

Оглавление

Предисловие	8
ЧАСТЬ I	
<i>Глава I. Аналитическая геометрия на плоскости</i>	
§ 1. Прямоугольные и полярные координаты	10
§ 2. Прямая	21
§ 3. Кривые второго порядка	34
§ 4. Преобразование координат и упрощение уравнений кривых второго порядка	42
§ 5. Определители второго и третьего порядков и системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными	51
<i>Глава II. Элементы векторной алгебры</i>	
§ 1. Прямоугольные координаты в пространстве	58
§ 2. Векторы и простейшие действия над ними	60
§ 3. Скалярное и векторное произведения. Смешанное произведение	63
<i>Глава III. Аналитическая геометрия в пространстве</i>	
§ 1. Плоскость и прямая	69
§ 2. Поверхности второго порядка	83
<i>Глава IV. Определители и матрицы</i>	
§ 1. Понятие об определителе n -го порядка	91
§ 2. Линейные преобразования и матрицы	96
§ 3. Приведение к каноническому виду общих уравнений кривых и поверхностей второго порядка	107
§ 4. Ранг матрицы. Эквивалентные матрицы	114
§ 5. Исследование системы m линейных уравнений с n неизвестными	117
§ 6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	121
§ 7. Применение метода Жордана—Гаусса к решению систем линейных уравнений	125
<i>Глава V. Основы линейной алгебры</i>	
§ 1. Линейные пространства	134
§ 2. Преобразование координат при переходе к новому базису	142
§ 3. Подпространства	144
§ 4. Линейные преобразования	149
§ 5. Евклидово пространство	160
§ 6. Ортогональный базис и ортогональные преобразования	165
§ 7. Квадратичные формы	169
<i>Глава VI. Введение в анализ</i>	
§ 1. Абсолютная и относительная погрешности	176
§ 2. Функция одной независимой переменной	178

§ 3. Построение графиков функций	181
§ 4. Пределы	183
§ 5. Сравнение бесконечно малых	189
§ 6. Непрерывность функции	191
Глава VII. Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной	
§ 1. Производная и дифференциал	194
§ 2. Исследование функций	212
§ 3. Кривизна плоской линии	230
§ 4. Порядок касания плоских кривых	232
§ 5. Вектор-функция скалярного аргумента и ее производная	233
§ 6. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой. Кривизна и кручение	236
Глава VIII. Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных	
§ 1. Область определения функции. Линии и поверхности уровня	240
§ 2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных	242
§ 3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	253
§ 4. Экстремум функции двух независимых переменных	255
Глава IX. Неопределенный интеграл	
§ 1. Непосредственное интегрирование. Замена переменной и интегрирование по частям	260
§ 2. Интегрирование рациональных дробей	271
§ 3. Интегрирование простейших иррациональных функций	285
§ 4. Интегрирование тригонометрических функций	291
§ 5. Интегрирование разных функций	299
Глава X. Определенный интеграл	
§ 1. Вычисление определенного интеграла	300
§ 2. Несобственные интегралы	305
§ 3. Вычисление площади плоской фигуры	309
§ 4. Вычисление длины дуги плоской кривой	311
§ 5. Вычисление объема тела	313
§ 6. Вычисление площади поверхности вращения	315
§ 7. Статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур	316
§ 8. Нахождение координат центра тяжести. Теоремы Гульдена	318
§ 9. Вычисление работы и давления	321
§ 10. Некоторые сведения о гиперболических функциях	325
Глава XI. Элементы линейного программирования	
§ 1. Линейные неравенства и область решений системы линейных неравенств	330
§ 2. Основная задача линейного программирования	333
§ 3. Симплекс-метод	336
§ 4. Двойственные задачи	348
§ 5. Транспортная задача	350

ЧАСТЬ 2*Глава XII. Двойные и тройные интегралы*

§ 1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах	358
§ 2. Замена переменных в двойном интеграле	362
§ 3. Вычисление площади плоской фигуры	366
§ 4. Вычисление объема тела	369
§ 5. Вычисление площади поверхности	370
§ 6. Физические приложения двойного интеграла	373
§ 7. Тройной интеграл	376
§ 8. Приложения тройного интеграла	381
§ 9. Интегралы, зависящие от параметра. Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла	383
§ 10. Гамма-функция. Бета-функция	388

Глава XIII. Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности

§ 1. Криволинейные интегралы по длине дуги и по координатам	396
§ 2. Независимость криволинейного интеграла II рода от контура интегрирования. Нахождение функции по ее полному дифференциалу	401
§ 3. Формула Грина	404
§ 4. Вычисление площади	406
§ 5. Поверхностные интегралы	407
§ 6. Формулы Стокса и Остроградского—Гаусса. Элементы теории поля	411

Глава XIV. Ряды

§ 1. Числовые ряды	421
§ 2. Функциональные ряды	432
§ 3. Степенные ряды	436
§ 4. Разложение функций в степенные ряды	442
§ 5. Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов	447
§ 6. Применение степенных рядов к вычислению пределов и определенных интегралов	452
§ 7. Комплексные числа и ряды с комплексными членами	453
§ 8. Ряд Фурье	464
§ 9. Интеграл Фурье	470

Глава XV. Обыкновенные дифференциальные уравнения

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка	475
§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков	500
§ 3. Линейные уравнения высших порядков	506
§ 4. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов	525
§ 5. Системы дифференциальных уравнений	530

Глава XVI. Элементы теории вероятностей

§ 1. Случайное событие, его частота и вероятность. Геометрическая вероятность	541
§ 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность	545
§ 3. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступлений события	550

§ 4. Формула полной вероятности. Формула Байеса	553
§ 5. Случайная величина и закон ее распределения	555
§ 6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины	559
§ 7. Мода и медиана	562
§ 8. Равномерное распределение	564
§ 9. Биномиальный закон распределения. Закон Пуассона	565
§ 10. Показательное распределение. Функция надежности	568
§ 11. Нормальный закон распределения. Функция Лапласа	571
§ 12. Моменты, асимметрия и эксцесс случайной величины	575
§ 13. Закон больших чисел	579
§ 14. Теорема Муавра—Лапласа	583
§ 15. Системы случайных величин	584
§ 16. Линии регрессии. Корреляция	594
§ 17. Определение характеристик случайных величин на основе опытных данных	598
§ 18. Нахождение законов распределения случайных величин на основе опытных данных	610
 <i>Глава XVII. Понятие об уравнениях в частных производных</i>	
§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных	630
§ 2. Типы уравнений второго порядка в частных производных. Приведение к каноническому виду	632
§ 3. Уравнение колебания струны	636
§ 4. Уравнение теплопроводности	643
§ 5. Задача Дирихле для круга	649
 <i>Глава XVIII. Элементы теории функций комплексной переменной</i>	
§ 1. Функции комплексной переменной	653
§ 2. Производная функции комплексной переменной	656
§ 3. Понятие о конформном отображении	659
§ 4. Интеграл от функции комплексной переменной	663
§ 5. Ряды Тейлора и Лорана	668
§ 6. Нахождение вычетов функций. Применение вычетов к нахождению интегралов	674
 <i>Глава XIX. Элементы операционного исчисления</i>	
§ 1. Нахождение изображений функций	679
§ 2. Отыскание оригинала по изображению	681
§ 3. Свертка функций. Изображение производных и интеграла от оригинала	685
§ 4. Применение операционного исчисления к решению некоторых дифференциальных и интегральных уравнений	687
§ 5. Общая формула обращения	690
§ 6. Применение операционного исчисления к решению некоторых уравнений математической физики	692
 <i>Глава XX. Методы вычислений</i>	
§ 1. Приближенное решение уравнений	697
§ 2. Интерполирование	708
§ 3. Приближенное вычисление определенных интегралов	712

§ 4. Приближенное вычисление кратных интегралов	717
§ 5. Применение метода Монте-Карло к вычислению определенных и кратных интегралов	728
§ 6. Численное интегрирование дифференциальных уравнений	741
§ 7. Метод Пикара последовательных приближений	746
§ 8. Простейшие способы обработки опытных данных	749
<i>Глава XXI. Основы вариационного исчисления</i>	
§ 1. Понятие о функционале	763
§ 2. Понятие о вариации функционала	764
§ 3. Понятие об экстремуме функционала. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера	766
§ 4. Функционалы, зависящие от производных высших порядков	772
§ 5. Функционалы, зависящие от двух функций одной независимой переменной	773
§ 6. Функционалы, зависящие от функций двух независимых переменных	774
§ 7. Параметрическая форма вариационных задач	776
§ 8. Понятие о достаточных условиях экстремума функционала	777
Ответы	778
Приложение	809

Глава I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1

Прямоугольные и полярные координаты

1. Координаты на прямой. Деление отрезка в данном отношении. Точку M координатной оси Ox , имеющую абсциссу x , обозначают через $M(x)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ оси при любом расположении точек на оси находится по формуле

$$d = |x_2 - x_1|. \quad (1)$$

Пусть на произвольной прямой задан отрезок AB (A — начало отрезка, B — его конец); тогда всякая третья точка C этой прямой делит отрезок AB в некотором отношении λ , где $\lambda = \pm AC : CB$. Если отрезки AC и CB направлены в одну сторону, то λ приписывают знак «плюс»; если же отрезки AC и CB направлены в противоположные стороны, то λ приписывают знак «минус». Иными словами, $\lambda > 0$, если точка C лежит между точками A и B ; $\lambda < 0$, если точка C лежит на прямой вне отрезка AB .

Пусть точки A и B лежат на оси Ox , тогда координата точки $C(\bar{x})$, делящей отрезок между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ в отношении λ , находится по формуле

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (2)$$

В частности, при $\lambda = 1$ получается формула для координаты середины отрезка:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (3)$$

1. Построить на прямой точки $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(\sqrt{2})$, $E(-3,5)$.
2. Отрезок AB четырьмя точками разделен на пять равных частей. Найти координату ближайшей к A точки деления, если $A(-3)$, $B(7)$.

□ Пусть $C(\bar{x})$ — искомая точка; тогда $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{4}$. Следовательно, по формуле (2) находим

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{4} \cdot 7}{1 + \frac{1}{4}} = -1, \text{ т. е. } C(-1). \quad \blacksquare$$

3. Известны точки $A(1)$, $B(5)$ — концы отрезка AB ; вне этого отрезка расположена точка C , причем ее расстояние от точки A в 3 раза больше расстояния от точки B . Найти координату точки C .

□ Нетрудно установить, что $\lambda = -\frac{AC}{BC} = -3$ (рекомендуем сделать чертеж). Таким образом,

$$\bar{x} = \frac{1 - 3 \cdot 5}{1 - 3} = 7, \text{ т. е. } C(7). \quad \blacksquare$$

4. Найти расстояние между точками:

1) $M(3)$ и $N(-5)$; 2) $P(-5,5)$ и $Q(-2,5)$.

5. Найти координаты середины отрезка, если известны его концы:

1) $A(-6)$ и $B(7)$; 2) $C(-5)$ и $D(0,5)$.

6. Найти точку M , симметричную точке $N(-3)$ относительно точки $P(2)$.

7. Отрезок AB двумя точками разделен на три равные части. Найти координаты точек деления, если $A(-1)$, $B(5)$.

8. Даны точки $A(-7)$, $B(-3)$. Вне отрезка AB расположены точки C и D , причем $CA = BD = 0,5 AB$. Определить координаты точек C и D .

2. Прямоугольные координаты на плоскости. Простейшие

задачи. Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy , то точку M этой плоскости, имеющую координаты x и y , обозначают $M(x; y)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

В частности, расстояние d от начала координат до точки $M(x; y)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Координаты точки $C(\bar{x}; \bar{y})$, делящей отрезок между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении λ (см. п. 1), находятся по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (4)$$

Расстояние до точки M от прямой $y = -\frac{1}{4}$ найдем из простых геометрических соображений (рис. 1):

$$MN = MK + KN = y + \frac{1}{4}.$$

Так как по условию равенство $MF = MN$ выполняется для любой точки M , лежащей на искомой линии, то уравнение этой линии можно записать в виде

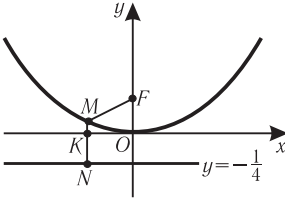


Рис. 1

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = y + \frac{1}{4},$$

или

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16},$$

т.е. $y = x^2$. Линию, определяемую уравнением $y = x^2$, называют *параболой*. ■

39. Составить уравнение множества точек, произведение расстояний которых от точек $F_1(a; 0)$ и $F_2(-a; 0)$ есть постоянная величина, равная a^2 .

□ Возьмем на искомой кривой произвольную точку $M(x; y)$. Ее расстояния от точек: $F_1(a; 0)$ и $F_2(-a; 0)$ составляют $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$. Из условия следует, что $r_1 r_2 = a^2$. Поэтому уравнение искомой кривой запишется так:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2.$$

Приведем это уравнение к рациональному виду:

$$(x^2 + a^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + a^2 + y^2 + 2ax) = a^4,$$

т. е.

$$(x^2 + a^2 + y^2)^2 - 4a^2 x^2 = a^4,$$

или, наконец,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Найденную кривую называют *лемнискатой*. ■

40. Составить уравнение лемнискаты в полярных координатах и построить кривую.

□ В уравнении $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (см. предыдущую задачу) перейдем к полярным координатам по формулам $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Тогда получим

$$(\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)^2 = 2a^2(\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta), \quad \text{или} \quad \rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Это уравнение лемнискаты в полярных координатах.

Построим кривую. Разрешив уравнение относительно ρ , находим $\rho = \pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Из того, что в правой части равенства стоит двойной знак « \pm », а также из того, что уравнение не меняется при замене θ на $-\theta$, заключаем, что лемниската симметрична относительно осей Ox и Oy . Исследуем форму лемнискаты в I четверти, т.е. при $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. При этих значениях ρ и θ имеем $\rho = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos 2\theta}$. Нетрудно установить, что θ может изменяться только в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Таким образом, соответствующая часть кривой заключена между полярной осью и лучом $\theta = \frac{\pi}{4}$. Если $\theta = 0$, то $\rho = a\sqrt{2}$. С возрастанием θ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ величина ρ убывает до значения $\rho = 0$.

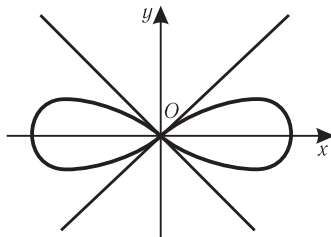


Рис. 2

Учитывая соображения симметрии, построим лемнискату (рис. 2). ■

41. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(1; 1)$ и $B(3; 3)$.

□ Пусть точка M принадлежит искомому множеству; тогда $MA = MB$. Согласно формуле расстояния между двумя точками, находим

$$MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \quad MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

и уравнение линии примет вид

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9,$$

откуда после приведения подобных членов приходим к уравнению $x + y - 4 = 0$. Итак, искомым множеством является прямая, которая, как известно, служит серединным перпендикуляром к отрезку AB . ■

42. Точка M равномерно перемещается по лучу, вращающемуся равномерно около полюса. Составить уравнение линии, описанной точкой M , если в начальный момент вращающийся луч совпадает с полярной осью, а точка M — с полюсом; при повороте же луча на угол $\theta = 1$ (один радиан) точка M удалилась от полюса на расстояние a .

□ Поскольку в начальный момент величины ρ и θ равны нулю, а затем обе возрастают пропорционально времени, нетрудно установить, что они связаны прямой пропорциональной зависимостью: $\frac{\rho}{\theta} = \text{const}$. Но $\rho = a$ при $\theta = 1$; следовательно, $\frac{\rho}{\theta} = \frac{a}{1}$, т.е. $\rho = a\theta$. Кривую $\rho = a\theta$ называют *спиралью Архимеда*. ■