}$, если у этой последовательности есть подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, сходящаяся к a.

Предложение 1.8.4. *Следующие два условия равносильны.*

(1) *Точка a является предельной точкой последовательности a_n.*

(2) *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много номеров $n \in \mathbb{N}$, для которых $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Доказательство. **(1) ⇒ (2)**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $K > 0$, что при $k > K$ имеем $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Остается заметить, что номеров n_k, где $k > K$, бесконечно много.

(2) ⇒ (1). Зафиксируем какую-нибудь последовательность положительных чисел ε_n, стремящуюся к нулю (например, $\varepsilon_n = 1/n$). По условию существует такое $k_1 \in \mathbb{N}$, что $|a_{k_1} - a| < \varepsilon_1$. Далее, существует бесконечно много таких m, что $|a_m - a| < \varepsilon_2$; поскольку таких номеров бесконечно много, они не могут все быть $\leqslant k_1$, так что существует такой $k_2 > k_1$, что $|a_{k_2} - a| < \varepsilon_2$; пользуясь аналогичным образом бесконечностью множества

$$\{m \in \mathbb{N} \mid |a_m - a| < \varepsilon_3\},$$

найдем такое $k_3 > k_2$, что $|a_{k_3} - a| < \varepsilon_3$, и т.д. В итоге будет построена строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$, для которой $|a_{k_j} - a| < \varepsilon_j$; поскольку $\varepsilon_j \to 0$, имеем $\lim\limits_{j\to\infty} a_{k_j} = a$, в результате мы нашли подпоследовательность, сходящуюся к a. $\square$

До сих пор нам было все равно, являются члены наших последовательностей действительными или произвольными комплексными числами. В следующей ниже важной теореме, однако, они будут действительными, так как в ней существенно используются порядковые свойства действительных чисел.

Определение 1.8.5. *Верхним пределом* последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ называется ее наибольшая предельная точка, если таковая существует.

Нижним пределом последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ называется ее наименьшая предельная точка, если таковая существует.

Верхний предел последовательности $\{x_n\}$ обозначается $\overline{\lim}\, x_n$, а нижний предел этой последовательности обозначается $\underline{\lim}\, x_n$.

Теорема 1.8.6. *Если последовательность действительных чисел ограничена, то у нее существуют верхний и нижний пределы.*

Доказательство. Докажем существование верхнего предела у ограниченной последовательности $\{x_n\}$ (существование нижнего предела доказывается аналогично или переходом к последовательности $\{-x_n\}$).

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$y_k = \sup_{m \geqslant k} x_m;$$

поскольку последовательность $\{x_m\}$ ограничена сверху, такая верхняя грань существует для всякого k. Далее, очевидно, что $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots$ — последовательность $\{y_k\}$ монотонно убывает. Поскольку последовательность $\{x_m\}$ ограничена снизу (скажем, $x_n \geqslant C$ при всех n), имеем $y_k \geqslant x_k \geqslant C$ при всех k, так что последовательность $\{y_k\}$ ограничена снизу. Стало быть, существует предел $y = \lim\limits_{k \to \infty} y_k$. Покажем, что y является верхним пределом последовательности $\{x_n\}$. Для этого надо проверить два утверждения: **(1)** y — предельная точка последовательности $\{x_n\}$; **(2)** если $y' > y$, то y' предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ не является.

(1) От противного: предположим, что y не является предельной точкой. Тогда ввиду предложения 1.8.4 существуют такие $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ имеем либо $x_n \geqslant y + \varepsilon$, либо $x_n \leqslant y - \varepsilon$. Стало быть, при $n \geqslant N$ имеем либо $y_n \geqslant y + \varepsilon$ (если существует такое $n' \geqslant n$, что $x_{n'} \geqslant y + \varepsilon$), либо $y_n \leqslant y - \varepsilon$ (если $x_{n'} \leqslant y - \varepsilon$ при всех $n' \geqslant n$). В любом случае выходит, что $|y_n - y| \geqslant \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$; это противоречит тому, что $\lim y_k = y$.

(2) Пусть $y' > y$; выберем число c, для которого $y < c < y'$. Так как $\lim y_n = y$, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $y_n < c$; следовательно, и подавно $x_k < c$ при $k \geqslant n$. Если теперь положить, скажем, $\varepsilon = y' - c > 0$, то при всех $k \geqslant n$ имеем $|x_k - y'| > \varepsilon$; ввиду предложения 1.8.4 отсюда следует, что y' не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$. □

Следствие 1.8.7. *Если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то*

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{k \to \infty} \sup_{m \geqslant k} x_m,$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{k \to \infty} \inf_{m \geqslant k} x_m,.$$

Эти равенства были установлены нами в процессе доказательства теоремы.

Следствие 1.8.8. *Если $c > \overline{\lim}\, x_n$, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $x_n \leqslant c$.*

Это также содержится в доказательстве теоремы (а конкретнее, утверждения **(2)**).

Следствие 1.8.9 (лемма Больцано)**.** *Всякая ограниченная последовательность действительных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.*

Следствие **1.8.9** будет играть важную роль в дальнейшем.

С помощью верхнего и нижнего пределов можно следующим образом охарактеризовать сходящиеся последовательности.

Предложение 1.8.10. *Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность действительный чисел. Тогда она имеет предел в том и только в том случае, когда $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, причем в этом случае общее значение верхнего и нижнего пределов последовательности совпадает с ее пределом.*

Доказательство. Пусть $\lim x_n = a$. Тогда (по предложению **1.8.2**) всякая подпоследовательность в $\{x_n\}$ также сходится к a; стало быть, a — единственная предельная точка нашей последовательности, она же наименьшая и наибольшая, так что $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a$.

Обратно, пусть $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a$. Положим

$$y_k = \sup_{m \geqslant k} x_m, \qquad z_k = \sup_{m \geqslant k} x_m.$$

Очевидно, $z_k \leqslant x_k \leqslant y_k$ при всех k и, с другой стороны, $\lim y_k = \lim z_k = a$ по следствию **1.8.7**. Стало быть, $\lim x_n = a$ по теореме о двух милиционерах. □

Изложенную выше теорию можно слегка обобщить на случай не обязательно ограниченных последовательностей. Именно: рассмотрим множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, полученное формальным присоединение к $\mathbb{R}$ символов $+\infty$ и $-\infty$. Будем считать, что $-\infty < x < \infty$ для всякого $x \in \mathbb{R}$ (никаких арифметических операций с символами $\pm\infty$ не производится). Тогда в множестве $\overline{\mathbb{R}}$ символ $+\infty$ является верхней границей всякого множества действительных чисел; если это множество неограниченно сверху, то $+\infty$ является тем самым и его верхней гранью. Аналогично, $-\infty$ является нижней гранью всякого неограниченного снизу множества. Далее, будем говорить, что $+\infty$ является предельной точкой последовательности действительных чисел, если у нее есть подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim x_{n_k} = +\infty$; это условие, как легко видеть, равносильно тому, что $\{x_n\}$ неограниченна сверху. Аналогично, $-\infty$ является предельной точкой последовательности тогда и только тогда, когда она неограниченна снизу. Если принять этот формализм, то окажется, что у *любой* монотонной последовательности действительных чисел есть предел в $\overline{\mathbb{R}}$ (хотя бы в виде $+\infty$ или $-\infty$) и что у *любой* последовательности действительных чисел есть верхний и нижний пределы в $\overline{\mathbb{R}}$ (опять-таки хотя бы в виде $+\infty$ или $-\infty$). Предлагаем читателю продумать подробности самостоятельно — это полезное упражнение.

Мы применим понятие верхнего предела к задаче о сходимости степенных рядов. Именно, рассмотрим ряд вида

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{1.8.1}$$

где a_j — произвольные комплексные числа (если кому-то психологически легче считать числа a_n и z действительными, он может так и делать; упрощений это не принесет). Такие ряды называются *степенными рядами*; они играют в математике очень важную роль. В частности, важен вопрос о том, при каких $z \in \mathbb{C}$ ряд (1.8.1) сходится. На этот вопрос можно получить почти исчерпывающий ответ.

Предложение 1.8.11 (формула Коши–Адамара). *Положим, для ряда* (1.8.1) $R = 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ *(допуская вольность речи, полагаем, что* $1/0 = +\infty$ *и* $1/(+\infty) = 0$). *Тогда ряд* (1.8.1) *сходится при* $|z| < R$ *и расходится при* $|z| > R$ *(если* $R = +\infty$, *это означает, что ряд сходится при всех* z; *если* $R = 0$, *это означает, что ряд сходится только при* $z = 0$).

Число R из предложения **1.8.11** называется *радиусом сходимости* ряда (1.8.1). Заметим, что предложение ничего не говорит про сходимость ряда при $|z| = R$ («на границе круга сходимости»): в этом случае ничего определенного a priori сказать нельзя.

Доказательство. Разберем сначала случай, когда $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = a$ отличен от 0 и от $+\infty$. Пусть $|z| < R$; тогда $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1/|z|$. Выберем какое-нибудь число c, для которого $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} < c < 1/|z|$. По следствию **1.8.8** существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant c$, т.е. $|a_n| \leqslant c^n$. Следовательно, при $n \geqslant N$ имеем $|a_n z^n| \leqslant |cz|^n$. Так как $c < 1/|z|$, имеем $|cz| < 1$, так что ряд $\sum |cz|^n$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Поскольку при всех $n \geqslant N$ модуль n-го члена ряда (1.8.1) не превосходит n-й член сходящейся прогрессии, по признаку сравнения сходится ряд $\sum |a_n z^n|$, а значит (по признаку абсолютной сходимости), и ряд (1.8.1).

Пусть теперь, напротив, $|z| > R$, т.е. $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R > 1/|z|$. По определению верхнего предела существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = 1/R$; стало быть, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что при $k \geqslant K$ имеем $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant 1/|z|$ или, что равносильно, $|a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant 1$. Итак, в ряде (1.8.1) имеется бесконечно много членов, модуль которых $\geqslant 1$; значит, общий член этого ряда не стремится к нулю и ряд расходится.

Если $R = +\infty$, то $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = 0$; отсюда и из следствия **1.8.8** легко видеть, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1/(2|z|)$, откуда $|a_n z^n| \leqslant 1/2^n$; стало быть, ряд (1.8.1) сходится ввиду признака сравнения и признака абсолютной сходимости.

Если, наконец, $R = 0$, т.е. $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то существует такая строго возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$, что $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant 1/|z|$, т.е. $|a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant 1$. Остается только дословно повторить одно из предыдущих рассуждений: итак, в ряде (1.8.1) имеется бесконечно много членов, модуль которых $\geqslant 1$ — и так далее. □

На практике нередко можно обойтись без нахождения верхнего предела последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$, решив вопрос об абсолютной сходимости ряда (1.8.1) иными способами. Вот не универсальный (в отличие от формулы Коши–Адамара), но полезный признак.

Предложение 1.8.12. *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = R \in$ $\in [0;\ +\infty]$, *то радиус сходимости ряда* (1.8.1) *равен* $1/R$. (*По-прежнему считаем, что* $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.)

Доказательство. Положим $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| \in [0; +\infty) = a$; по-прежнему будем считать, что $0 < a < +\infty$, оставив «крайние случаи» читателю.

Положим $1/a = R$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} z^{n+1}|/|a_n z^n| = |z| \cdot a = |z|/R.$$

Если $|z| > R$, то этот предел больше единицы, так что модуль общего члена ряда (1.8.1) стремится к бесконечности и тем самым этот ряд расходится. Если $|z| < R$, то этот предел меньше единицы, так что ряд (1.8.1) абсолютно сходится по признаку Даламбера. Если ряд расходится при $|z| > R$ и сходится при $|z| < R$, то R — его радиус сходимости. □

1.9. РЯДЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

До сих пор у нас не было ни одного признака сходимости рядов с произвольными членами, кроме признака абсолютной сходимости. Сейчас мы восполним этот пробел.

Предложение 1.9.1 (признак Лейбница)**.** *Если* $\{a_n\}$ *— монотонно убывающая последовательность действительных чисел, стремящаяся к нулю, то ряд*

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \tag{1.9.1}$$

сходится.

Доказательство. Обозначим n-ю частичную сумму ряда (1.9.1) через S_n. Для доказательства предложения достаточно установить, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ существуют и равны. Заметим, что

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

где в правой части все скобки неотрицательны, так как последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает. Значит, последовательность $\{S_{2n}\}$ монотонно возрастает. С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1,$$

так как опять все скобки неотрицательны. Стало быть, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ существует, так как последовательность монотонно возрастает и ограничена.

Аналогично разберемся и с «нечетными» частичными суммами. Так как

$$S_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}),$$

где в правой части все скобки неотрицательны, эта последовательность монотонно убывает; с другой стороны,

$$S_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1} \geqslant 0,$$

так что последовательность $\{S_{2n-1}\}$ ограничена снизу; значит, и эта последовательность имеет предел. Наконец,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) \lim_{n\to\infty} (-a_{2n}) = 0,$$

так что пределы последовательностей $\{S_{2n}\}$ и S_{2n-1} совпадают. Все доказано. $\square$

Из признака Лейбница вытекает, например, что ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

сходится; в дальнейшем мы увидим, что его сумма равна $\ln 2$.

На самом деле признак Лейбница является весьма частным случаем следующего полезного факта.

Предложение 1.9.2 (признак Дирихле). *Если $\{a_n\}$ — монотонно убывающая последовательность действительных чисел, стремящаяся к нулю, а $\{u_n\}$ — последовательность произвольных комплексных чисел, обладающая тем свойством, что модули ее частичных сумм ограничены, то ряд*

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n + \ldots \tag{1.9.2}$$

сходится.

Признак Лейбница получается из признака Дирихле, если положить $u_n = (-1)^{n-1}$: так как частичные суммы последовательности $\{(-1)^{n-1}\}$ равны то -1, то 0, их модули ограничены.

В доказательстве признака Дирихле используется следующая элементарная, но важная лемма.

Лемма 1.9.3 (лемма о преобразовании Абеля). *Пусть $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — последовательности чисел (действительных или комплексных); для всякого натурального k положим*

$$Q_k = q_1 + \ldots + q_k.$$

Тогда для всякого натурального n имеем

$$p_1q_1 + \ldots + p_nq_n = (p_1 - p_2)Q_1 + (p_2 - p_3)Q_2 + \ldots + (p_{n-1} - p_n)Q_{n-1} + p_nQ_n.$$

Доказательство леммы. В сумме $p_1q_1 + \ldots + p_nq_n$ следует заменить q_j на $Q_j - Q_{j-1}$ при $j > 1$ и q_1 на Q_1, раскрыть скобки и привести подобные. □

Преобразование Абеля является дискретным аналогом «формулы интегрирования по частям», речь о которой пойдет в дальнейшем.

Доказательство признака Дирихле. Обозначим n-ю частичную сумму ряда (1.9.2) через S_n. Мы докажем сходимость последовательности $\{S_n\}$ по критерию Коши, оценивая разность $S_{m+k} - S_m$.

Полагая в лемме **1.9.3** $p_j = a_{m+j}$, $q_j = u_{m+j}$, получаем, что

$$\begin{aligned} S_{m+k} - S_m &= a_{m+1}u_{m+1} + \ldots + a_{m+k}u_{m+k} = \\ &= (a_{m+1} - a_{m+2})U_1 + \ldots + (a_{m+k-1} - a_{m+k})U_{k-1} + a_{m+k}U_k, \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

где $U_j = u_{m+1} + \ldots + u_{m+j}$.

По условию существует такая константа $C > 0$, что $|u_1 + \ldots + u_n| \leqslant C$ для всех n. Следовательно,

$$|U_j| = |(u_1 + \ldots + u_{m+j}) - (u_1 + \ldots + u_m)| \leqslant 2C$$

при всех j. Кроме того, $a_{m+j} - a_{m+j+1} \geqslant 0$ для всякого j, так как $\{a_n\}$ — монотонно убывающая последовательность действительных чисел. Стало быть,

$$|(a_{m+j} - a_{m+j+1})U_j| \leqslant 2C(a_{m+j} - a_{m+j+1})$$

для всякого j. Поэтому, принимая во внимание (1.9.3), имеем

$$\begin{aligned} |S_{m+k} - S_m| \leqslant 2C((a_{m+1} - a_{m+2}) + \ldots + (a_{m+k-1} - a_{m+k})) + 2Ca_{m+k} = \\ = 2Ca_{m+1}. \end{aligned}$$

Если теперь задано $\varepsilon > 0$, то существует такое N, что $a_{m+k} < \varepsilon/2C$ при $m > N$ (поскольку все a_j положительны и $\lim\limits_{j\to 0} a_j = 0$). Отсюда имеем

$$|S_{m+k} - S_m| \leqslant 2C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$$

при всех $m > N$ и всех k, чем сходимость последовательности частичных сумм ряда (1.9.2) и доказана. □

К признаку Дирихле очень близок и так называемый *признак Абеля*.

Теорема 1.9.4 (признак Абеля). *Если $\{a_n\}$ — монотонная и ограниченная последовательность действительных чисел и если $u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ — сходящийся ряд из произвольных комплексных чисел, то ряд*

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n + \ldots \quad (1.9.4)$$

также сходится.

Доказательство. Так как последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, она сходится к некоторому пределу a. Представим теперь общий член ряда (1.9.4) в виде

$$a_n u_n = a \cdot u_n - (a - a_n) u_n.$$

Теперь заметим, что ряд $au_1 + au_2 + \ldots$ сходится, так как ряд $u_1 + u_2 + \ldots$ сходится, а ряд $(a - a_n)u_1 + (a - a_2)u_2 + \ldots$ сходится по признаку Дирихле: в самом деле, последовательность $\{a - a_n\}$ монотонна и стремится к нулю, а частичные суммы ряда $u_1 + u_2 + \ldots$ ограничены, так как этот ряд сходится. Значит, сходится и ряд $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots$ □

1.10. УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Покажите, что если в сходящейся последовательности изменить конечное число членов, то она останется сходящейся, а ее предел не изменится.

1.2. (а) Придумайте определение понятия «последовательность $\{x_n\}$ сходится к $+\infty$» (обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$). Неформально это понятие означает, что члены последовательности становятся бо́льшими любого наперед заданного числа.

(б) Придумайте определение понятия «последовательность $\{x_n\}$ сходится к ∞» (обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$). Неформально это понятие означает, что члены последовательности становятся *по абсолютной величине* бо́льшими любого наперед заданного числа. (Последовательности, стремящиеся к $+\infty$ или $\pm\infty$, сходящимися называть не принято.)

1.3. (а) Покажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} 1/x_n = 0$.

(б) Покажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}0$ и $x_n{\neq}0$ для всех n, то $\lim\limits_{n\to\infty} 1/x_n{=}\infty$.

1.4. Покажите, что утверждение задачи **1.1** останется верным, если вместо «сходящаяся» написать «сходящаяся к ∞», «сходящаяся к $+\infty$» или «сходящаяся к $-\infty$» (а что это такое, кстати?).

1.5. (а) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $a_n \geqslant b_n$ для всех n. Покажите, что $a \geqslant b$.

(б) Докажите то же утверждение для случая, когда $a_n \geqslant b_n$ для всех n, кроме, возможно, конечного числа.

1.6. Пусть последовательность $\{x_n\}$ обладает тем свойством, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = b$. Покажите, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если $a \neq b$, и сходится, если $a = b$.

1.7. (а) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $x_n \geqslant y_n$ при всех n. Докажите, что $a \geqslant b$ (указание: удобно доказывать от противного).