УДК 519.63
ББК 22.193
К63

Комияма Х.

К63 Теоремы математики / пер. с яп. А. Б. Клионского. – М.: ДМК Пресс, 2020. – 132 с.: ил.

ISBN 978-5-97060-819-7

Скольких красок достаточно для раскрашивания любой географической карты? Какие типы правильных многоугольников подходят для составления мозаичного узора? Как рассчитать вероятность поступления в один из нескольких выбранных вузов? Ответ на эти и другие вопросы помогают найти теоремы.

Помимо разбора увлекательных задач читатель найдёт в книге любопытные истории – о появлении математических символов, о «числе Шахерезады», о том, к каким неожиданным результатам приводит многократное умножение на 2, и о многом другом. В конце каждой главы приводятся краткие рассказы об известных математиках прошлого.

Издание заинтересует всех, кого увлекают решение математических задач и малоизвестные факты из истории математики.

УДК 519.63
ББК 22.193

ISBN 978-4-53721-579-7 (яп.)
ISBN 978-5-97060-819-7 (рус.)

Содержание

Предисловие

В наши дни математика находится в центре внимания! И не только в Японии, но и в Америке, Европе и остальных странах мира стали замечать важность изучения данной науки.

Центр исследования и реформирования, принадлежащий ОЭСР, проводит исследования не только математики, но и других разнообразных предметов. ОЭСР (OECD) – это аббревиатура международной Организации экономического сотрудничества и развития, получившей известность в Японии благодаря программе PISA (Programme for International Student Assessment – Международной программе по оценке образовательных достижений учащихся), которую ОЭСР начала проводить в 2000 г. Объектами оценки являются 15-летние учащиеся стран – членов ОЭСР. Способности оцениваются главным образом в трёх областях: математическая грамотность, грамотность чтения и естественно-научная грамотность. В тестах много межпредметных задач. Имеются и такие, для решения которых недостаточно простого заучивания наизусть учебного материала. Математические задачи тестов PISA оказались в центре внимания потому, что ввиду осознания необходимости связи с обществом, реальной жизнью среди них есть такие, ответы на которые необходимо давать письменно; во многих задачах важное значение придаётся процессу решения, идеям и подходам. Не будет преувеличением сказать, что именно это послужило толчком для изменения содержания учебников по математике для младшей и средней школ. А раз поменялись учебники, то и изменения в задачах, задаваемых ученикам в средней школе или абитуриентам на вступительных экзаменах, являются лишь вопросом времени. Содержание и методы изучения математики как предмета сильно изменились по сравнению с тем, что изучали на уроках математики наши отцы и матери, которым сейчас более 30 или 40 лет.

Кроме того, не забывайте о том, что с 2020 г. начнут последовательно вводиться новые учебники для младшей и средней школ, в которых будут использоваться совершенно иные подходы к изучению арифметики и математики. Теперь уже недостаточно будет только сосчитать и дать ответ, но потребуется также понимание процесса решения. И ученики должны обсуждать между собой или излагать в письменной форме ход решения, в процессе которого был получен тот или иной ответ.

Причиной подобных нововведений стало понимание того, что обучение в таком формате развивает способности к логическому мышлению, решению разнообразных задач.

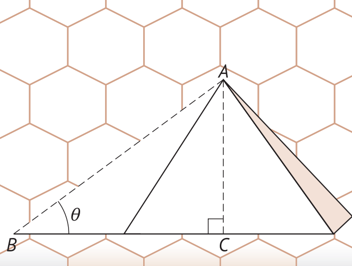
С учётом того что мы живём в эпоху информационных технологий, в начальной школе появятся уроки программирования, однако цель этого не в воспитании будущих программистов, а в развитии у детей способности находить методы решения поставленных задач. Можно с уверенностью сказать, что умение решать задачи, встающие перед нами в жизни, является одной из важнейших способностей, необходимых для общества.

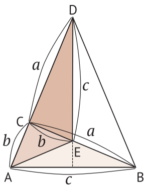
На уроках математики в средней школе изучаются теоремы. Знаете ли вы теорему Пифагора? Если ответом будет «да», то помните ли вы, как вам преподавали её доказательство? Должно быть, её доказывали, основываясь на очевидных фактах и убеждаясь в них. Книгу, которую вы держите в руках, по праву можно назвать беседой о теоремах математики. Как вы знаете, математику с давних времён называли «гимнастикой ума». Математика, как и программирование, является предметом, предназначенным для развития способности мыслить логически. В наши дни благодаря программе PISA, осуществляемой ОЭСР, во всём мире возродился интерес к математике, в особенности к доказательству теорем. Наступила эпоха, когда теоремы математики способны принести ощутимую пользу с точки зрения жизни в современном хаотичном мире. Я убеждён в том, что теоремы математики дадут «силу жить» многим, а не только небольшому количеству увлечённых. Уверен, что ощущение жизненности математики и применение её подходов в жизни позволят вам значительно расширить свои горизонты.

Один хороший день апреля 2018 г.
Комияма Хирохито

Пролог

Основные сведения о теоремах и проблемах





Что же это такое – теоремы математики?

«Теоремой» называют утверждение, выведенное, например, из аксиом, определений, верность которых доказана. Особенностью теорем является то, что их используют в качестве обоснования при доказательстве числовых формул, а также в качестве фундаментальных идей, лежащих в основе математических рассуждений. Весьма важной является простота практического использования теоремы.

Но бывает и так, что конечным результатом, к которому стремятся, оказывается доказательство теоремы.

Другими словами, доказательство теоремы – высшая цель математических размышлений. По этой причине в отношении красоты к теоремам предъявляются повышенные требования.

При изучении теорем нам иногда встречается сочетание «проблема кого-либо». Дело в том, что в математике существует несколько так называемых «проблем кого-либо». Данное выражение означает, что этот «кто-либо» сделал предположение, которое ещё не доказано, и **теоремой оно будет называться только после того, как его докажут**.

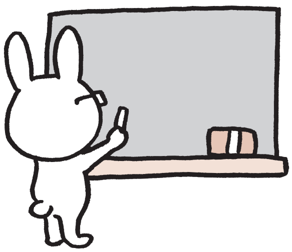
Среди знаменитых проблем есть, например, проблема Гольдбаха, проблема Ферма и другие. Гольдбах, Ферма высказали предположения, но доказать их ещё никому не удалось (теорема Ферма была доказана в 1995 г.).

Хотя сами по себе утверждения вовсе не сложны, но по причине трудности доказательства математики всего мира многие десятки лет мучатся в попытках доказать их. Хотя не так давно были проведены компьютерные вычисления, касающиеся проблемы Гольдбаха, которые показали высокую вероятность правильности этого утверждения, но доказать её пока не удалось никому.

Теоремы – это высшая цель математических размышлений.

Что такое теорема?

Выводится из аксиом, определений и т. п. → Утверждение, верность которого доказана



Особенности теорем

В качестве фундаментальных идей математики они просты в применении и практическом использовании. Могут также являться высшей целью математических рассуждений

Что такое проблема?

Проблема Гольдбаха

Любое чётное число начиная с 4 можно представить в виде суммы двух простых чисел.
Например:
4 = 2 + 2
6 = 3 + 3
8 = 3 + 5
10 = 3 + 7

Простые числа

Натуральные числа, которые делятся только на 1 и на самих себя (при этом 1 простым числом не считается):

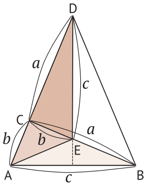
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43...

Существование бесконечного множества простых чисел доказано Евклидом (древнегреческим математиком)

Великая теорема Ферма

$X^n = Y^n + Z^n$ ($n \geqslant 3$)

«Для натуральных чисел n, больших 2, натуральных чисел X, Y, Z, удовлетворяющих указанному уравнению, не существует».



Теорема Пифагора и великая теорема Ферма

Услышав слово «теорема», многие наверняка вспомнят общеизвестную теорему Пифагора, которую изучают в средней школе.

Если в прямоугольном треугольнике с прямым углом $\angle C$ обозначить два катета как a, b и гипотенузу как c, то их соотношение может быть выражено как $a^n = b^n + c^n$ $(n = 2)$.

Теперь давайте рассмотрим теорему, которая является развитием теоремы Пифагора.

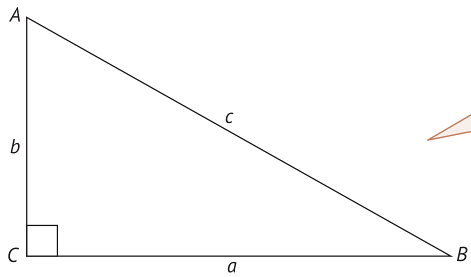
Речь идёт о [$X^n + Y^n = Z^n$ $(n \geqslant 3)$ «Для натуральных чисел n, больших 2, натуральных чисел X, Y, Z, удовлетворяющих указанному уравнению, не существует»]. Это уравнение называют «великой теоремой Ферма». Если смотреть только на уравнение, то может показаться, что оно ничем не отличается от теоремы Пифагора.

Хотя понимание смысла математических задач иногда требует знаний высокого уровня, особенность этой проблемы Ферма заключается в том, что её формулировку можно осознать, даже не обладая глубокими познаниями в математике, – она может даже показаться слишком простой.

Сам Ферма доказал теорему для $n = 4$, но доказательство для общего случая опубликовано не было. При этом Ферма оставил на полях книги по математике запись следующего содержания: «*Я обнаружил удивительное доказательство этой теоремы, но для его изложения поля этой книги слишком узки*». Хотя уравнение великой теоремы Ферма напоминает теорему Пифагора, в действительности их содержание сильно отличается друг от друга.

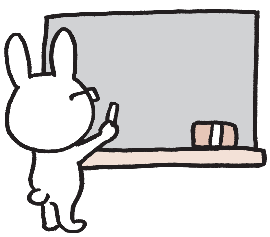
Великая теорема Ферма была доказана в 1995 г.

Теорема Пифагора



Если в прямоугольном треугольнике с прямым углом $\angle C$ обозначить два катета как a, b и гипотенузу как c, то их соотношение может быть выражено как $a^n = b^n + c^n$ ($n = 2$)

Великая теорема Ферма



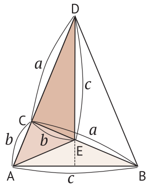
Является развитием и обобщением теоремы Пифагора:

$X^n + Y^n = Z^n$ ($n \geqslant 3$).

Для натуральных чисел n, больших 2, натуральных чисел X, Y, Z, удовлетворяющих указанному уравнению, не существует

Ферма оставил на полях книги по математике следующую запись: «*Я обнаружил удивительное доказательство этой теоремы, но для его изложения поля этой книги слишком узки*»

Считается, что англичанин Эндрю Уайлс, доказавший великую теорему Ферма примерно через 360 лет (в 1995 г.), впервые прочитал об этой проблеме в библиотеке, когда ему было 10 лет



Узнаём про «королеву теорем» – теорему Пифагора

Итак, давайте поговорим о теоремах более конкретно.

Теорема Пифагора, о которой я рассказывал в предыдущем параграфе, является широко известной теоремой элементарной (евклидовой) геометрии – её, наверное, можно назвать «королевой теорем».

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом $\angle C$ выполняется следующее соотношение:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2.$$

Верно и обратное: если в треугольнике ABC выполняется вышеприведённое соотношение, то его угол $\angle C$ является прямым.

Начиная с эпохи Древнего Египта теорема Пифагора использовалась в качестве метода измерения площади земель.

Для измерения площади земель в землю вбивались колья, и, например, между ними натягивались верёвки.

Говорят, что Пифагор придумал доказательство своей теоремы, когда разглядывал узор плитки, которой был выложен пол в древнегреческом храме.

Принято считать, что в общем случае условием «хорошей теоремы» является наличие множества методов её доказательства.

Считается, что для теоремы Пифагора существует не менее 100 методов доказательства.

Из всех этих методов здесь я приведу только два самых знаменитых, а тем из вас, кто заинтересовался, рекомендую самостоятельно попробовать доказать её другими методами.

Теорема Пифагора была открыта примерно 2500 лет назад.

Доказательство теоремы Пифагора

Так как длина одной из сторон большого квадрата, изображённого ниже, равна $b + c$, то площадь этого квадрата будет равна $(b + c)^2$. Кроме того, большой квадрат состоит из четырёх прямоугольных треугольников с длиной основания b, высотой c и одного малого квадрата с длиной стороны a, поэтому площадь большого квадрата можно выразить как

$$4 \times (bc/2) + a^2.$$

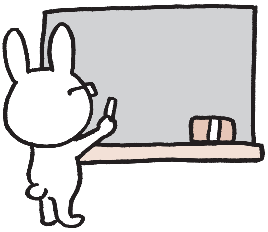
Следовательно,

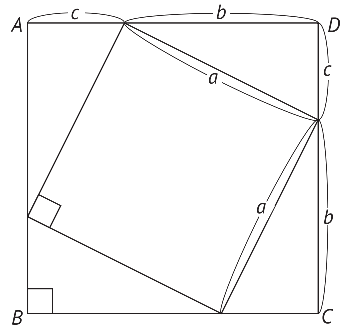
$$(b + c)^2 = 4 \times (bc/2) + a^2;$$
$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2,$$

то есть

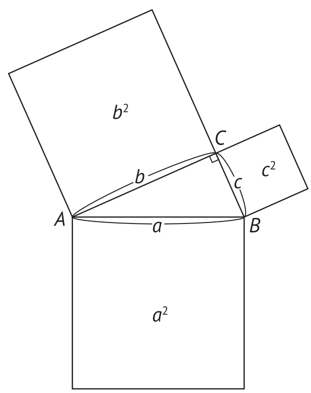
$$a^2 = b^2 + c^2,$$

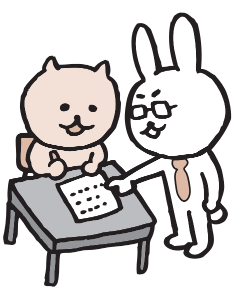
что и требовалось доказать.

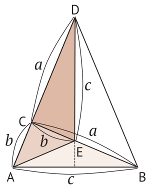




Теорема Пифагора $a^2 = b^2 + c^2$ может быть представлена следующим образом. Пусть $\triangle ABC$ – прямоугольный треугольник с прямым углом $\angle C$. Площадь квадрата, одна из сторон которого является гипотенузой a, будет равна сумме площадей квадрата со стороной a и квадрата со стороной c.







Теоремы математики, активно используемые в нашей жизни

Хотя сложность теорем математики у всех на слуху, гораздо меньше людей знает о том, каким образом эти теоремы в нашей жизни используются на практике. Можно сказать, что многими привычными благами мы в действительности обязаны им, хотя даже не замечаем столь очевидного факта.

Например, теорема Пифагора, которая из всех теорем наиболее нам знакома, широко используется для измерения расстояний. В качестве немного более сложной области её применения можно назвать измерение скоростей, с которыми спутники запускаются в космос. В этом случае нам достаточно вычислить, какой должна быть параллельная поверхности Земли составляющая скорости движения спутника, чтобы он вышел на околоземную орбиту, не падая на Землю и не покидая её. С помощью теоремы Пифагора можно вычислить эту скорость – сколько километров должен пролетать спутник за 1 с.

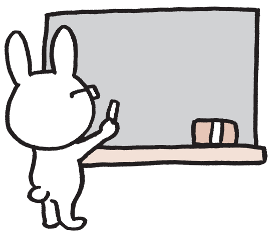
Для измерения площади земельных участков используется теорема синусов, а измерить расстояние между двумя точками при наличии между ними препятствий позволяет теорема косинусов. Дело в том, что непосредственно измерить расстояние между двумя точками A и B будет невозможно, если между ними находятся препятствия: здания, горы, реки и т. п. В этом случае мы можем построить треугольник, выбрав точку C, открытую как со стороны A, так и B, и найти искомое расстояние по теореме косинусов.

Стоит сказать также о такой незаменимой для нас вещи, как мобильный телефон. Чтобы **предотвратить взаимные помехи в системах мобильной радиотелефонной связи, зоны радиопокрытия обозначают разными цветами и выбирают их так, чтобы в смежных зонах не находились опорные станции, работающие на одинаковых частотах.** Для чего и используется теорема о четырёх красках.

Теоремы математики тесно связаны с нашей повседневной жизнью.

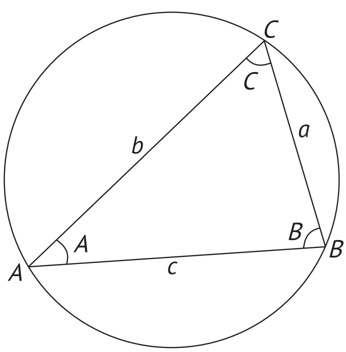
Теоремы математики, прочно вошедшие в нашу жизнь

Теорема Пифагора	=	позволяет находить расстояния, скорости движения и т. п.
Теорема синусов	=	используется для измерения земельных участков
Теорема косинусов	=	позволяет измерить расстояние между двумя точками при наличии препятствий



Теоремы математики играют в жизни незаменимую роль. Без них невозможна деятельность во многих важных областях, хотя мы этого не знаем и не замечаем

Теорема синусов



R – радиус окружности, описанной вокруг ΔABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(подробнее см. на с. 22).

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

(подробнее см. на с. 24).

Теоремы математики используются также, например, и для выбора зон радиопокрытия опорных станций мобильной связи, построения графиков, составления карт местности (подробнее см. в главе 2)

Многократное умножение на 2 даёт умопомрачительный результат

Тоётоми Хидэёси однажды спросил у своего служащего Сорори Синдзаэмона (основателя жанра ракуго), что бы тот хотел получить в награду за свои заслуги.

«В награду за твои заслуги дам тебе то, что ты пожелаешь. Скажи мне, что ты хочешь?»

Синдзаэмон, как следует подумав, ответил:

– Половина этого зала состоит из сотни татами. На первое татами положите 1 рисовое зерно, на следующее – в 2 раза больше, то есть 2, на следующее – опять в 2 раза больше, то есть 4, и продолжайте поступать так, пока не закончатся все татами. Я хотел бы получить все рисовые зерна, выложенные таким способом.

– Всего-навсего? Если бы ты попросил класть мешками, тогда получилось бы действительно много, – уточнил Хидэёси с усмешкой.

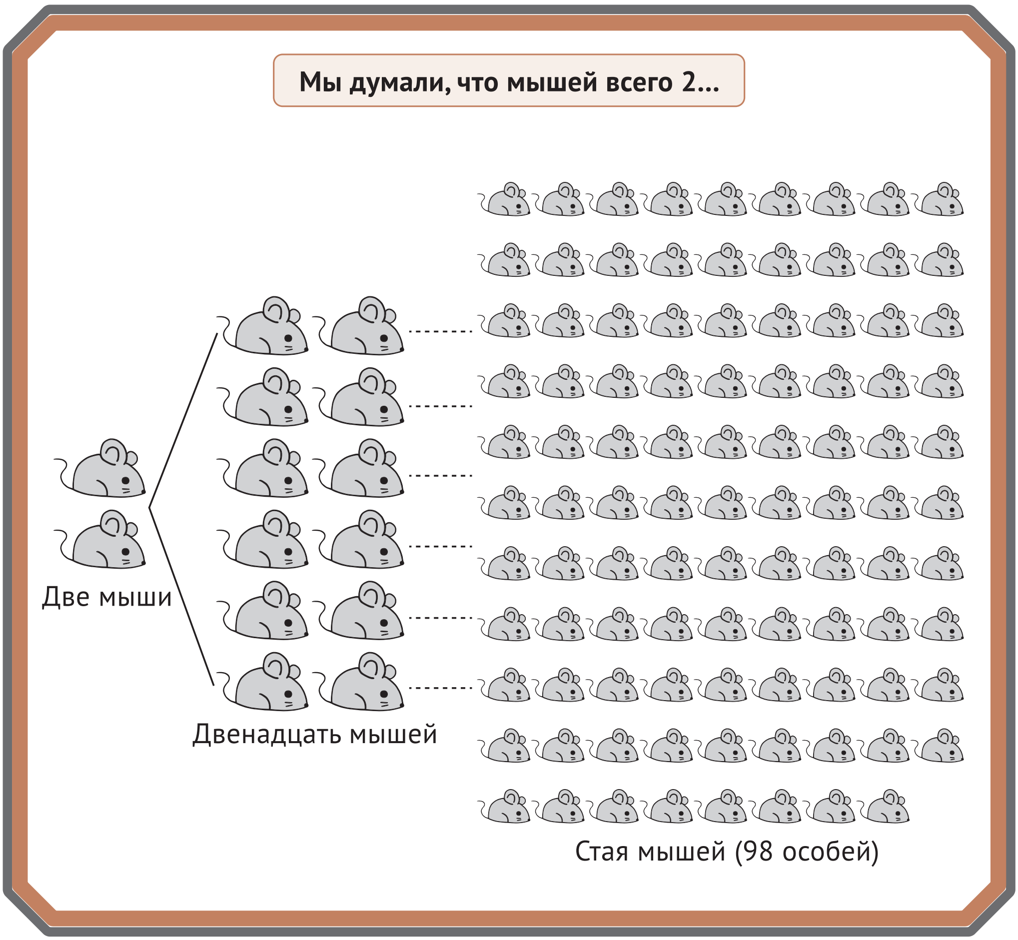
Хидэёси размышлял так: «Пусть в этом зале целых 100 татами, но если считать по зёрнам, то вряд ли наберётся больше 10–30 мешков».

И он поручил своему служащему произвести расчёты. До пятого, шестого… восьмого татами риса получилось действительно мало – всего какая-то пригоршня (256 зёрен) риса, однако начиная примерно с 30-го татами количество стало резко возрастать, достигнув уже порядка 2000 мешков. Конечно, для Хидэёси дать и такое количество было не проблемой, но когда расчёты дошли до сотого татами, даже сам Хидэёси испугался: ведь результат составил 525 000 000 000 000 000 000 000 000 000 мешков, что намного превышало количество риса, выращенного за всю

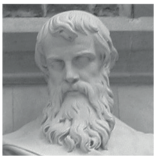
Даже единица даст умопомрачительное число, если её 100 раз умножить на 2!

историю человечества, не говоря уже о том количестве, которое можно было собрать со всей Японии.

Хидэёси извинился перед Синдзаэмоном за свою неспособность подарить последнему так много риса. Эта притча позволяет прочувствовать умопомрачительные масштабы многократного умножения на 2. Кроме того, в учебнике по математике «Дзинкоки» (Jinkouki), изданном в 1627 г. математиком по имени Ёсида Мицуёси, содержалась следующая задача: «На Новый год семейная пара мышей родила 12 мышат. В феврале эти 14 мышей спарились между собой и опять родили мышат, и стало всего 98 мышей, включая и детей, и родителей. Если они будут размножаться так каждый месяц, то сколько всего будет мышей в декабре?» В вышеуказанной книге приведён также и ответ – 27 682 574 402 мыши (2×7^{12}).



Математики
Column 1



Древнегреческий математик Евклид

(330–275 гг. до н. э.)

* Даты не являются достоверными

Геометрия, которую мы изучаем в школе, называется «евклидовой геометрией». Евклид – это имя ученого, ставшее именем нарицательным всей древнегреческой математики.

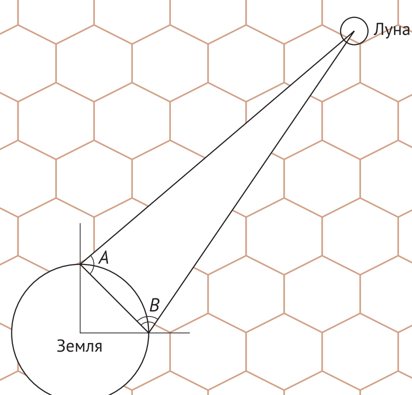
Евклид систематизировал математические знания в своём сочинении «Начала», которое вот уже на протяжении более 2000 лет является бестселлером, следующим по популярности за Библией. Однако абсолютно ничего не известно о том, что за человеком был Евклид.

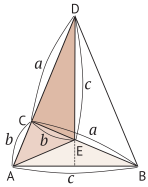
Платон основал в роще Академия философскую школу и, работая в ней, создал основы математики, а Евклид, основываясь на его идеях, написал свои «Начала», которые являются учебником и самой первой книгой по евклидовой геометрии. Когда Евклид, используя свои «Начала», содержащие 9 аксиом и 5 постулатов, читал лекции по геометрии царю Египта Птолемею I (367–283 гг. до н. э.), последний спросил у Евклида, нельзя ли освоить геометрию, не изучая «Начал», на что Евклид ответил так: «В геометрии нет царских путей». Другими словами, в учёбе даже для царей не может быть сделано никаких поблажек.

Также рассказывают, когда один юноша как-то спросил у Евклида о том, какая ему будет выгода от изучения столь сложной науки, Евклид позвал своего слугу и приказал ему: «Дай этому юноше денег. Он, похоже, считает учёбу чем-то, что должно приносить выгоду».

Глава 1

Знаменитые теоремы математики





Теорема Пифагора и тригонометрические функции

Математика, существовавшая ещё в эпоху Древней Греции, имеет долгую историю и в те давние времена уже являлась наукой, прочно вошедшей в жизнь. Необходимость составлять календари, создававшиеся на основе астрономических наблюдений, находить площади земельных участков, возникавших после разливов рек, привели к зарождению дифференциального и интегрального исчислений.

В современную эпоху, хотя это стало менее очевидно по причине возросшей сложности, количество благ, которые даёт нам математика, неуклонно растёт, и не будет преувеличением сказать, что современная математика сама по себе превратилась в огромный, поражающий воображение мир.

Давайте рассмотрим это на таком простом примере, как электричество, без которого мы уже не можем обойтись. **Все размышления об электричестве проводятся на основе математики. Для получения диплома электрика необходимо изучить прикладную математику в электротехнике, где часто встречаются тригонометрические функции.**

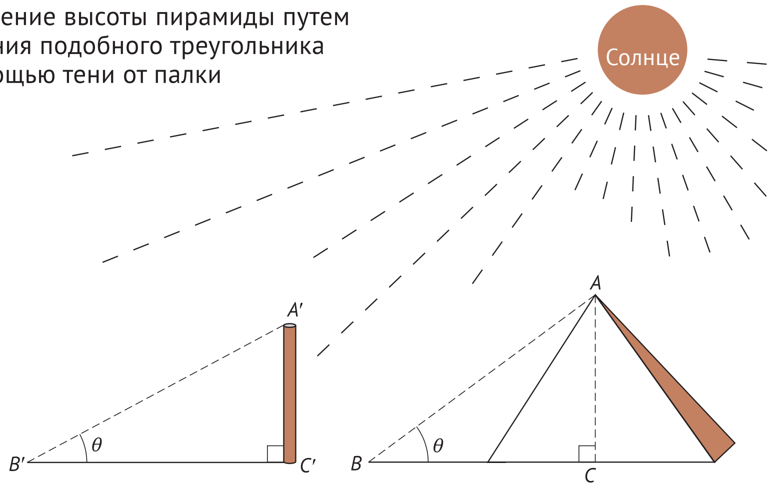
Когда мы слышим слова «синус», «косинус» или «тангенс», нам представляется что-то сложное, но в действительности тригонометрические функции можно рассматривать на основе соотношений сторон прямоугольного треугольника и теоремы Пифагора, являющейся наиболее широко известной теоремой евклидовой геометрии.

Считается, что первым человеком, придумавшим, как на практике использовать геометрию, был древнегреческий математик Фалес. Существует знаменитая история о том, как Фалес, заметивший, что если задать один из углов прямоугольного треугольника – угол θ («тета»), то все прямоугольные треугольники, имеющие такой же угол, будут подобны друг другу, использовал это для измерения высоты пирамид.

В японской традиционной математике «Васан» теорему Пифагора называли «теоремой о трёх сторонах прямоугольного треугольника».

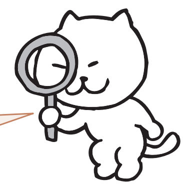
Теорема Пифагора и тригонометрические функции

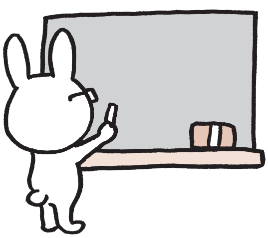
Измерение высоты пирамиды путем создания подобного треугольника с помощью тени от палки



Треугольник ABC, образуемый тенью от пирамиды, и треугольник $A'B'C'$, образуемый тенью от палки, являются подобными фигурами. Так как $AC:A'C' = BC:B'C'$, высоту пирамиды можно найти по формуле:

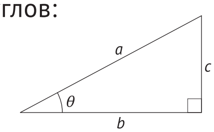
$$AC = \frac{A'C' \times BC}{B'C'}$$





Соотношения сторон

прямоугольного треугольника определяют связь между длинами трёх сторон прямоугольного треугольника и одним из его углов:



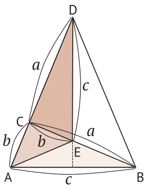
$c/a = \sin\theta$

$b/a = \cos\theta$

$c/b = \mathrm{tg}\theta$

Пифагоровы числа (пифагоровы тройки)

Это группы трёх целых чисел вида 3, 4, 5 или, например, 5, 12, 13, которые удовлетворяют уравнению $a^2 = b^2 + c^2$. Такие комбинации целых чисел названы «пифагоровыми» в честь учеников Пифагорейской школы, занимавшихся их исследованием



Теорема синусов

Тригонометрические соотношения представляют собой формулы, выражающие отношения сторон прямоугольного треугольника через углы при его вершинах, а тригонометрические функции являются функциями угла. **Идея тригонометрических функций основана на использовании тригонометрических соотношений в качестве функций.**

Считается, что история триангуляции – метода измерений, основанного на использовании свойств треугольников, началась во II в. до н. э., когда Гиппарх основал тригонометрию и изобрёл синус.

О том, что тригонометрические функции используются для измерений, я уже рассказывал. Триангуляция – это такой метод измерений, в котором измеряемый участок последовательно заполняется треугольниками.

Принцип триангуляции заключается в том, что по одной стороне и двум прилегающим к ней углам треугольника вычисляют две другие его стороны, и принцип этот называется «теоремой синусов».

Другими словами, эта теорема позволяет, зная только одну сторону и прилегающие к ней углы *A* и *B*, вычислить длину до ещё одной точки – *C*.

А как же теорема синусов используется в повседневной жизни? Метод триангуляции, позволяющий проводить измерения на обширных пространствах, используется для измерений в различных областях.

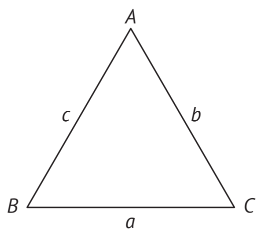
С его помощью можно найти расстояние от Земли до Луны или, например, до искусственного спутника Земли. Таким образом, теоремы математики имеют широчайший диапазон практического применения.

Теорема синусов – это теорема, имеющая в мире измерений особое значение.

Теорема синусов

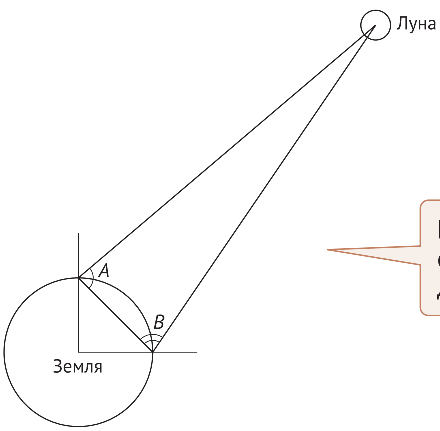
Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



Пусть внутренние углы при вершинах треугольника равны A, B и C, а длины его сторон — a, b и c. Тогда если радиус окружности, описанной около данного треугольника, равен R, то выполняются вышеуказанные соотношения

Используя идею триангуляции, измеряем расстояние до Луны



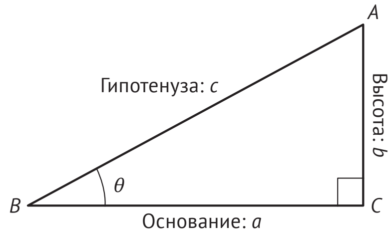
Измерив углы, можно по теореме синусов вычислить расстояние даже до Луны

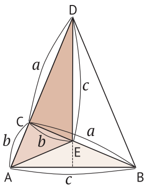
Пифагоровы числа (пифагоровы тройки)

$$\sin\theta = \frac{\text{высота}}{\text{гипотенуза}} = \frac{b}{c}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{основание}}{\text{гипотенуза}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{высота}}{\text{основание}} = \frac{b}{a}$$





Теорема косинусов

Представьте ситуацию: мы хотим измерить расстояние между двумя точками на местности – *A* и *B*, но сделать это непосредственно невозможно, из-за того что между ними находятся, например, здания, деревья или гора. Даже в случае когда непосредственно измерить расстояние из-за этого невозможно, мы, используя тригонометрические функции, можем найти расстояние между точками *A* и *B*.

Мы выбираем точку на местности, которая видна из обеих точек, – *A* и *B*, называем её точкой *C* и измеряем оба расстояния – *AC* и *BC*, а также угол *C*. Этой информации достаточно для нахождения длины *AB* с помощью тригонометрических функций.

Метод нахождения длины одной из сторон треугольника по известным длинам двух других сторон и известному углу между ними называется теоремой косинусов.

Идея теоремы косинусов основана на том, что мы опускаем перпендикуляр на одну из сторон треугольника *ABC*, создавая тем самым два прямоугольных треугольника.

Найти искомую длину можно, используя тригонометрические функции и теорему Пифагора.

Теорему косинусов можно вывести на основе двух прямоугольных треугольников – *ACH* и *AHB*.

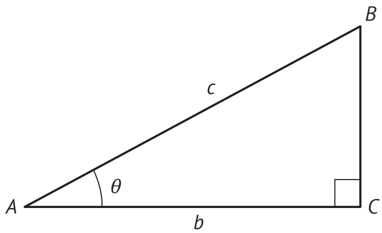
В теореме косинусов используется cos (косинус).

Если обозначить через c длину гипотенузы, b – длину основания прямоугольного треугольника, как показано на следующей странице вверху, то $\cos\theta$ можно будет выразить как b/c.

Если угол треугольника равен 60°, то $\cos\theta$ будет равен ½. Так как $\cos\theta$ находится по формуле $\frac{\text{основание}}{\text{гипотенуза}}$, можно понять, что если гипотенуза треугольника в 2 раза длиннее основания, то его угол будет равен 60° (см. схему тригонометрических соотношений на с. 24).

Углы прямоугольного треугольника можно узнать на основе тригонометрических функций.

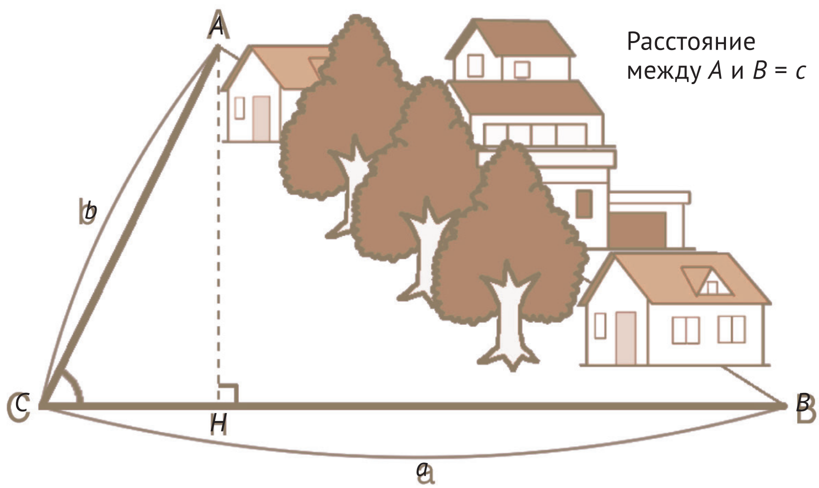
Теорема косинусов



Что такое косинус?
Если обозначить через *c* длину гипотенузы, *b* – длину основания, то:

$\cos\theta = b/c$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



Расстояние между *A* и *B* = *c*

Если хотят измерить расстояние между точками *A* и *B* на местности, но сделать это непосредственно невозможно из-за препятствий, находящихся между этими точками, например деревьев или построек, то используют теорему косинусов:

- произвольно выбрав на местности точку *C*, измеряют расстояния *AC* и *CB;*
- построив треугольники *ACH* и *AHB*, выводят теорему косинусов на основе тригонометрических функций и теоремы Пифагора