# Оглавление

## ЧАСТЬ 2

# Глава I

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

## § 1

## Прямоугольные и полярные координаты

**1. Координаты на прямой. Деление отрезка в данном отношении.** Точку $M$ координатной оси $Ox$, имеющую абсциссу $x$, обозначают через $M(x)$.

Расстояние $d$ между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ оси при любом расположении точек на оси находится по формуле

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{1}$$

Пусть на произвольной прямой задан отрезок $AB$ ($A$ — начало отрезка, $B$ — его конец); тогда всякая третья точка $C$ этой прямой делит отрезок $AB$ в некотором отношении $\lambda$, где $\lambda = \pm AC : CB$. Если отрезки $AC$ и $CB$ направлены в одну сторону, то $\lambda$ приписывают знак «плюс»; если же отрезки $AC$ и $CB$ направлены в противоположные стороны, то $\lambda$ приписывают знак «минус». Иными словами, $\lambda > 0$, если точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$; $\lambda < 0$, если точка $C$ лежит на прямой вне отрезка $AB$.

Пусть точки $A$ и $B$ лежат на оси $Ox$, тогда координата точки $C(\bar{x})$, делящей отрезок между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ в отношении $\lambda$, находится по формуле

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

В частности, при $\lambda = 1$ получается формула для координаты середины отрезка:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3}$$

**1.** Построить на прямой точки $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(\sqrt{2})$, $E(-3{,}5)$.

**2.** Отрезок $AB$ четырьмя точками разделен на пять равных частей. Найти координату ближайшей к $A$ точки деления, если $A(-3)$, $B(7)$.

❑ Пусть $C(\bar{x})$ — искомая точка; тогда $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{4}$. Следовательно, по формуле (2) находим

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{4} \cdot 7}{1 + \frac{1}{4}} = -1, \text{ т. е. } C(-1). \quad \blacksquare$$

**3.** Известны точки $A(1)$, $B(5)$ — концы отрезка $AB$; вне этого отрезка расположена точка $C$, причем ее расстояние от точки $A$ в 3 раза больше расстояния от точки $B$. Найти координату точки $C$.

❑ Нетрудно установить, что $\lambda = -\frac{AC}{BC} = -3$ (рекомендуем сделать чертеж). Таким образом,

$$\bar{x} = \frac{1 - 3 \cdot 5}{1 - 3} = 7, \text{ т. е. } C(7). \quad \blacksquare$$

**4.** Найти расстояние между точками:
1) $M(3)$ и $N(-5)$; 2) $P(-5{,}5)$ и $Q(-2{,}5)$.

**5.** Найти координаты середины отрезка, если известны его концы:
1) $A(-6)$ и $B(7)$; 2) $C(-5)$ и $D(0{,}5)$.

**6.** Найти точку $M$, симметричную точке $N(-3)$ относительно точки $P(2)$.

**7.** Отрезок $AB$ двумя точками разделен на три равные части. Найти координаты точек деления, если $A(-1)$, $B(5)$.

**8.** Даны точки $A(-7)$, $B(-3)$. Вне отрезка $AB$ расположены точки $C$ и $D$, причем $CA = BD = 0{,}5\,AB$. Определить координаты точек $C$ и $D$.

**2. Прямоугольные координаты на плоскости. Простейшие задачи.** Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат $xOy$, то точку $M$ этой плоскости, имеющую координаты $x$ и $y$, обозначают $M(x; y)$.

Расстояние $d$ между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

В частности, расстояние $d$ от начала координат до точки $M(x; y)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Координаты точки $C(\bar{x}; \bar{y})$, делящей отрезок между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении $\lambda$ (см. п. 1), находятся по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{3}$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{4}$$

Расстояние до точки $M$ от прямой $y = -\frac{1}{4}$ найдем из простых геометрических соображений (рис. 1):

$$MN = MK + KN = y + \frac{1}{4}.$$

Так как по условию равенство $MF = MN$ выполняется для любой точки $M$, лежащей на искомой линии, то уравнение этой линии можно записать в виде

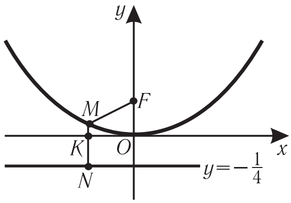


**Рис. 1**

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = y + \frac{1}{4},$$

или

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16},$$

т.е. $y = x^2$. Линию, определяемую уравнением $y = x^2$, называют *параболой*. ■

**39.** Составить уравнение множества точек, произведение расстояний которых от точек $F_1(a; 0)$ и $F_2(-a; 0)$ есть постоянная величина, равная $a^2$.

❏ Возьмем на искомой кривой произвольную точку $M(x; y)$. Ее расстояния от точек: $F_1(a; 0)$ и $F_2(-a; 0)$ составляют $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$. Из условия следует, что $r_1 r_2 = a^2$. Поэтому уравнение искомой кривой запишется так:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2.$$

Приведем это уравнение к рациональному виду:

$$(x^2 + a^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + a^2 + y^2 + 2ax) = a^4,$$

т. е.

$$(x^2 + a^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4,$$

или, наконец,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Найденную кривую называют *лемнискатой*. ■

**40.** Составить уравнение лемнискаты в полярных координатах и построить кривую.

❏ В уравнении $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (см. предыдущую задачу) перейдем к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Тогда получим

$$(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)^2 = 2a^2(\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta), \quad \text{или } \rho^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Это уравнение лемнискаты в полярных координатах.

Построим кривую. Разрешив уравнение относительно $\rho$, находим $\rho = \pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Из того, что в правой части равенства стоит двойной знак « $\pm$ », а также из того, что уравнение не меняется при замене $\theta$ на $-\theta$, заключаем, что лемниската симметрична относительно осей $Ox$ и $Oy$. Исследуем форму лемнискаты в I четверти, т.е. при $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. При этих значениях $\rho$ и $\theta$ имеем $\rho = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos 2\theta}$. Нетрудно установить, что $\theta$ может изменяться только в промежутке от $0$ до $\frac{\pi}{4}$. Таким образом, соответствующая часть кривой заключена между полярной осью и лучом $\theta = \frac{\pi}{4}$. Если $\theta = 0$, то $\rho = a\sqrt{2}$. С возрастанием $\theta$ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ величина $\rho$ убывает до значения $\rho = 0$.

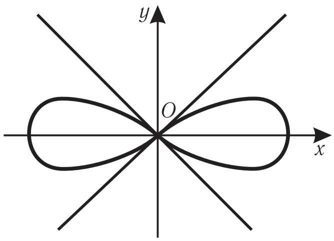

**Рис. 2**

Учитывая соображения симметрии, построим лемнискату (рис. 2). ■

**41.** Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(1;1)$ и $B(3;3)$.

❑ Пусть точка $M$ принадлежит искомому множеству; тогда $MA = MB$. Согласно формуле расстояния между двумя точками, находим

$$MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \quad MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

и уравнение линии примет вид

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9,$$

откуда после приведения подобных членов приходим к уравнению $x + y - 4 = 0$. Итак, искомым множеством является прямая, которая, как известно, служит серединным перпендикуляром к отрезку $AB$. ■

**42.** Точка $M$ равномерно перемещается по лучу, вращающемуся равномерно около полюса. Составить уравнение линии, описанной точкой $M$, если в начальный момент вращающийся луч совпадает с полярной осью, а точка $M$ — с полюсом; при повороте же луча на угол $\theta = 1$ (один радиан) точка $M$ удалилась от полюса на расстояние $a$.

❑ Поскольку в начальный момент величины $\rho$ и $\theta$ равны нулю, а затем обе возрастают пропорционально времени, нетрудно установить, что они связаны прямой пропорциональной зависимостью: $\frac{\rho}{\theta} = \mathrm{const}$. Но $\rho = a$ при $\theta = 1$; следовательно, $\frac{\rho}{\theta} = \frac{a}{1}$, т.е. $\rho = a\theta$. Кривую $\rho = a\theta$ называют *спиралью Архимеда*. ■