



# СОДЕРЖАНИЕ

## Раздел 1

### ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Корень степени $n$ . . . . .	8
1.1.1. Понятие корня степени $n$ . . . . .	8
1.1.2. Свойства корня степени $n$ . . . . .	9
1.1.3. Тожественные преобразования иррациональных выражений. . . . .	13
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1. «Корень степени $n$ ». . . . .	14
1.2. Степень с рациональным показателем . . . . .	16
1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем . . . . .	16
1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем . . . . .	17
1.2.3. Тожественные преобразования степенных выражений. . . . .	21
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.2. «Степень с рациональным показателем» . . . . .	22
1.3. Логарифм . . . . .	24
1.3.1. Понятие логарифма . . . . .	24
1.3.2. Свойства логарифмов. . . . .	24
1.3.3. Десятичные и натуральные логарифмы . . . . .	28
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.3. «Логарифмы» . . . . .	29
1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс . . . . .	31
1.4.1. Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента. . . . .	31
1.4.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента . . . . .	32
1.4.3. Формулы сложения . . . . .	36
1.4.4. Следствия из формул сложения . . . . .	38
1.4.5. Формулы приведения. . . . .	40
1.4.6. Тожественные преобразования тригонометрических выражений. . . . .	41

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.4. «Синус, косинус, тангенс, котангенс» . . . . .	43
---	----

1.5. Прогрессии . . . . .	45
1.5.1. Арифметическая прогрессия . . . . .	45
1.5.2. Геометрическая прогрессия . . . . .	49

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.5. «Прогрессии». . . . .	53
--	----

Тренировочные тестовые задания к разделу 1 «Выражения и преобразования» . . . . .	55
---	----

## Раздел 2

### УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Уравнения с одной переменной . . . . .	57
---	----

2.2. Равносильность уравнений . . . . .	58
---	----

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.1. «Уравнение с одной переменной» . . . . .	61
---	----

2.3. Общие приемы решения уравнений . . . . .	63
2.3.1. Разложение на множители . . . . .	63
2.3.2. Замена переменной. . . . .	64
2.3.3. Использование свойств функций . . . . .	68
2.3.4. Использование графиков . . . . .	69

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.3. «Общие приемы решения уравнений». . . . .	71
--	----

2.4. Решение простейших уравнений. . . . .	73
2.4.1. Решение иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений . . . . .	73
2.4.2. Использование нескольких приемов при решении уравнений . . . . .	80

2.4.3. Решение комбинированных уравнений (например, показательно-логарифмических, показательно-тригонометрических, логарифмически степенных, дробно-рациональных относительно степенной функции) . . . . .	88	Тренировочные тестовые задания к разделу 2 «Уравнения и неравенства» . . . . .	128
2.4.4. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля . . . . .	90		
2.4.5. Уравнения с параметрами . . . . .	91		
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.4. «Решение простейших уравнений» . . . . .	92		
<b>2.5. Системы уравнений с двумя переменными.</b> . . . . .	94	<b>Раздел 3</b>	<b>ФУНКЦИИ</b>
2.5.1. Системы, содержащие одно или два иррациональных уравнения . . . . .	95	<b>3.1. Числовые функции и их свойства.</b> . . . . .	130
2.5.2. Системы, содержащие одно или два тригонометрических уравнения . . . . .	96	3.1.1. Область определения функции . . . . .	131
2.5.3. Системы, содержащие одно или два показательных уравнения . . . . .	97	3.1.2. Множество значений функции . . . . .	133
2.5.4. Системы, содержащие одно или два логарифмических уравнения . . . . .	99	3.1.3. Непрерывность функции . . . . .	135
2.5.5. Использование графиков при решении систем. . . . .	100	3.1.4. Периодичность функции . . . . .	136
2.5.6. Системы, содержащие уравнения разного вида (иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические) . . . . .	100	3.1.5. Четность (нечетность) функции . . . . .	138
2.5.7. Системы уравнений с параметром . . . . .	101	3.1.6. Возрастание (убывание) функции . . . . .	139
2.5.8. Системы, содержащие одно или два рациональных уравнения . . . . .	102	3.1.7. Экстремумы функции . . . . .	141
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.5. «Системы уравнений с двумя переменными» . . . . .	104	3.1.8. Наибольшее (наименьшее) значение функции . . . . .	142
<b>2.6. Неравенства с одной переменной</b> . . . . .	106	3.1.9. Ограниченность функции . . . . .	144
2.6.1. Рациональные неравенства . . . . .	107	3.1.10. Сохранение знака функции. . . . .	145
2.6.2. Показательные неравенства. . . . .	110	3.1.11. Связь между свойствами функции и ее графиком . . . . .	146
2.6.3. Логарифмические неравенства . . . . .	111	3.1.12. Значения функции . . . . .	165
2.6.4. Использование графиков при решении неравенства . . . . .	113	3.1.13. Свойства сложных функций . . . . .	167
2.6.5. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля . . . . .	116	Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.1. «Функции» . . . . .	172
2.6.6. Неравенства с параметром . . . . .	120	<b>3.2. Производная функции.</b> . . . . .	176
2.6.7. Решение комбинированных неравенств . . . . .	120	3.2.1. Геометрический смысл производной . . . . .	177
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.6. «Неравенства с одной переменной» . . . . .	122	3.2.2. Геометрический смысл производной и график функции. . . . .	178
<b>2.7. Системы неравенств.</b> . . . . .	124	3.2.3. Геометрический смысл производной и график производной . . . . .	179
<b>2.8. Совокупность неравенств</b> . . . . .	125	3.2.4. Физический смысл производной . . . . .	179
Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.7. «Системы неравенств». . . . .	126	3.2.5. Таблица производных. . . . .	179
		3.2.6. Производная суммы двух функций . . . . .	180
		3.2.7. Производная произведения двух функций . . . . .	181
		3.2.8. Производная частного двух функций . . . . .	181
		3.2.9. Производная функции вида $y = f(ax + b)$ . . . . .	181
		3.2.10. Производная сложных функций. . . . .	181
		Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.2. «Производная функции» . . . . .	182
		<b>3.3. Исследование функций с помощью производной</b> . . . . .	186
		3.3.1. Промежутки монотонности . . . . .	186
		3.3.2. Промежутки монотонности и график производной . . . . .	187
		3.3.3. Экстремумы функции. . . . .	187
		3.3.4. Точки экстремумов функции . . . . .	189
		3.3.5. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . .	190
		3.3.6. Точки, в которых функция достигает наибольшего или наименьшего значения и график производной . . . . .	191
		3.3.7. Построение графиков функций . . . . .	191

3.3.8. Решение текстовых задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения величины с помощью производной . . . . .	192	5.1.1. Равенство треугольников . . . . .	221
Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.3. «Исследование функции с помощью производной» . . . . .	194	5.1.2. Подобие треугольников . . . . .	222
<b>3.4. Первообразная</b> . . . . .	196	5.1.3. Неравенство треугольника . . . . .	225
3.4.1. Первообразная суммы функций . . . . .	197	5.1.4. Решение треугольников . . . . .	226
3.4.2. Первообразная произведения функции на число . . . . .	198	5.1.5. Площадь треугольника . . . . .	230
3.4.3. Задача о площади криволинейной трапеции. . . . .	198	Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.1. «Треугольник» . . . . .	231
Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.4. «Первообразная» . . . . .	200	<b>5.2. Многоугольники.</b> . . . . .	235
<b>Тренировочные тестовые задания к разделу 3 «Функции»</b> . . . . .	202	5.2.1. Параллелограмм, его виды. Площадь параллелограмма. . . . .	237
<b>Раздел 4 ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ</b>		5.2.2. Прямоугольник. Площадь прямоугольника . . . . .	238
<b>4.1. Проценты</b> . . . . .	204	5.2.3. Ромб. Площадь ромба . . . . .	238
4.1.1. Основные задачи на проценты . . . . .	204	5.2.4. Квадрат. Площадь квадрата . . . . .	239
<b>4.2. Пропорции</b> . . . . .	206	5.2.5. Трапеция. Средняя линия трапеции. Площадь трапеции . . . . .	240
4.2.1. Основное свойство пропорции . . . . .	206	5.2.6. Правильные многоугольники . . . . .	242
4.2.2. Прямо пропорциональные величины . . . . .	207	Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.2. «Многоугольники» . . . . .	244
4.2.3. Обратно пропорциональные величины . . . . .	208	<b>5.3. Окружность.</b> . . . . .	246
<b>4.3. Решение текстовых задач</b> . . . . .	208	5.3.1. Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга . . . . .	246
4.3.1. Задачи на движение . . . . .	208	5.3.2. Окружность, описанная около треугольника . . . . .	250
4.3.2. Задачи на работу . . . . .	210	5.3.3. Окружность, вписанная в треугольник . . . . .	251
4.3.3. Задачи на сложные проценты . . . . .	211	5.3.4. Комбинация окружностей, описанных и вписанных в треугольник . . . . .	251
4.3.4. Задачи на десятичную форму записи числа . . . . .	212	Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.3. «Окружность» . . . . .	252
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.1. «Проценты». . . . .	213	<b>5.4. Равные векторы. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов</b> . . . . .	254
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.2. «Пропорции». . . . .	215	5.4.1. Скалярные и векторные величины . . . . .	254
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.3. «Решение текстовых задач» . . . . .	217	5.4.2. Равенство векторов . . . . .	254
<b>Тренировочные тестовые задания к разделу 4 «Числа и выражения»</b> . . . . .	219	5.4.3. Координаты вектора . . . . .	255
<b>Раздел 5 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА</b>		5.4.4. Сложение векторов . . . . .	255
<b>5.1. Признаки равенства и подобия треугольников. Решение треугольников. Сумма углов треугольника. Неравенство треугольников. Теорема Пифагора. Теорема синусов и теорема косинусов. Площадь треугольника</b> . . . . .	221	5.4.5. Умножение вектора на число . . . . .	256
		5.4.6. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами . . . . .	257
		Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.4. «Векторы» . . . . .	258
		<b>5.5. Многогранники</b> . . . . .	260
		5.5.1. Призма . . . . .	260
		5.5.2. Пирамида . . . . .	270
		5.5.3. Правильные многогранники. Сечение плоскостью. Площадь боковой и полной поверхностей. Объем . . . . .	276
		Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.5. «Многогранники» . . . . .	278
		<b>5.6. Тела вращения</b> . . . . .	282
		5.6.1. Прямой круговой цилиндр. . . . .	282
		5.6.2. Прямой круговой конус . . . . .	287

5.6.3. Шар и сфера. Площадь поверхности. Объем шара . . . . .	293	6.2.3. Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий . . . . .	329
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.6. «Тела вращения» . . . . .	296	6.2.4. Операции над событиями . . . . .	330
<b>5.7. Комбинации тел.</b> . . . . .	302	6.2.5. Вероятность сложных событий . . . . .	332
5.7.1. Комбинации многогранников . . . . .	302	6.2.6. Независимые события . . . . .	332
5.7.2. Комбинации тел вращения . . . . .	302	6.2.7. Зависимые события . . . . .	335
5.7.3. Комбинации многогранников и тел вращения . . . . .	306	6.2.8. Независимые испытания. Схема Бернулли . . . . .	336
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.7. «Комбинации тел». . . . .	312	6.2.9. Статистическое определение вероятности . . . . .	337
<b>Тренировочные тестовые задания к разделу 5 «Геометрические фигуры, их свойства. Измерение геометрических величин».</b> . . . .	314	6.2.10. Закон больших чисел . . . . .	338
<b>Раздел 6</b>		Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.2. «Вероятность событий» . . . . .	340
<b>ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ</b>		<b>6.3. Решение практических задач: анализ диаграмм и графиков, анализ информации статистического характера</b> . . . . .	342
6.1. Простейшие комбинаторные задачи . . . . .	316	6.3.1. Понятие о статистике и ее методах. Статистические таблицы . . . . .	342
6.1.1. Множества и операции над ними . . . . .	316	6.3.2. Ряд распределения. Наглядное изображение статистического распределения . . . . .	344
6.1.2. Элементы комбинаторики . . . . .	319	6.3.3. Мода и медиана. Средние значения . . . . .	345
Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.1. «Простейшие комбинаторные задачи» . . . . .	326	<b>Тренировочные тестовые задания к разделу 6 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятности»</b> . . . . .	346
6.2. Вероятность событий: вычисление вероятности событий на основе подсчета числа исходов. . . . .	328	Ответы к примерам заданий ЕГЭ . . . . .	348
6.2.1. Основные понятия теории вероятностей . . . . .	328	Ответы к тренировочным тестовым заданиям . . . . .	350
6.2.2. Классическое определение вероятности . . . . .	329		

## ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Тренировочное тестовое задание № 1 . . . . .	354	Тренировочное тестовое задание № 2 . . . . .	362
Ответы. . . . .	359	Ответы. . . . .	367

---

# МАТЕМАТИКА

---

Теоретический курс с примерами заданий ЕГЭ



Выражения и преобразования



Уравнения и неравенства



Функции



Числа и выражения



Геометрические фигуры  
и их свойства



Элементы комбинаторики,  
статистики, теории вероятности





## 1.1. Корень степени $n$

### 1.1.1. Понятие корня степени $n$

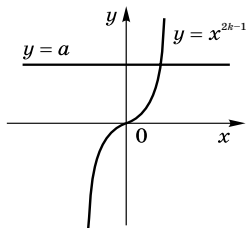
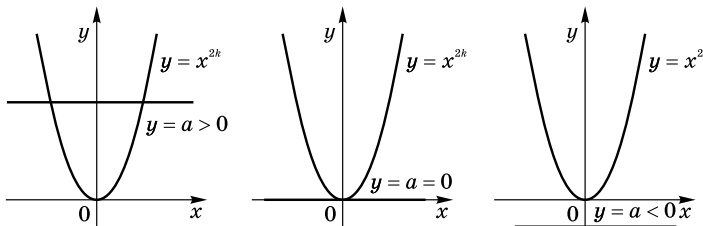
**Корнем степени  $n$  из числа  $a$  называется такое число,  $n$ -я степень которого равна  $a$ ;  $a$  — действительное число.**

Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку  $2^3 = 8$ ; корень четвертой степени из числа 16 равен 2 или  $-2$ , поскольку  $2^4 = 16$  и  $(-2)^4 = 16$ ; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку  $0^{10} = 0$ .

Согласно этому определению, корень степени  $n$  — это корень уравнения  $x^n = a$ . Число корней этого уравнения зависит от  $n$  и  $a$ .

Если  $n$  — четное, то есть  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то уравнение  $x^{2k} = a$  имеет два корня, если  $a > 0$ ; один корень, если  $a = 0$ ; не имеет корней, если  $a < 0$ .

Если  $n$  — нечетное, то есть  $n = 2k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то уравнение  $x^{2k-1} = a$  всегда имеет только один корень.



Неотрицательный корень уравнения  $x^n = a$  называют арифметическим корнем  $n$ -й степени из числа  $a$ .

**Арифметическим корнем степени  $n$  из неотрицательного числа  $a$  называется такое неотрицательное число,  $n$ -я степень которого равна  $a$ .**

Арифметический корень степени  $n$  из числа  $a$  обозначают так:  $\sqrt[n]{a}$ . Число  $n$  называют показателем корня, число  $a$  — подкоренным выражением.

Если  $n = 2$ , то вместо  $\sqrt[2]{a}$  пишут  $\sqrt{a}$  и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет об арифметическом корне степени  $n$ , коротко говорят «корень степени  $n$ » или «корень  $n$ -й степени».

**Пример 1.** Найдите значение:

а)  $\sqrt[3]{8}$ ; б)  $\sqrt[4]{81}$ ; в)  $\sqrt[5]{1}$ ; г)  $\sqrt[100]{0}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt[3]{8} = 2$ , поскольку  $2^3 = 8$  и  $2 > 0$ ;

б)  $\sqrt[4]{81} = 3$ , поскольку  $3^4 = 81$  и  $3 > 0$ ;

в)  $\sqrt[5]{1} = 1$ , поскольку  $1^5 = 1$  и  $1 > 0$ ;

г)  $\sqrt[100]{0} = 0$ , поскольку  $0^{100} = 0$  и  $0 = 0$ .

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел:

$$\sqrt[2k]{a} = x, \quad a \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Арифметический корень нечетной степени существует из любого числа, поскольку

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Пример 2.** Найдите значение:

а)  $\sqrt[3]{-8}$ ; б)  $\sqrt[5]{-243}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$ ;

б)  $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$ .

Непосредственно из определения арифметического корня степени  $n$  следует:

1. Если  $\sqrt[n]{a}$  существует, то  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ .

2.  $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0, \text{ где } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

3.  $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$ , где  $k \in \mathbb{N}$ .

**Пример 3.** Найдите арифметический корень

$\sqrt[8]{(a-b)^8}$  при а)  $a \geq b$ ; б)  $a < b$ .

*Решение.*

$$\sqrt[8]{(a-b)^8} = |a-b|.$$

а) если  $a \geq b$ , то  $a-b \geq 0$  и  $|a-b| = a-b$ , следовательно,  $\sqrt[8]{(a-b)^8} = a-b$ ;

б) если  $a < b$ , то  $a-b < 0$  и  $|a-b| = -(a-b) = b-a$ , следовательно,  $\sqrt[8]{(a-b)^8} = b-a$ .

## 1.1.2. Свойства корня степени $n$

### Корень из произведения и произведение корней

**Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:**

$$\text{если } a \geq 0, b \geq 0, \text{ то } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней  $n$ -й степени:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \text{где } a \geq 0, b \geq 0.$$

**Пример 1.** Найдите значения выражений:

а)  $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125}$ ; б)  $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$ .



Решение.

а)  $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{125} = 0,3 \cdot 5 = 1,5$ ;

б)  $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{0,0081} = 4 \cdot 0,3 = 1,2$ .

Пример 2. Вычислите:

а)  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$ ; б)  $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$ .

Решение.

а)  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000} = 10$ ; б)  $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{324 \cdot 4} = \sqrt[4]{18^2 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4} = 6$ .

Пример 3. Упростите выражение:

$$(\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} (\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 &= (\sqrt{7+2\sqrt{10}})^2 + 2\sqrt{7+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{10}} + (\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2 = \\ &= 7+2\sqrt{10} + 2\sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2} + 7-2\sqrt{10} = 14 + 2\sqrt{49 - 4 \cdot 10} = 14 + 2 \cdot 3 = 20. \end{aligned}$$

Пример 4. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$ .

Решение.

$$\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{16-8} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

## Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, деленному на корень из делителя:

$$\text{если } a \geq 0 \text{ и } b > 0, \text{ то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней  $n$ -й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geq 0, b > 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а)  $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$ ; б)  $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$ ; в)  $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ .

Решение.

а)  $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ; б)  $\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5$ ; в)  $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1,5$ .

Пример 2. Вычислите:

а)  $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$ ; б)  $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$ .

Решение.

а)  $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$ ; б)  $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$ .

## Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$\text{если } a > 0, \text{ то } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \text{ где } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

**Пример 1.** Упростите:

а)  $(\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}})^2$ ; б)  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ .

*Решение.*

а)  $(\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}})^2 = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$ .

б)  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \cdot 2} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ .

**Пример 2.** Вычислите:

а)  $\sqrt[3]{5^9}$ ; б)  $\sqrt[5]{0,3^{10}}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$ ; б)  $\sqrt[5]{0,3^{10}} = \sqrt[5]{(0,3^2)^5} = 0,3^2 = 0,09$ .

**Пример 3.** Упростите:

а)  $\sqrt[3]{a^6}$ ; б)  $\sqrt[4]{a^{20}}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$ ; б)  $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = |a^5| = |a|^5$ .

## Корень степени $m$ из корня степени $n$

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

$$\text{если } a \geq 0, \text{ то } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{mn}{a}, m \geq 2, n \geq 2.$$

**Пример 1.** Упростите выражение:

а)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$ ; б)  $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ ; в)  $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$ ; б)  $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ ; в)  $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$ .

**Пример 2.** Вычислите:

а)  $\sqrt[4]{4096}$ ; б)  $\sqrt[4]{1296}$ ; в)  $\sqrt[6]{729}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$ ;

б)  $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$ ;

в)  $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$ .

## Корень из произведения и частного степеней

**Пример 1.** Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt[5]{\frac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}}$ ; б)  $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt[5]{\frac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{3^{10}} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{(3^2)^5} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}} = \frac{3^2 \cdot 5}{7^2} = \frac{45}{49}$ ;

б)  $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}} = \frac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12} \cdot 5^6}} = \frac{\sqrt[6]{3^{18}}}{\sqrt[6]{2^{12} \cdot 5^6}} = \frac{\sqrt[6]{(3^3)^6}}{\sqrt[6]{(2^2)^6 \cdot 5^6}} = \frac{3^3}{2^2 \cdot 5} = \frac{27}{20} = 1\frac{7}{20}$ .

## Корень из произведения и частного корней

**Пример 1.** Упростите:

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} : \sqrt[8]{a^7b^3}}.$$

*Решение.*

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} : \sqrt[8]{a^7b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[12]{(a^2)^4} \sqrt[12]{(ab^2)^3} \cdot \sqrt[12]{(a^5b)^2} : \sqrt[8]{a^7b^3}} =$$

$$= \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^8 a^3 b^6 a^{10} b^2} : \sqrt[8]{a^7 b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^{21} b^8} : \sqrt[8]{a^7 b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{(a^{21} b^8)^2} : \sqrt[24]{(a^7 b^3)^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{\frac{a^{42} b^{16}}{a^{21} b^9}}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{a^{21} b^7}} =$$

$$= \sqrt[24]{\sqrt[7]{a^{21} b^7}} = \sqrt[24]{a^3 b}.$$

## Другие комбинации свойств корней степени $n$

**Пример 1.** Упростите:

а)  $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}$ ; б)  $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$ ; в)  $\sqrt{2\sqrt{x}}$ ; г)  $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt[3]{2\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{24}} = \sqrt[6]{24}$ ;

б)  $\sqrt[3]{4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{80}} = \sqrt[6]{80}$ ;

в)  $\sqrt{2\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4x}} = \sqrt[4]{4x}$ ;

г)  $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[16]{32}$ .

**Пример 2.** Найдите значение выражения:

$$\frac{5 + 2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{2}} + \frac{5 - 2\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}}.$$

*Решение.*

$$\frac{5 + 2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{2}} + \frac{5 - 2\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}} = \frac{(5 + 2\sqrt{2})^2}{(5 - 2\sqrt{2})(5 + 2\sqrt{2})} + \frac{(5 - 2\sqrt{2})^2}{(5 + 2\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{2})} = \frac{25 + 20\sqrt{2} + 8}{25 - 8} + \frac{25 - 20\sqrt{2} + 8}{25 - 8} = \frac{66}{17} = 3\frac{15}{17}.$$

**Пример 3.** Найдите значение выражения:

$$\sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}} &= \sqrt{(4 + \sqrt{7})^2} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}} = \sqrt{16 + 8\sqrt{7} + 7} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}} = \\ &= \sqrt{23 + 8\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{23^3 - (8\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{529 - 448} = \sqrt[4]{81} = 3. \end{aligned}$$

### 1.1.3. Тождественные преобразования иррациональных выражений

#### Вынесение множителя из-под корня

Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то рациональный множитель можно вынести из-под знака корня:

$$\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Пример. Вынести множитель из-под корня.

а)  $\sqrt[5]{2^7}$ ; б)  $\sqrt{24}$ ; в)  $\sqrt[4]{2500}$ ; г)  $\sqrt[3]{a^{11} \cdot b^4}$ .

Решение.

а)  $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$ ; б)  $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ ;

в)  $\sqrt[4]{2500} = \sqrt[4]{625 \cdot 4} = \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{4} = 5 \cdot \sqrt[4]{2^2} = 5\sqrt{2}$ ;

г)  $\sqrt[3]{a^{11} \cdot b^4} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b} = \sqrt[3]{a^9 \cdot b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b} = a^3 \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}$ .

Ответ: а)  $2\sqrt[5]{4}$ ; б)  $2\sqrt{6}$ ; в)  $5\sqrt{2}$ ; г)  $a^3 \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}$ .

#### Внесение множителя под корень

Если рациональный множитель стоит перед корнем, то его можно внести под корень. Для этого нужно этот множитель возвести в степень корня:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n b}, \quad \text{если } a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Для корней четной степени в зависимости от знака  $a$  имеем:  $a \cdot \sqrt[2n]{b} = \sqrt[2n]{a^{2n} b}$ , если  $a \geq 0, b \geq 0$ ;  
 $a \sqrt[2n]{b} = -\sqrt[2n]{a^{2n} b}$ , если  $a \leq 0, b \geq 0$ .

В частности, для квадратных корней:  $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ , если  $a \geq 0, b \geq 0$ ;  $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$ , если  $a \leq 0, b \geq 0$ .

Пример. Внести множитель под корень:

а)  $3\sqrt[3]{6}$ ; б)  $a^2 \cdot \sqrt[5]{b}$ ; в)  $-5a\sqrt{\frac{8}{25}}, a < 0$ .

Решение.

а)  $3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}$ ; б)  $a^2 \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10} \cdot b} = \sqrt[5]{a^{10} b}$ ; в)  $-5a\sqrt{\frac{b}{25}} = \sqrt{\frac{25a^2 b}{25}} = \sqrt{a^2 b}$ .

Ответ: а)  $\sqrt[3]{162}$ ; б)  $\sqrt[5]{a^{10} b}$ ; в)  $\sqrt{a^2 b}$ .

#### Приведение подкоренного выражения к целому виду

Привести подкоренное выражение к целому виду — это значит освободить подкоренное выражение от знаменателя (если он есть):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^k \cdot b^{n-k}}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{1}{b} \sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}. \quad \text{Если } a \geq 0, \quad b > 0,$$

Пример.  $\sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^2 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{5} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{15}$ .

Ответ:  $\frac{1}{5} \sqrt[3]{15}$ .

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1.  
«Корень степени  $n$ »

Ответом на задания 1–18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.  
Ответ следует записать без указания единиц измерения.

1. Вычислите  $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

2. Вычислите  $\sqrt[5]{81 \cdot 96}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

3. Найдите значение выражения  $(\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}})^2$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

4. Найдите значение выражения  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

5. Найдите значение выражения  $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

6. Вычислите  $\sqrt{3}(\sqrt{12} - 2\sqrt{27})$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

7. Вычислите  $\sqrt{48} - 2\sqrt{3}(2 - 5\sqrt{12})$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

8. Найдите значение выражения  $(\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}})^2$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

9. Вычислите  $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

10. Вычислите  $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10}+3}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

11. Вычислите  $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} + \sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

12. Вычислите  $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} - \sqrt[4]{\frac{625}{16}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

13. Вычислите  $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

14. Вычислите  $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} + \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

15. Найдите значение выражения  $\sqrt[5]{0,3^{10} \cdot 2^{15}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

16. Найдите значение выражения  $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}} \cdot 4^{30}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

17. Найдите значение выражения  $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

18. Найдите значение выражения  $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

## 1.2. Степень с рациональным показателем

### 1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем

#### Степень с натуральным показателем

$n$ -й натуральной степенью действительного числа  $a$  называется действительное число  $b$ , получаемое в результате умножения числа  $a$  самого на себя  $n$  раз:

$$a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

$n$ -ю степень числа  $a$  обозначают  $a^n$  и пишут

$$b = a^n.$$

Число  $a$  называется основанием степени, а число  $n$  — показателем степени ( $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ).

$$0^n = 0, 1^n = 1, a^1 = a.$$

Например:

$$5^1 = 5; 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81; (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

#### Степень с целым показателем

При  $a \neq 0$  по определению  $a^0 = 1$ ,  $0^0$  — не определено.

При  $a \neq 0$  по определению  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  ( $n$  — натуральное число).

Например:

$$8^{-1} = \frac{1}{8}; 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}; (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9};$$

$0^{-5}$  — не определено.

#### Степень с рациональным показателем

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

где  $a > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Например:

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25} = 5; 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16};$$

$$2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{8}}. a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},$$

$a \geq 0$ ,  $n$  — натуральное число,  $n \geq 2$ .

Например:

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3; 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}; (-5)^{\frac{1}{3}} \text{ — не определено.}$$

## 1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем

### Произведение степеней с одинаковыми основаниями

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (a^{p+q} = a^p \cdot a^q).$$

Пример 1. Представьте выражение в виде степени:

а)  $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^2 = b^{\frac{2}{3} + \frac{6}{3}} = b^{\frac{8}{3}}$ ;

б)  $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{4} - \frac{2}{4}} = x^0 = 1$  при  $x \neq 0$ .

Пример 2. Вычислите:

а)  $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$ ; б)  $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$ .

Решение.

а)  $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4}{5} + \frac{11}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$ ;

б)  $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5^{\frac{2}{7} + \frac{5}{7}} = 5^1 = 5$ .

Пример 3. Вычислите:

а)  $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 3^1 = 3$ ;

$$\left(\frac{16}{0,0625}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{0,0625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0,0625^{\frac{1}{4}}}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{(0,5^4)^{\frac{1}{4}}}{(2^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,5^{4 \cdot \frac{1}{4}}}{2^{4 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{0,5^1}{2^1} = 0,25.$$

### Частное степеней с одинаковыми основаниями

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя:

$$a^p : a^q = a^{p-q}; \quad \left( a^{p-q} = a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} \right) \quad \text{или} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.$$

Пример 1. Упростите:

а)  $a^{\frac{13}{15}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{15} - \frac{4}{15}} = a^{\frac{9}{15}} = a^{\frac{3}{5}}$ ;

б)  $y^{\frac{5}{9}} : y^{-\frac{1}{6}} = y^{\frac{5}{9} - \left(-\frac{1}{6}\right)} = y^{\frac{5}{9} + \frac{1}{6}} = y^{\frac{10}{18} + \frac{3}{18}} = y^{\frac{13}{18}}$ ;

в)  $\frac{z^{-0,3}}{z^{-0,8}} = z^{-0,3 - (-0,8)} = z^{-0,3 + 0,8} = z^{0,5}$ .

Пример 2. Вычислите:

$$\frac{\sqrt[7]{128} \cdot \sqrt[5]{32}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[7]{2^7} \cdot \sqrt[5]{2^5}}{\sqrt{9^2} \cdot \sqrt[3]{4^3}} = \frac{2^7 \cdot 2^5}{9^2 \cdot 4^3} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 4} = \frac{1}{9}.$$